МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1975

УДК 531.8

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗУЕМОСТИ НЕГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ СИЛАМИ КУЛОНОВА ТРЕНИЯ

В. В. КАЛИНИН, И. В. НОВОЖИЛОВ

(Москва)

В механических задачах о контактном взаимодействии тел неголономные связи отвечают запрету на относительные смещения по касательному направлению к соприкасающимся поверхностям. В большинстве работ по динамике систем с неголономными связями эти связи считаются изначально наложенными на систему. При этом можно вычислить реакции связей и определить условия, при выполнении которых они не превосходят предельных значений сил в точках контакта. Такие условия носят необходимый характер. Задачу можно ставить иначе: задаться силами в точках контакта и отыскивать условия, при выполнении которых относительное проскальзывание устраняется за счет этих сил. Эти условия носят достаточный характер. Пример подобной постановки приведен в [1]. В этом примере связь реализуется за счет силы вязкого трения с бесконечным коэффициентом пропорциональности.

В данной работе обсуждаются необходимые и достаточные условия реализуемости неголономных связей за счет сил кулонова трения. Будем считать выполненными необходимые условия, если при движении системы в согласии с неголономными связями, т. е. без проскальзывания в поверхности контакта, силы реакций этих связей не превосходят предельных значений сил кулонова трения. Достаточными будем называть условия, при выполнении которых проскальзывание в соприкасающихся поверхностях исключается благодаря кулонову трению, т. е. реализуется неголономная связь.

Рассмотрим механическую систему, положение которой после исключения голономных связей определяется N независимыми координатами. Пренебрегая деформациями в площадках контакта, будем считать тела абсолютно жесткими. Пусть в системе имеется k кинематических пар, в которых голономными связями допускается взаимное проскальзывание. Трение в этих парах предполагается кулоновым.

В зависимости от вида кинематической пары взаимодействующие тела могут иметь одну или более относительных степеней свободы. Будем далее рассматривать пары с одной относительной степенью свободы и характеристиками трения, зависящими от одного аргумента.

Запишем уравнения движения системы в следующей общей форме:

$$\frac{dV_i}{dt}=g_i+\sum_{s=1}^{k} b_{is}f_s, \qquad \frac{dx_i}{dt}=V_i \qquad (i=1,2,\ldots,N;\ s=1,2,\ldots,k) \tag{1}$$

Здесь t — время, x_i — переменные системы, V_i — скорости изменения этих переменных, $g_i=g_i(x, V, t)$ — силы, действующие на систему помимо сил кулонова трения, f_s — кулоново трение в s-й паре, $b_{is}=b_{is}(x, t)$. В качестве характеристики кулонова трения примем

$$f_s=-f_{s0}\operatorname{sign} U_s \ (U_s\neq 0),\ f_{s0}=f_{s0}(x,t), \quad U_s=\sum_{n=1}^{N} A_{sn}V_n+A_{s0} \tag{2}$$

т. е. U_s — линейная функция скоростей V_n. Примем $A_{sn}=A_{sn}(x, t)$ ($n=0, 1,\ldots,N$).

Для дальнейшего удобно считать, что уравнения (1), (2) приведены к безразмерной, нормализованной форме. Это означает, что для рассматриваемого класса движения, определяемого конкретной задачей, все величины не превосходят значений порядка единицы.

Получим достаточные условия реализуемости неголономных связей. При выполнении этих условий уравнения (1), (2) должны иметь решение $U_s=0$, по крайней мере на ограниченном интервале времени. Индекс s в данном случае принимает значения, соответствующие номерам пар, в которых отсутствует проскальзывание.

Основная трудность состоит в том, что в (1), (2) входят разрывные функции f_s, а искомые решения $U_s=0$ попадают на их точки разрыва. В точках разрыва решение системы (1), (2), вообще говоря, не определено. Проведем доопределение решения в этих точках в соответствии с [2].

Перейдем в (1), (2) к новому набору фазовых переменных. В качестве первых k переменных возьмем величины U_s, недостающие $N-k$ скоростей выберем из V_i и оставим без изменения переменные x_i. Предположим, что структура соотношений (2) позволяет сделать эту замену невырожденной.

Уравнения в новых переменных примут вид

$$\frac{dU_l}{dt}=g_l^\circ+\sum_{s=1}^{k} b_{ls}^\circ f_s,\qquad \frac{dV_m}{dt}=g_m+\sum_{s=1}^{k} b_{ms}f_s\qquad \frac{dx_i}{dt}=V_i \tag{3}$$

$$U_s=\sum_{n=1}^{N} A_{sn}V_n+A_{s0}' \qquad (i=1,2,\ldots,N;\ l=1,2,\ldots,k;\ m=1,2,\ldots,N-k)$$

Здесь g_l°, b_{ls}° соответствуют выражениям g_i, b_{is} в (1).

Доопределение системы (3) выполняется так: выделяется малая ε-окрестность $|U_s|\leqslant\varepsilon$ точек разрыва; функции f_s в (3) заменяются функциями f_s°. Вне ε-окрестности и на ее границе f_s° тождественно совпадает с f_s, внутри — соединяет значения на границе монотонно и достаточно гладким образом.

Решение построенной таким способом системы в точке U_s принимается при $\varepsilon\to0$ за решение системы (3) в этой точке.

Предположим, что построенная система находится в начальный момент времени в окрестности $|U_s|\leqslant\varepsilon$ по части переменных (для простоты будем далее считать, что по всем переменным). Проведем нормализацию «малых» переменных $u_s=U_s/\varepsilon$. Переменные u_s принимают при этом конечные значения, функции f_s° становятся регулярными функциями аргументов u_s, а при соответствующих переменных в (3) появляется малый множитель ε.

$$\varepsilon\frac{du_l}{dt}=g_l^\circ+\sum_{s=1}^{k} b_{ls}f_s^\circ,\qquad \frac{dV_m}{dt}=g_m+\sum_{s=1}^{k} b_{ms}f_s^\circ \tag{4}$$

$$\frac{dx_i}{dt}=V_i,\qquad \varepsilon u_s=\sum_{n=1}^{N} A_{sn}V_n+A_{s0}\qquad (i=1,2,\ldots,N;\ l=1,2,\ldots,k;\ m=1,2,\ldots,N-k)$$

Полагая $\varepsilon=0$, получим из (4) вырожденную по А. Н. Тихонову [3] систему

$$g_l^\circ+\sum_{s=1}^{k} b_{ls}f_s^\circ=0,\qquad \frac{dV_m}{dt}=g_m+\sum_{s=1}^{k} b_{ms}f_s^\circ \tag{5}$$

$$\frac{dx_i}{dt}=V_i,\qquad \sum_{n=1}^{N} A_{sn}V_n+A_{s0}=0$$

Последние соотношения (5) представляют собой уравнения неголономных связей. В [4] доказывается близость порядка ε решений исходных уравнений вида (4) и вырожденных — вида (5) на произвольном конечном интервале времени.

Указанная близость обеспечивается при выполнении следующих условий [2–4]:

1. Выделим из (5) систему конечных уравнений

$$g_l^\circ+\sum_{s=1}^{k} b_{ls}^\circ f_s^\circ=0 \qquad (l=1,2,\ldots,k) \tag{6}$$

Эта система по переменным f_s° должна иметь изолированные корни f_s^*, удовлетворяющие условиям

$$|f_s^*|<f_{s0} \tag{7}$$

2. Найденные корни определяют положения равновесия так называемой «присоединенной» системы уравнений по переменным u_l

$$\frac{du_l}{d\tau}=g_l^\circ+\sum_{s=1}^{k} b_{ls}^\circ f_s^\circ \qquad (l=1,2,\ldots,k),\quad x_i=\text{const},\quad V_m=\text{const} \tag{8}$$

По [3, 4] положения равновесия системы (8) должны быть асимптотически устойчивыми.

Составим уравнения в вариациях Δu_l вблизи положения равновесия системы (8). Полученные уравнения будут описывать движение некоторой механической системы (вообще говоря, не совпадающей с исходной), находящейся только под действием сил вязкого трения. Эти силы зависят от всех скоростей Δu_l. Предположим, что коэффициенты b_{ls}° таковы, что диссипация системы в вариациях для (8) полная. При этом требование асимптотической устойчивости для рассматриваемого вида систем удовлетворяется.

Выполнение второго условия обеспечивает существование хотя бы малой области притяжения положений равновесия, а следовательно, и выполнение своего рода устойчивости неголономных связей по отношению к малым возмущениям системы относительно этих связей.

Условия близости решений полной и вырожденной систем формулируются в [3, 4] как достаточные. Механически задача формулировалась выше так же, как задача нахождения достаточных условий. Таким образом, условия (7) являются единственными существенными достаточными условиями реализуемости неголономных связей

$$\sum_{n=1}^{N} A_{sn}V_n+A_{s0}=0$$

Проведенное исследование можно распространить на случай, когда взаимодействующие в кинематической паре тела имеют две относительные степени свободы. Ограничимся случаем, когда тела контактируют в точке и хотя бы для одной поверхности в точке контакта можно провести касательную плоскость.

Зададим ортогональную систему координат с началом в точке контакта и осями, лежащими в касательной плоскости. Обозначим через U_{s1}, U_{s2}

проекции на эти оси относительной скорости проскальзывания, а через f_{s_1}, f_{s_2} — проекции силы трения на эти оси.

Полагая вектор силы кулонова трения направленным противоположно вектору относительной скорости, получим

$$f_{s_1}=-f_{s0}\frac{U_{s_1}}{\sqrt{U_{s_1}^2+U_{s_2}^2}}, \quad f_{s_2}=-f_{s0}\frac{U_{s_2}}{\sqrt{U_{s_1}^2+U_{s_2}^2}}, \quad f_{s0}=f_{s0}(x,t)$$

Уравнения движения в этом случае имеют такую же структуру, как и (1), лишь разрывные функции f_{s_1}, f_{s_2} будут теперь зависеть от двух аргументов. Доопределение этих функций производится так: выделяется малая ε-окрестность $(U_{s_1}^2+U_{s_2}^2)^{1/2}\leqslant\varepsilon$ точек разрыва; в ε-окрестности f_{s_1}, f_{s_2} заменяются функциями

$$f_{s_1}^\circ=-f_s^\circ\frac{U_{s_1}}{\sqrt{U_{s_1}^2+U_{s_2}^2}}, \quad f_{s_2}^\circ=-f_s^\circ\frac{U_{s_2}}{\sqrt{U_{s_1}^2+U_{s_2}^2}}, \quad f_s^\circ=f_s^\circ(\sqrt{U_{s_1}^2+U_{s_2}^2})$$

Здесь f_s° — гладкая монотонная функция аргумента $(U_{s_1}^2+U_{s_2}^2)^{1/2}$, на границе ε-окрестности совпадающая с f_{s0}. Близость систем, аналогичных (4) и (5), обеспечивается выполнением следующих условий.

Система, аналогичная (6), имеет по переменным $f_{s_1}^\circ$, $f_{s_2}^\circ$ корни, удовлетворяющие неравенствам

$$(9) \qquad (f_{s_1}^*)^2+(f_{s_2}^*)^2<f_{s0}^2$$

Положения равновесия системы, аналогичной (8), асимптотически устойчивы. Последнее легко доказывается путем построения функции Ляпунова для системы в вариациях около положений равновесия.

Таким образом, неравенства (9) являются достаточными условиями реализуемости неголономных связей в случае проскальзывания с двумя степенями свободы в точке контакта.

Получим необходимые условия реализуемости неголономных связей силами кулонова трения для ранее рассмотренной механической системы.

После исключения голономных связей эта система описывается N независимыми координатами и имеет k пар с одной относительной степенью свободы, допускающих проскальзывание. Предположим для определенности, что проскальзывание отсутствует во всех парах. Обозначим через F_s $(s=1, 2,\ldots,k)$ реакции этих связей, приложенные в точках контакта соприкасающихся поверхностей. Поскольку нормальные составляющие реакций между взаимодействующими телами исключаются при переходе к независимым координатам, то F_s лежат в касательной плоскости в точке контакта. Таким образом, реакции F_s совпадают по направлению с силами кулонова трения в кинематических парах. (Аналогичное рассуждение легко проводится для случаев, когда пары с одной степенью свободы соприкасаются по плоскости, по цилиндрической поверхности (при этом речь идет о моменте сил реакций и моменте сил трения) и для случаев, когда пары с двумя относительными степенями свободы соприкасаются в точке).

Уравнения движения такой системы имеют вид

$$(10) \qquad \frac{dV_i}{dt}=g_i+\sum_{s=1}^{k}b_{is}F_s, \quad \frac{dx_i}{dt}=V_i, \quad \sum_{n=1}^{N}A_{sn}V_n+A_{s0}=0$$

Первые два уравнения (10) совпадают с уравнениями (1) с точностью до обозначения сил в точках контакта. Последнее соотношение (10) — уравнение неголономной связи.

Найдем из (10) величины F_s. Для этого в (10) удобно сделать замену, которая ранее была проведена при переходе от (1), (2) к (3). При этом уравнения (10) преобразуются к системе, которую можно получить из (3), заменив f_s на F_s и положив $U_s=0$. Из первого уравнения (3) получим

$$(11)\qquad g_l^\circ+\sum_{s=1}^{k} b_{ls}F_s=0 \qquad (l=1,2,\ldots,k)$$

Эта система по переменным F_s совпадает с системой (6) по переменным f_s°. Следовательно, решения F_s^* системы (11) совпадают с корнями f_s^* системы (6)

$$(12)\qquad F_s^*=f_s^*$$

Найденные касательные реакции F_s^* в точках касания поверхностей тел реализуются в рассматриваемой задаче только за счет сил кулонова трения. Значение кулонова трения в каждой паре с проскальзыванием ограничено величиной f_{s0}. Следовательно, необходимым условием реализуемости реакций F_s^* будет $|F_s^*|<f_{s0}$. С учетом (12) это неравенство примет вид $|f_s^*|<f_{s0}$, аналогичный (7). Это означает, что необходимые и достаточные условия реализуемости неголономных связей силами кулонова трения в рассматриваемых системах совпадают.

Поступила 19 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
2. *Новожилов И. В.* Условия застоя в системах с кулоновым трением. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
3. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 31, № 3.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.