

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ
ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. И. МИНАКОВА

(Ростов-на-Дону)

Исследуется численно задача устойчивости для полой сферической вязкоупругой оболочки с защемленным краем, испытывающей действие равномерного внешнего давления. Рассчитывается критическое значение времени для различных давлений и для оболочек с различными геометрическими параметрами. Делаются выводы об определении верхних критических значений равномерно распределенных постоянных нагрузок для оболочки из вязкоупругого материала.

1. Общие уравнения для прогиба сферического вязкоупругого купола выводятся из уравнений, описывающих процесс выпучивания упругой оболочки при помощи принципа соответствия. Уравнения для случая осесимметричной деформации упругой оболочки имеют следующий вид:

$$(1.1) \quad x^2 \varphi'' + x \varphi' - \varphi = \kappa x \vartheta (x + \vartheta / 2)$$

$$(1.2) \quad \kappa \xi^{-1} (x^2 \vartheta'' + x \vartheta' - \vartheta) = x \varphi (x + \vartheta) + p_0 x^3 / 2$$

Жесткой заделке соответствуют граничные условия

$$(1.3) \quad \vartheta = 0, \quad w = 0, \quad \varphi' = \nu \varphi / x \quad \text{при } x = \lambda$$

Здесь безразмерные величины введены при помощи соотношений

$$\vartheta = \frac{\lambda a}{2H} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varphi = \frac{12(1-\nu_0^2)a}{\lambda E h^3} \psi, \quad p_0 = \frac{4q}{q_0}, \quad q_0 = \frac{32E_0 H^3 h}{\lambda^2 a^4}$$

$$\lambda = 2[3(1-\nu_0^2)]^{1/4} \left(\frac{H}{h} \right)^{1/2}, \quad x = \frac{\lambda r}{a}, \quad \kappa = \frac{E}{E_0}, \quad \xi = \frac{(1-\nu^2)}{(1-\nu_0^2)}$$

где H — высота в центре оболочки, a — радиус основания, h — толщина оболочки, w — вертикальный прогиб оболочки, ψ — функция напряжения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, E_0 , ν_0 — постоянные. Свойства материала описываются κ , ξ .

При исследовании вязкоупругой задачи будем считать, что величина модуля объемного сжатия оболочки K^* не зависит от времени, модуль Юнга E заменяется интегральным оператором с ядром $E(\tau)$. Ядро, соответствующее коэффициенту Пуассона, может быть найдено по формуле

$$(1.4) \quad \nu(\tau) = (1 - E(\tau) / 3k^*) / 2$$

где $\tau = kt$ — безразмерное время, оператор $E(\tau)$ определяется соотношением

$$(1.5) \quad E(\tau)M = E_0 \left[M - \gamma \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} M(s) ds \right]$$

Здесь $E_0 = E(0)$ — мгновенный модуль упругости, γ — постоянная величина. Из (1.4), (1.5) имеем

$$(1.6) \quad \nu(\tau)M = \nu_0 \left[M + f \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} M(s) ds \right], \quad \nu_0 = \nu(0), \quad f = \gamma(1 - 2\nu_0) / 2\nu_0$$

Тогда получим вязкоупругие операторы

$$(1.7) \quad \kappa(\tau)M = M - \gamma \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} M(s) ds$$

$$(1.8) \quad \xi(\tau)M = M - \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} [d + g(\tau-s)] M(s) ds$$

$$d = 2f\nu_0^2 / (1 - \nu_0^2), \quad g = f^2\nu_0^2(1 - \nu_0^2)^{-1}$$

Операторы $\kappa(\tau)$, $\xi(\tau)$, $\nu(\tau)$ могут быть представлены в дифференциальной форме

$$(1.9) \quad \kappa(p) = (p + \beta) / (p + 1), \quad \beta = 1 - \gamma$$

$$(1.10) \quad \xi(p) = (p^2 + ap + b) / (p^2 + 2p + 1), \quad a = 2(1 - \delta\nu_0^2) / (1 - \nu_0^2)$$

$$b = (1 - \delta^2\nu_0^2) / (1 - \nu_0^2), \quad \delta = \beta + \gamma / 2\nu_0,$$

$$\nu(p) = \nu_0(p + \delta) / (p + 1), \quad p = \partial / \partial \tau$$

В системе уравнений (1.1), (1.2) положим $\Phi = \kappa\Phi$ и учтем, что справедливо следующее: операторы κ и ξ перестановочны; если $\kappa\Phi = 0$, то $\Phi = 0$; если $\kappa Q = p_0$, то $Q = p_0(1 - \gamma e^{-\beta\tau}) / \beta$.

В результате система уравнений (1.1), (1.2) и граничные условия (1.3) примут вид

$$(1.11) \quad L\Phi = -x\vartheta \left(x + \frac{\vartheta}{2} \right), \quad L = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} - 1$$

$$(1.12) \quad L\vartheta = \xi x \Phi(x + \vartheta) + \xi p_0 x^3 (1 - \gamma e^{-\beta\tau}) / 2\beta$$

$$(1.13) \quad \vartheta(\lambda, \tau) = 0, \quad w(\lambda, \tau) = 0, \quad \Phi'(\lambda, \tau) = \nu\Phi(\lambda, \tau) / \lambda$$

Прогиб в центре оболочки $w(\tau)$ определяется следующим выражением:

$$w(\tau) = - \int_0^\lambda \vartheta(x, \tau) dx$$

Для определения критического значения времени необходимо построить график функции $w(\tau) / w_0$, где $w_0 = w(0)$.

2. В соотношениях (1.11) — (1.13) выбираем операторы $\xi(\tau)$, $\nu(\tau)$ в дифференциальной форме (1.10), тогда получим

$$(2.1) \quad L\Phi = -x\vartheta(x + \vartheta / 2)$$

$$(2.2) \quad L(\vartheta'' + 2\vartheta' + \vartheta) = b x \Phi(x + \vartheta) + a x \Phi'(x + \vartheta) + a x \Phi \vartheta' +$$

$$+ x \Phi''(x + \vartheta) + 2x \Phi' \vartheta' + x \Phi \vartheta'' + p_0 b x^3 / 2\beta + p_0 \gamma e^{-\beta\tau} (-b + a\beta - \beta^2) x^3 / 2\beta$$

$$(2.3) \quad w(\lambda, \tau) = 0, \quad \vartheta(\lambda, \tau) = 0, \quad \Phi''(\lambda, \tau) + \Phi'(\lambda, \tau) =$$

$$= \nu_0 [\Phi'(\lambda, \tau) + \delta \Phi(\lambda, \tau)] / \lambda$$

$$(2.4) \quad \vartheta(0, \tau) = 0, \quad \Phi(0, \tau) = 0, \quad ()' = \partial / \partial x (), \quad () \dot{=} \partial / \partial \tau ()$$

Уравнения (2.1), (2.2) являются нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными второго порядка по времени. Для определения начальных условий $\vartheta(x, 0)$, $\vartheta'(x, 0)$, $\Phi(x, 0)$, $\Phi'(x, 0)$ в соотношениях (1.11) — (1.13) операторы $\nu(\tau)$, $\xi(\tau)$ представим в интегральной форме (1.6), (1.8) и полагаем $\tau = 0$. Тогда $\vartheta(x, 0)$, $\Phi(x, 0)$ могут быть най-

дены из следующей краевой задачи:

$$(2.5) \quad L\Phi = -x\vartheta(x+\vartheta/2), \quad L\vartheta = x\Phi(x+\vartheta) + p_0 x^3/2 \\ \vartheta(\lambda, 0) = 0, \quad \Phi'(\lambda, 0) = v_0 \Phi(\lambda, 0)/\lambda, \quad w(\lambda, 0) = 0, \quad \vartheta(0, 0) = 0, \quad \Phi(0, 0) = 0$$

Дифференциальные уравнения и граничные условия для $\vartheta(x, 0)$, $\Phi(x, 0)$ получаются в результате дифференцирования соотношений (1.11) — (1.13) по времени τ . При этом, как указывалось выше, для $\xi(\tau)$, $v(\tau)$ используются интегральные представления (1.6), (1.8)

$$(2.6) \quad L\Phi' = -x\vartheta'(x+\vartheta), \quad L\vartheta' = x\Phi\vartheta' = \Phi'x(x+\vartheta) - dx\Phi(x+\vartheta) + p_0(\gamma-d)x^3/2 \\ \vartheta'(0, 0) = 0, \quad \Phi'(0, 0) = 0, \quad w'(\lambda, 0) = 0, \quad \vartheta'(\lambda, 0) = 0 \\ \Phi'(\lambda, 0) = v_0[\Phi' + f\Phi(\lambda, 0)]/\lambda$$

Здесь $\vartheta(x, 0)$, $\Phi(x, 0)$ — решения задачи (2.5).

3. Сведем краевую задачу для системы дифференциальных уравнений с частными производными (2.1) — (2.4) к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разобьем радиус основания оболочки на N равных частей точками $x_i = (i-1)\Delta$ ($i=1, 2, \dots, N+1$), $\Delta = \lambda/N$.

Будем аппроксимировать производные по x с помощью формул центральных разностей. Тогда уравнения (2.1), (2.2) и граничные условия (2.3), (2.4) заменяются следующими уравнениями:

$$(3.1) \quad L_\Delta \Phi = -x_i \vartheta_i(x_i + \vartheta_i/2) \quad (i=2, \dots, N+1)$$

$$(3.2) \quad L_\Delta H = bx_i \Phi_i(x_i + \vartheta_i) + ax_i \Phi_i'(x_i + \vartheta_i) + a x_i \Phi_i \vartheta_i' + x_i \Phi_i''(x_i + \vartheta_i) + \\ + 2x_i \Phi_i' \vartheta_i' + x_i \Phi_i \vartheta_i'' + p_0 b x_i^3 / 2\beta + p_0 \gamma e^{-\beta \tau} x_i^3 (-b + a\beta - \beta^2) / 2\beta \quad (i=2, \dots, N)$$

$$(3.3) \quad w_{N+1} = 0, \quad \vartheta_{N+1} = 0, \quad \Phi_{N+2} + \Phi_{N+2} = \Phi_N + \Phi_N + 2v_0 \Delta (\Phi_{N+1} + \delta \Phi_{N+1}) / \lambda \\ \vartheta_1 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad L_\Delta \equiv m_i ()_{i-1} - n_i ()_i + r_i ()_{i+1} \\ r_i = (i-1)(i-0.5), \quad m_i = (i-1)(i-1.5), \quad n_i = 2(i-1)^2 + 1, \quad H_i = \vartheta_i'' + 2\vartheta_i' + \vartheta_i$$

Аналогично для краевых задач (2.5), (2.6) получим аппроксимирующие разностные схемы. Дополнительная точка $x = (\lambda + \Delta)$ для удобства введена

$$(3.4) \quad L_\Delta \Phi = -x_i \vartheta_i(x_i + \vartheta_i/2) \quad (i=2, \dots, N+1)$$

$$(3.5) \quad L_\Delta \vartheta = x_i \Phi_i(x_i + \vartheta_i) + p_0 x_i^3 / 2 \quad (i=2, \dots, N)$$

$$(3.6) \quad \vartheta_{N+1} = 0, \quad w_{N+1} = 0, \quad \Phi_{N+2} = \Phi_N + 2v_0 \Delta \Phi_{N+1} / \lambda, \quad \vartheta_1 = 0, \quad \Phi_1 = 0$$

$$(3.7) \quad L_\Delta \Phi' = -x_i \vartheta_i'(x_i + \vartheta_i) \quad (i=2, \dots, N+1)$$

$$(3.8) \quad L_\Delta \vartheta' = x_i \Phi_i \vartheta_i' + \Phi_i' x_i(x_i + \vartheta_i) - dx_i \Phi_i(x_i + \vartheta_i) + p_0(\gamma-d)x_i^3/2 \quad (i=2, \dots, N)$$

$$(3.9) \quad \vartheta_{N+1} = 0, \quad w_{N+1} = 0, \quad \Phi_{N+2} = \Phi_N + 2v_0 \Delta (\Phi_{N+1} + f\Phi_{N+1}); \quad \vartheta_1' = 0, \quad \Phi_1' = 0$$

4. Для численного интегрирования уравнений (3.1) — (3.3) используем метод, который является обобщением метода [1]. Для нахождения решения задачи с помощью указанного метода в момент времени $\tau = \tau_{k+1} = (k+1)h$ по известному решению в предшествующий момент времени $\tau_k = kh$ используем формулы

$$(4.1) \quad \vartheta_{i,k+1/2} = A_{1,i}(\vartheta) + m \vartheta_{i,k+1/2}, \quad \vartheta_{i,k+1/2} = A_{2,i}(\vartheta) + n \vartheta_{i,k+1/2}$$

$$(4.2) \quad \vartheta_{i,k+1} = A_{3,i}(\vartheta) + m_1 \vartheta_{i,k+1}, \quad \vartheta_{i,k+1} = A_{4,i}(\vartheta) + n_1 \vartheta_{i,k+1}$$

$$A_{1,i}(\vartheta) = \vartheta_{i,k} + 1/2 h \vartheta_{i,k}' + 1/12 h^2 \vartheta_{i,k}'', \quad A_{2,i}(\vartheta) = \vartheta_{i,k} + 1/4 h \vartheta_{i,k}'$$

$$(4.3) \quad m = h^2/24, \quad n = h/4, \quad m_1 = 0, \quad n_1 = h/6$$

$$A_{3,i}(\vartheta) = \vartheta_{i,k} + h\vartheta_{i,k}^{(1)} + \frac{1}{6}h^2\vartheta_{i,k}^{(2)} + \frac{1}{3}h^2\vartheta_{i,k+1/2}^{(2)}, \quad A_{4,i}(\vartheta) = \vartheta_{i,k} + \frac{1}{6}h\vartheta_{i,k}^{(2)} + \frac{2}{3}h\vartheta_{i,k+1/2}^{(2)}$$

$$(4.4) \quad \Phi_{i,k+1/2} = A_{1,i}(\Phi) + m\Phi_{i,k+1/2}^{(2)}, \quad \Phi_{i,k+1/2}^{(1)} = A_{2,i}(\Phi) + n\Phi_{i,k+1/2}^{(2)}$$

$$(4.5) \quad \Phi_{i,k+1} = A_{3,i}(\Phi) + m_1\Phi_{i,k+1}^{(2)}, \quad \Phi_{i,k+1}^{(1)} = A_{4,i}(\Phi) + n_1\Phi_{i,k+1}^{(2)}$$

$m, m_1, n, n_1, A_{ji}(\Phi), j=1 \div 4$ определены формулами (4.3), $\vartheta_{i,k} = \vartheta_i(kh), \Phi_{i,k} = \Phi_i(kh), h$ — малое приращение времени.

В вычислениях используется промежуточный шаг $\tau = (k+1/2)h$. Метод обладает погрешностью пятого порядка относительно шага интегрирования.

Для определения решения задачи по формулам (4.1) — (4.5) необходимо вычислять в промежуточной точке $\tau = (k+1/2)h$ — $\vartheta_{i,k+1/2}, \Phi_{i,k+1/2}^{(1)}, \Phi_{i,k+1/2}^{(2)}$, в точке $\tau = (k+1)h$ — $\vartheta_{i,k+1}, \Phi_{i,k+1}^{(1)}, \Phi_{i,k+1}^{(2)}$. Значения $\vartheta_{i,k+1/2}, \Phi_{i,k+1/2}^{(1)}, \Phi_{i,k+1/2}^{(2)}$ могут быть найдены из следующих соотношений:

$$(4.6) \quad L_{\Delta}\Phi_{k+1/2}^{(2)} = -x_i\vartheta_{i,k+1/2}^{(2)} [x_i + A_{1,i}(\vartheta) + 2nA_{2,i}(\vartheta)] -$$

$$-x_i(m+n^2)(\vartheta_{i,k+1/2}^{(2)})^2 - x_iA_{2,i}^2(\vartheta) \quad (i=2, \dots, N+1)$$

$$L_{\Delta}\vartheta_{k+1/2}^{(2)} - x_i\vartheta_{i,k+1/2}^{(2)} \left\{ \Phi_{i,k+1/2}^{(2)} \frac{[2(m+amn+n^2)+bm^2]}{(1+m+2n)} + \right.$$

$$\left. + \frac{[A_{1,i}(\Phi)(1+an+mb) + A_{2,i}(\Phi)(am+2n)]}{(1+m+2n)} \right\} = \frac{1}{(1+m+2n)}$$

$$\{ [(x_i + A_{1,i}(\vartheta))(1+an+bm) + A_{2,i}(\vartheta)(am+2n)] x_i \Phi_{i,k+1/2}^{(2)} +$$

$$+ x_i [x_i + A_{1,i}(\vartheta)] [bA_{1,i}(\Phi) + aA_{2,i}(\Phi)] + A_{2,i}(\vartheta) x_i [aA_{1,i}(\Phi) +$$

$$+ 2A_{2,i}(\Phi)] - L_{\Delta} [A_{1,i}(\vartheta) + 2A_{2,i}(\vartheta)] + p_0 x_i^3 [b - \gamma e^{-\beta\tau} (b - \alpha\beta + \beta^2)] / 2\beta \}$$

$$\vartheta_{1,k+1/2}^{(2)} = 0, \quad \Phi_{1,k+1/2}^{(2)} = 0, \quad w_{N+1,k+1/2} = 0, \quad \vartheta_{N+1,k+1/2}^{(2)} = 0 \quad (i=2, \dots, N)$$

$$\Phi_{N+2,k+1/2}^{(2)} = \Phi_{N,k+1/2}^{(2)} + \frac{2\Delta v_0}{\lambda} \frac{(1+\delta n)}{(1+n)} \Phi_{N+1,k+1/2}^{(2)} + \left\{ \frac{2\Delta\delta v_0}{\lambda} A_{2,N+1}(\Phi) - \right.$$

$$\left. - A_{2,N+2}(\Phi) + A_{2,N}(\Phi) \right\} (n+1)^{-1}$$

Уравнения (4.6) получены из соотношений (3.1) — (3.3) в результате подстановки формул (4.1), (4.3), (4.4). При этом предварительно необходимо уравнения (3.1), (3.3) продифференцировать дважды по τ (третье условие из (3.3) дифференцируется один раз по τ). Для нахождения значений $\vartheta_{i,k+1}^{(2)}, \Phi_{i,k+1}^{(2)}$ вновь обратимся к соотношениям (4.6), заменив в них m на m_1, n на $n_1, A_{1,i}$ на $A_{3,i}, A_{2,i}$ на $A_{4,i}$.

Для начала интегрирования в момент времени $\tau=0$ необходимо знать $\vartheta_{i,0}, \vartheta_{i,0}^{(1)}, \vartheta_{i,0}^{(2)}, \Phi_{i,0}, \Phi_{i,0}^{(1)}, \Phi_{i,0}^{(2)}$. Из уравнений (3.4) — (3.9) могут быть найдены $\vartheta_{i,0}, \Phi_{i,0}, \vartheta_{i,0}^{(1)}, \Phi_{i,0}^{(1)}$. Уравнения для вычисления $\vartheta_{i,0}^{(2)}, \Phi_{i,0}^{(2)}$ получим из

(3.1) — (3.3) при $\tau=0$, предварительно продифференцировав по τ уравнения (3.1) и (3.3), как указывалось выше, тогда будем иметь

$$(4.7) \quad L_{\Delta} \Phi_0'' - x_i \vartheta_{i,0}'' (x_i + \vartheta_{i,0}) - x_i (\vartheta_{i,0}')^2 \quad (i=2, \dots, N+1)$$

$$L_{\Delta} \vartheta_0'' - x_i \Phi_{i,0} \vartheta_{i,0}'' = -x_i (x_i + \vartheta_{i,0}) \Phi_{i,0}'' - L_{\Delta} (2\vartheta' + \vartheta)_0 +$$

$$+ b x_i (x_i + \vartheta_{i,0}) \Phi_{i,0} + a x_i (x_i + \vartheta_{i,0}) \Phi_{i,0}' + a x_i \Phi_{i,0} \vartheta_{i,0}' + 2 x_i \Phi_{i,0}' \vartheta_{i,0}' +$$

$$+ p_0 x_i^3 (b + a\gamma - \gamma\beta) / 2 \quad (i=2, \dots, N), \quad \vartheta_{1,0}'' = 0, \quad \Phi_{1,0}'' = 0, \quad w_{N+1,0}'' = 0, \quad \vartheta_{N+1,0}'' = 0$$

$$\Phi_{N+2,0}'' = \Phi_{N,0}'' + \Phi_{N,0}' - \Phi_{N+2,0}' + 2\Delta v_0 (\Phi_{N+1,0}'' + \delta \Phi_{N+1,0}') / \lambda$$

Далее, если задана величина давления $p_0 = \text{const}$, то решение систем нелинейных алгебраических уравнений (3.4) — (3.6), (3.7) — (3.9), (4.6), (4.7) может быть определено с помощью метода нелинейной релаксации [2].

Так, например, для решения системы уравнений (3.4) — (3.6) методом нелинейной релаксации необходимо записать систему уравнений невязок

$$(4.8) \quad R_i = r_i \Phi_{i+1} - n_i \Phi_i + m_i \Phi_{i-1} + x_i \vartheta_i (x_i + \vartheta_i / 2) \quad (i=2, \dots, N+1)$$

$$(4.9) \quad S_i = r_i \vartheta_{i+1} - n_i \vartheta_i + m_i \vartheta_{i-1} - x_i \Phi_i (x_i + \vartheta_i) - p_0 x_i^3 / 2 \quad (i=2, \dots, N)$$

Далее задача состоит в последовательном уменьшении невязок от некоторой данной величины до нуля с помощью соответствующих уравнений релаксации

$$(4.10) \quad dR_i = -n_i d\Phi_i \quad (i=2, \dots, N+1), \quad dS_i = -(n_i + x_i \Phi_i) d\vartheta_i \quad (i=2, \dots, N)$$

Уравнения (4.10) получились простым дифференцированием (4.8), (4.11) соответственно по Φ_i , ϑ_i и, как указывалось в работе [2], их можно интерпретировать как изменения невязок dR_i и dS_i , вызванные изменением значений функций Φ_i и ϑ_i в точке i соответственно на $d\Phi_i$ и $d\vartheta_i$. Решение считалось найденным, когда изменения значений функций Φ_i и ϑ_i по абсолютной величине после полного прохода становились достаточно малыми (например, меньше 10^{-6} — 10^{-8}). Аналогично определялось решение всех перечисленных выше систем нелинейных алгебраических уравнений.

Необходимо отметить, что метод нелинейной релаксации сходится независимо от выбора начальных данных, и скорость сходимости метода достаточно высока. Применение метода нелинейной релаксации для решения системы (3.4) — (3.6) с использованием метода последовательных нагружений позволяет исследовать задачу устойчивости упругой сферической оболочки, т. е. определить верхнюю и нижнюю критические нагрузки для мгновенно упругого состояния.

Действительно, изменяя значение параметра нагрузки p_0 от нуля с некоторым постоянным шагом Δp_0 , например $\Delta p_0 = 0.1$, в результате решения задачи (3.4) — (3.6) методом нелинейной релаксации можем получать соответствующее значение прогиба в центре оболочки — w_0 . То значение p_0 , при котором происходит резкое увеличение прогиба w_0 , принимаем за верхнюю критическую нагрузку. Далее, вновь изменяем значение параметра нагрузки, но уже с отрицательным шагом ($-\Delta p_0$).

Значение p_0 , при котором величина w_0 резко уменьшается, является нижним критическим значением нагрузки. Кривая нагружения $p_0 - w_0$ для

предельно упругого состояния оболочки ($\tau \rightarrow \infty$) была рассчитана с помощью следующей системы дифференцированных уравнений:

$$(4.11) \quad L\vartheta = x\Phi(x+\vartheta)(1-d-g) + p_0x^3 \frac{(1-d-g)}{2\beta}, \quad L\Phi = -x\vartheta \left(x + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

с граничными условиями

$$(4.12) \quad \vartheta(\lambda) = 0, \quad w(\lambda) = 0, \quad \Phi'(\lambda) = \nu_0(1+f)\Phi(\lambda)/\lambda$$

Решение задачи (4.11)–(4.12) выполнялось так же, как и решение задачи (2.5).

5. Рассмотрим результаты расчетов. Примем $\nu_0 = 0.341$, $E_0 = 0.4516 \cdot 10^{10}$ н/м², $k = 9.76$ 1/сек, $k^* = 0.472 \cdot 10^{10}$ н/м², $\gamma = 0.15$. В численных расчетах, проведенных в данной работе, полагалось $\Delta = 0.25$. Найдено, что решения для ϑ и Φ устойчивы и сходятся, если выбрать $h = 0.05$.

Программа вычислений была написана на языке «АЛГОЛ-60».

Кривые нагружения $p_0 - w_0$ для начально-упругих характеристик материала ($\tau = 0$) и для предельно упругого состояния оболочки ($\tau \rightarrow \infty$) для $\lambda = 3.636$ и $\lambda = 7.000$ изображены соответственно на фиг. 1 и 2. Графики функций $w(\tau)/w_0$ при различных величинах давления приведены на фиг. 3 для $\lambda = 3.636$, на фиг. 4 для $\lambda = 7$.

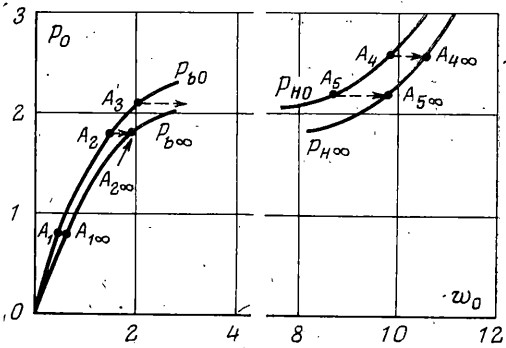
На фиг. 1 и 2 отмечены точками p_{H0} , p_{b0} соответственно нижняя и верхняя критические нагрузки для мгновенно-упругого состояния, $p_{H\infty}$, $p_{b\infty}$ — нижняя и верхняя критические нагрузки для предельно-упругого состояния.

При различных значениях внешней нагрузки будем иметь различный характер поведения оболочки. Пусть $\lambda = 3.636$.

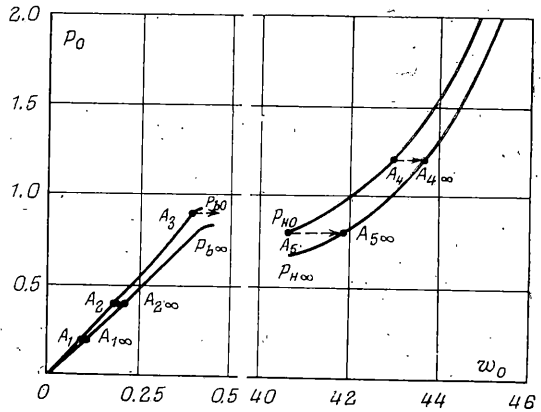
1. Если $0 < p_0 < p_{b\infty}$, то процесс деформации оболочки в квазистатической постановке можно представить следующим образом. В начальный момент времени оболочки под действием нагрузки принимают одну из устойчивых форм равновесия, например, при $p_0 = 0.8$ (т. е. величина давления составляет $0.35 p_{b0}$) — форму A_1 , при $p_0 = 1.8$ ($0.8 p_{b0}$) — форму A_2 .

В последующие моменты времени происходит ее вязкоупругая деформация и при $\tau \rightarrow \infty$ оболочка переходит в форму равновесия соответственно $A_{1\infty}$ или $A_{2\infty}$ (фиг. 1). Соответствующие графики зависимости $w(\tau)/w_0$ даны на фиг. 3 (кривые 1, 2). Таким образом, в данном случае имеем плавное изменение напряженно-деформированного состояния оболочки до некоторого предельного. Явлений, характерных для потери устойчивости оболочки, не имеем.

2. Если $p_{b\infty} < p_0 < p_{b0}$, например, $p_0 = 2.1 = 0.95 p_{b0}$, поведение оболочки имеет другой характер. Если в начальный момент оболочка принимает устойчивую форму A_3 , то дальнейшее развитие деформации происходит плавно в течение конечного времени τ^* , которое можно назвать критическим. По истечении этого времени имеет место хлопок оболочки и переход ее в новую форму. При $\tau > \tau^*$ процесс решения задачи расходится. Соответствующий график $w(\tau)/w_0$ на фиг. 3 изображен кривой 3.



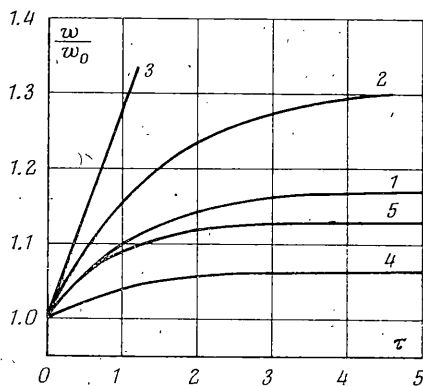
Фиг. 1



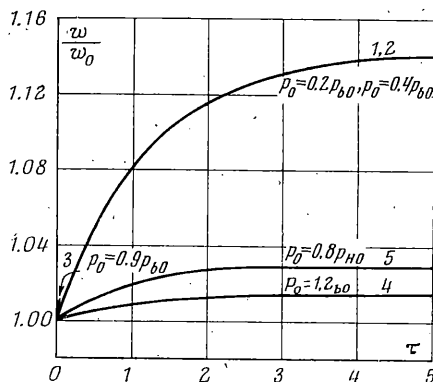
Фиг. 2

3. Если $p_0 > p_{b0}$, уже в начальный момент времени имеет место хлопок оболочки, перескок ее в форму равновесия A_4 , и вследствие вязкоупругости материала будет иметь место переход из формы равновесия A_4 в форму равновесия $A_{4\infty}$, соответствующую предельным характеристикам материала. Этот переход осуществляется за бесконечное время. На фиг. 3 соответствующая кривая 4 ($p_0 = 2.6 = 1.2 p_{b0}$).

4. Если p_0 принимает значения, достаточно близкие к p_{H0} , поведение оболочки под нагрузкой аналогично первому случаю: переход из формы равновесия A_5 в форму равновесия $A_{5\infty}$ совершается также за бесконечное время. Для $p_0 = 2.2$ ($p_{H0} = 2.1$)



Фиг. 3



Фиг. 4

соответствующая зависимость $w(\tau)/w_0$ изображена кривой 5. Аналогичные результаты получены и для случая $\lambda = 7$ (фиг. 2, 4).

Следовательно, верхнее критическое значение равномерно распределенной постоянной нагрузки для оболочки из вязкоупругого материала необходимо рассчитывать по предельно упругому состоянию, если оболочка должна работать существенно длительное время.

Если требуется ограниченная по времени эксплуатация оболочки, то оболочка может работать без хлопка при нагрузках, превышающих $p_{b\infty}$. В этом случае нагрузка должна назначаться в зависимости от времени, в течение которого должна иметь место эксплуатация оболочки, если известно, что критическое время изменяется монотонно, от ∞ до 0 при возрастании p_0 от $p_{b\infty}$ до p_{b0} .

Вопрос о вычислении запаса устойчивости оболочки должен решаться на основе статистических данных о разбросе начальных форм, внешних нагрузок и других факторов.

Автор благодарит И. И. Воровича за постановку задачи и ценные указания при ее выполнении.

Поступила 28 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fu C. C.* A method for the numerical integration of the equations of motion arising from a finite-element analysis. Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1970, т. 37, № 3.)
2. *Perrone N., Kao R.* A general nonlinear relaxation iteration technique for solving nonlinear problems in mechanics. Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech., 1971, vol. 38, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1971, т. 38, № 2.)