

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СФЕРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКЕ ПРИ СОУДАРЕНИИ С ПРЕГРАДОЙ

Р. А. ЧЕРЕДНИЧЕНКО

(Москва)

В предлагаемой работе численно исследуется процесс распространения упругих волн в сферической оболочке конечной толщины при соударении с преградой. Предполагается, что точки наружной поверхности оболочки вступают в контакт с плоской преградой при прохождении вертикального расстояния  $v_0 t$ , а остальная часть внешней границы и вся внутренняя свободны от напряжений. Оболочка является однородной, изотропной и обладает линейно-упругими свойствами, характеризующимися плотностью  $\rho$ , скоростью продольных волн  $a$ , скоростью поперечных волн  $b$ . В системе связанных сферических координат  $r, \theta, \varphi$  занимает область  $R \leq r \leq R_1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . В начальный момент времени  $t=0$  оболочка сталкивается с преградой с постоянной скоростью  $v_0$ , при этом предполагается, что в области контакта известны две компоненты вектора скорости точек поверхности, либо радиальная составляющая скорости и одна из компонент тензора напряжений. Предполагается также, что все функции не зависят от угла  $\varphi$ , т. е. выполняются условия осевой симметрии.

В работе [1] методом интегрального преобразования решена задача для упругого шарового слоя, находящегося под осесимметричным нагружением, а анализ выражений для перемещений и деформаций в точках оси симметрии проведен численно.

Уравнения линейной динамической теории упругости в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  в случае осесимметричной деформации имеют вид

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \sigma_{rr} &= \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2\mu \frac{u_r}{r} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + 2(\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

где  $u_r(r, \theta, t), u_\theta(r, \theta, t)$  — перемещения в направлениях  $r$  и  $\theta$ , а  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\varphi\varphi}, \tau_{r\theta}$  — компоненты тензора напряжений.

Систему (1) приведем к безразмерному виду посредством введения безразмерных координат и функций

$$t^\circ = at/R, \quad r^\circ = r/R, \quad u^\circ(r^\circ, \theta, t^\circ) = a^{-1}u_r, \quad v^\circ(r^\circ, \theta, t^\circ) = a^{-1}u_\theta, \quad p = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2\rho a^2}$$

$$q = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2\rho a^2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\rho a^2}, \quad \tau = \frac{\tau_{r\theta}}{\rho a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Такое преобразование позволяет получить эквивалентную (1) систему уравнений в частных производных первого порядка, которая описывает осесимметричную деформацию в сферической системе координат и принимает вид

$$(2) \quad \begin{aligned} u_t - p_r - q_r - \frac{1}{r} \tau_\theta &= \frac{^{3/2}q + ^{1/2}p - \sigma + \tau \operatorname{ctg} \theta}{r} \\ v_t - \frac{1}{r} p_\theta + \frac{1}{r} q_\theta - \tau_r &= \frac{3\tau + (^{1/2}p - ^{1/2}q - \sigma) \operatorname{ctg} \theta}{r} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} p_t - u_r - \frac{1}{r} v_\theta &= \frac{2\gamma^2 - 3}{2\gamma^2 - 2} \frac{u}{r} + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta \\ \gamma^2 q_t - u_r + \frac{1}{r} v_\theta &= -\frac{u}{r}, \quad \gamma^2 \tau_t - v_r - \frac{1}{r} u_\theta = -\frac{v}{r} \\ \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 - 2} \sigma_t - p_t &= \frac{3\gamma^2 - 4}{\gamma^2(\gamma^2 - 2)} \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{2\gamma^4 - \gamma^2 - 2}{2\gamma^2(\gamma^2 - 2)} \frac{u}{r} \end{aligned}$$

Здесь ноль в верхнем индексе у зависимых и независимых переменных ради простоты опущен, нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной, а  $\gamma = a/b$ . Выбор сферической системы координат связан с тем обстоятельством, что в этом случае границы оболочки совпадают с координатными поверхностями.

Систему (2) следует интегрировать в области  $\xi \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , где  $\xi = R_1 R^{-1}$ , при граничных условиях

$$(3) \quad u = v_0 \cos \theta, \quad v = -v_0 \sin \theta, \quad u = v_0 \cos \theta, \quad \tau = f(\sigma_{rr})$$

выражающих задание вектора скорости точек контактной поверхности  $r=1$  (либо задание радиальной составляющей вектора скорости и связи между касательным и нормальным напряжением) и нулевых начальных условий. Остальная часть наружной поверхности  $r=1$  и вся внутренняя поверхность  $r=\xi$  при  $t \geq 0$  свободны от напряжений, т. е.

$$(4) \quad p + q = 0, \quad \tau = 0$$

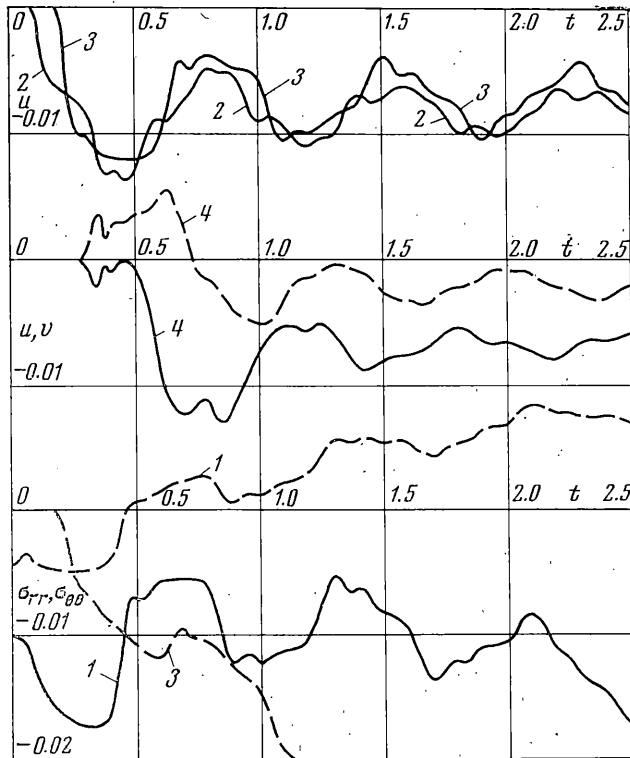
Алгоритм численного решения поставленной задачи (2) – (4) построен на основе метода пространственных характеристик и в принципе не отличается от алгоритма решения осесимметричной задачи [2]. Поэтому здесь приведем лишь окончательный вид расчетных формул, позволяющих получить решение с точностью  $O(k^3)$  в произвольной внутренней точке рассматриваемой области

$$\begin{aligned} \delta u - \frac{k}{r} \delta q &= \frac{k^2}{2r} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) v_{r\theta} + \frac{k^2}{2} \left( u_{rr} + \frac{1}{\gamma^2 r^2} u_{\theta\theta} \right) + \frac{k^3}{2r} \left( q_{rr} + \frac{1}{\gamma^2 r^2} q_{\theta\theta} \right) + \\ &+ k \left( p_r + q_r + \frac{1}{r} \tau_\theta \right) + \frac{k^2}{2r} \left( 1 - \frac{2}{\gamma^2} \right) u_r - \frac{k^2}{2\gamma^2 r^2} v_\theta + k \frac{^{3/2}q + ^{1/2}p - \sigma + \tau \operatorname{ctg} \theta}{r} \\ \delta v - \frac{k}{r} \delta \tau &= \frac{k^2}{2r} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) u_{r\theta} + \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2} v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} \right) + \frac{k^3}{2r} \left( \frac{1}{\gamma^2} \tau_{rr} + \frac{1}{r^2} \tau_{\theta\theta} \right) + \\ &+ k \left( \frac{1}{r} p_\theta - \frac{1}{r} q_\theta + \tau_r \right) + \frac{k^2}{2r^2} u_\theta - \frac{k^2}{2\gamma^2 r} v_r + k \frac{3\tau + (^{1/2}p - ^{1/2}q - \sigma) \operatorname{ctg} \theta}{r} \\ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \delta p - \frac{k}{2r} \delta u &= \frac{k^2}{r} \tau_{r\theta} + \frac{k^2}{2} \left( p_{rr} + q_{rr} + \frac{1}{r^2} p'_{\theta\theta} - \frac{1}{r^2} q_{\theta\theta} \right) + \frac{k^3}{4r} \left( 1 - \frac{2}{\gamma^2} \right) u_{rr} + \\ &+ \frac{k^3}{4r^3} u_{\theta\theta} + k \left( u_r + \frac{1}{r} v_\theta \right) + \frac{k^2}{r} \left( q_r + \frac{1}{r} \tau_\theta \right) + k \left( \frac{2\gamma^2 - 3}{2\gamma^2 - 2} \right) \frac{u}{r} + k \left( \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 \delta q + \frac{k}{2r} \delta u &= \frac{k^2}{2} \left( p_{rr} + q_{rr} - \frac{1}{r^2} p_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} q_{\theta\theta} \right) + \frac{k^3}{4r} \left( 1 - \frac{2}{\gamma^2} \right) u_{rr} - \frac{k^3}{4r^3} u_{\theta\theta} + \\ &+ k \left( u_r - \frac{1}{r} v_{\theta} \right) + \frac{k^2}{r} \left( q_r - \frac{1}{r} \tau_{\theta} \right) - \frac{k}{r} u \\ \delta \sigma - \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \delta p &= \frac{k}{2} \frac{3\gamma^2 - 4}{\gamma^2 (\gamma^2 - 1)} \frac{\delta v + 2v}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{k}{4} \frac{2\gamma^4 - \gamma^2 - 2}{\gamma^2 (\gamma^2 - 1)} \frac{\delta u + 2u}{r} \\ \gamma^2 \delta \tau + \frac{k}{2r} \delta v &= \frac{k^2}{r} p_{r\theta} + \frac{k^2}{2} \left( \tau_{rr} + \frac{1}{r^2} \tau_{\theta\theta} \right) - \frac{k^3}{4\gamma^2 r} \left( v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} \right) + \\ &+ k \left( v_r + \frac{1}{r} u_{\theta} \right) + \frac{k^2}{r} \left( \tau_r + \frac{1}{r} q_{\theta} \right) - \frac{k}{r} v \end{aligned}$$

Проиллюстрируем решение задачи об ударе сферической оболочки на примере, когда волновое поле возбуждается вектором скорости  $v_0 = 0.01$ , приложенным к точкам внешней поверхности  $r=1$ , при условии, что  $\gamma = 1.87$ ,  $\Delta r = \Delta \theta = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.0045$ ,  $\xi = 0.8$ . На графиках приведены результаты численного решения и дан его анализ.

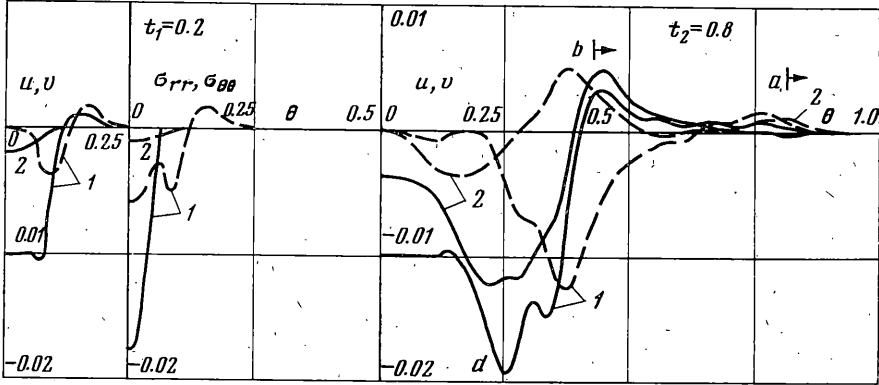
В начальный момент времени происходит образование контактной поверхности, размеры которой определяются величиной скорости соударения. Этим же определяется и характер волнового поля в окрестности оси



Фиг. 1

симметрии — большей скорости соответствует более близкий к плоскому передний фронт и наоборот.

Изменение скоростей и напряжений в зависимости от времени показано на фиг. 1 для точек оси симметрии 1 ( $r=1.0$ ), 2 ( $r=0.9$ ), 3 ( $r=0.8$ ) и точки внутренней поверхности 4 ( $r=0.8, \theta=0.25$ ). Передний фронт вначале вступает в невозмущенную область волной сжатия в окрестности оси симметрии и проходит через точку 2 в момент  $t=0.1$ , а в точке 3 появляется в момент  $t=0.2$ , причем амплитуда скорости достигает 1.2 ее ве-



Фиг. 2

личины в точке 1, в то время как в точке 2 в момент прохождения фронта она составляет 0.7 той же величины. От свободной границы передний фронт отразился волной растяжения, прошел через точку 2 ( $t=0.3$ ) и увеличил амплитуду скорости до 1.36, а в точке 1 в момент  $t=0.46$  изменил напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  (пунктир) на растягивающее и больше чем в два раза уменьшил сжимающее напряжение  $\sigma_{rr}$ , хотя до прихода фронта в окрестности точки 1 происходило увеличение сжимающих напряжений, так  $\sigma_{rr}$  увеличилось в 1.76 раза.

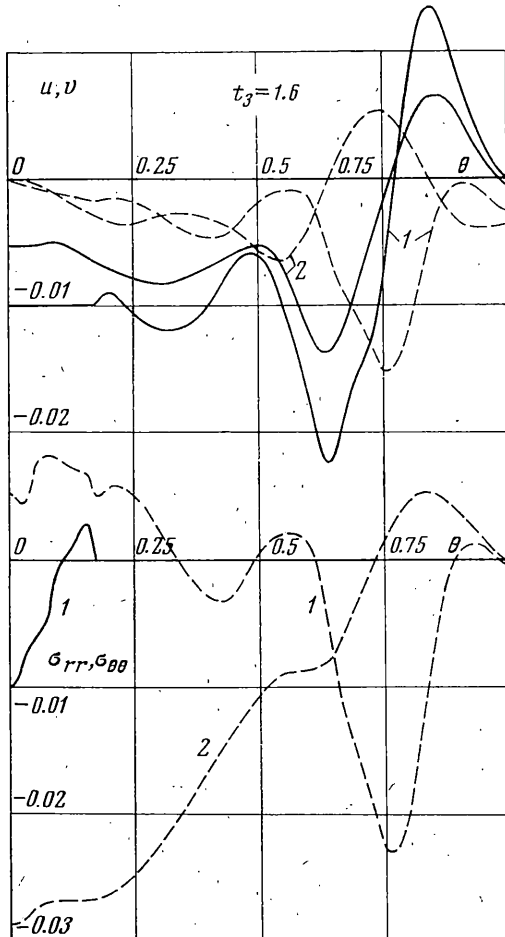
Передний фронт вторично воздействует на внутреннюю поверхность в точке 3 в момент  $t=0.6$ , уменьшив амплитуду скорости в точке 2 до 0.9 ( $t=0.5$ ), а в точке 3 — до 0.4 ее величины в точке 1. Теперь он отражается от свободной поверхности волной сжатия и, возвратившись еще раз к внешней границе в момент  $t=0.8$ , увеличивает сжимающее напряжение  $\sigma_{rr}$  в точке 1 в два раза, а растягивающее напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  изменяется еще больше.

За интервал времени  $0 < t < 0.8$  прошел полный период изменения параметров волнового поля, и состояние приблизилось к исходному ( $t=0$ ). Отличие состоит лишь в том, что теперь перед фронтом волны сжатия находится возмущенная область. Волновой процесс в рассмотренных точках постепенно переходит в установившийся с периодом, равным 0.8, и весьма близок к одномерному. Однако удвоения скорости на внутренней поверхности не наблюдается, но если увеличить скорость соударения до 0.1 (что приведет к увеличению контактной поверхности на тот же момент времени), то отношение амплитуды скорости к начальному значению станет равным 1.8. Удвоение скорости получено численно в случае соударения цилиндрической оболочки (по образующей) с жесткой преградой со скоростью  $v_0=0.1$ .

Можно заметить, что переходной процесс соответствует 5—6 пробегам фронтом продольной волны толщины оболочки, а в дальнейшем устанавливаются затухающие колебания скорости около некоторого стационар-

ного состояния. В точке внутренней поверхности 3 наблюдается концентрация напряжений с коэффициентом, равным 2.5 при семи отражениях. Такой же колебательный характер изменения скоростей наблюдается и в точке 4. В окрестности оси симметрии, определяемой углом  $\theta \leq 0.25$ , установившийся волновой процесс весьма близок к одномерному, поскольку в этой области кривизна оболочки еще мало влияет на деформированное состояние.

Закономерности формирования и распространения волновых фронтов по оболочке можно проследить по распределению скоростей и напряжений точек внешней и внутренней поверхностей в моменты времени, указанные на фиг. 2 и 3. Так, в момент  $t_1=0.2$  на внешней поверхности (обозначено 1) в диапазоне  $\theta \leq 0.06$  выполняется условие контакта — заданы две составляющие вектора скорости, изменяющиеся линейно в силу малости угла  $\theta$ .

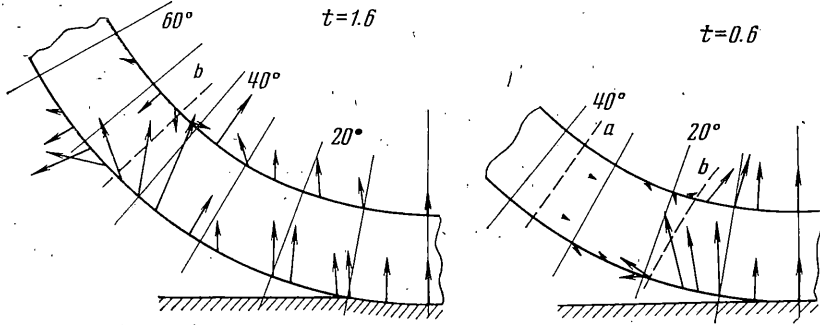


Фиг. 3

возмущениями охватываемая область  $\theta \leq 0.23$ , определяемая характером вступления граничных точек в контакт с преградой. В начальный момент времени. Переход от области сжатия к сверхзвуковой происходит в виде скачка скоростей. Скачок скорости, созданный разрывным граничным условием на внешней поверхности, уже к моменту  $t=0.05$  отрывается от точки перехода контакта к свободной границе, образуя волну поперечных возмущений. К моменту времени  $t_1$  передний фронт лишь только достиг точек внутренней границы. Заметим еще то обстоятельство, что обе скорости точек наружной поверхности на переднем фронте положительны, а нормальное напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  является растягивающим.

Распределение скоростей в момент  $t_2=0.8$  показывает, что передний фронт достиг угла  $\theta=0.8$  и в его окрестности наблюдается выпучивание оболочки подобно тому, как это происходит с полуполосой при ударе о жесткую преграду [3]. Отличие состоит в том, что там передний фронт распространяется в виде волны сжатия, а в оболочке — в виде волны растяжения, причем вектор скорости имеет направление, обратное направлению распространяющегося фронта. К моменту  $t=1.0$  положительной становится и радиальная скорость  $u$  для внутренних точек оболочки, а вектор скорости этих точек поворачивается при приближении к  $\theta=\pi/2$  в сторону вертикали и имеет одинаковое направление с вектором скорости точек внешней границы.

Фронт поперечного движения охватывает все точки поперечного сечения оболочки и поначалу (до  $t=0.7$ ) на внутренней поверхности он отстаёт, но уже к моменту  $t_2=0.8$  фронты волн на внутренней и внешней границах достигли одних и тех же углов  $\theta$ . Профили скоростей  $u$ ,  $v$  и напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  на фронте поперечной волны со временем меняются слабо. Амплитуды скоростей и напряжений на этом фронте на порядок больше по



Фиг. 4

сравнению с соответствующими амплитудами переднего фронта, а скорость распространения фронта поперечного движения примерно равна скорости распространения поперечных волн. Другие типы волн, участвующие в формировании волнового поля, наблюдаются как величины более высокого порядка малости.

Установившиеся колебания между поверхностью контакта и внутренней поверхностью распространяются также и по оболочке. Эти колебания особенно хорошо наблюдаются за фронтом поперечной волны в виде пересечений кривых для  $v$  к моментам  $t_2=0.8$  и  $t_3=1.6$ . Замечено, что распространение колебаний происходит со скоростью, несколько большей скорости перемещения фронта поперечной волны. Это приводит к тому, что колебание, возникающее при приходе первого отраженного фронта на поверхность контакта в момент  $t=0.4$ , постепенно догоняет фронт поперечной волны (отмечено  $d$  к моменту  $t_2$ ) и увеличивает амплитуду скоростей на этом фронте. Увеличение происходит до времени, соответствующего 8—9 пробегам, после чего начинается уменьшение амплитуд. Последовательное отражение переднего фронта от границ оболочки возбуждает затухающие колебания скоростей за фронтом поперечной волны, причем радиальные составляющие скорости слабо зависят от  $r$ . Сравнение распределений скоростей и напряжений показывает, что в окрестности фронта поперечной волны на внешней границе выполняется условие  $\sigma_{\theta\theta} \sim v$ . Так, в момент  $t_3=1.6$  это справедливо для  $0.5 \leq \theta \leq 0.85$ , но на внутренней поверхности пропорциональность существует между  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $v_{\theta}$ .

По распределению скоростей на фиксированные моменты времени построено поле векторов скорости точек внешней и внутренней поверхностей в моменты времени  $t_1=0.6$  и  $t_2=1.6$  и представлено на фиг. 4. В момент  $t_1$  показаны передний фронт (обозначено  $a$ ) и фронт поперечной волны (обозначено  $b$ ).

Характерно большое увеличение скорости точек внешней границы вблизи фронта поперечной волны с быстрым разворотом вектора скорости против часовой стрелки на самом фронте. Максимум скорости, образовавшийся на оси симметрии в момент прихода первого фронта на внутреннюю поверхность, со временем разделился на два симметричных и один из них

к моменту  $t_1$  переместился в окрестность угла  $\theta=10^\circ$ , образуя поперечную волну. На фронте этой волны вектор скорости делает разворот по часовой стрелке, а его величина быстро убывает почти на порядок и остается такой, как и во всех точках за передним фронтом.

На момент  $t_2$  показана область, которая охвачена поперечными волнами. Характерное увеличение скорости с быстрым разворотом и последующим уменьшением амплитуды перед фронтом этой волны наблюдается в диапазоне углов  $40^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$  на внешней и в окрестности угла  $\theta=40^\circ$  на внутренней границах.

При увеличении скорости соударения в оболочке формируются аналогичные волновые фронты. Например, скорости  $v_0=0.1$  соответствует увеличение амплитуд колебаний функций (в силу нелинейности задачи) почти на порядок. При расчетах получено увеличение амплитуд несколько большее, чем на порядок. Так, выше было отмечено, что скорость в точке оси симметрии увеличивается в 1.8 раза. На оси симметрии в точках контакта растягивающими становятся напряжения как  $\sigma_{\theta\theta}$ , так и  $\sigma_{rr}$  при первом воздействии переднего фронта, отраженного от свободной границы  $r=\xi$ . Увеличивается область между головной волной и фронтом волны сжатия, позже происходит отрыв поперечной волны. Эти отличия определяются увеличением контактной поверхности в сравниваемые моменты времени.

Но характерные особенности, связанные с распределением скоростей и напряжений на фронтах продольной и поперечной волн, остаются теми же. Сохраняется значительная концентрация напряжений на внутренней поверхности.

Алгоритм решения поставленной задачи позволяет легко перейти к рассмотрению плоской деформации для соударения цилиндрической оболочки своей образующей с преградой. В этом случае в окрестности оси симметрии поведение скоростей и напряжений наиболее близко приближается к плоскому одномерному случаю, и численным расчетом получается удвоение скорости точки внутренней поверхности. Механические эффекты, связанные с характером распространения волн, имеют место и в этом случае. Наблюдается полное совпадение периодов волновых процессов и хорошее качественное соответствие изменения амплитуд функций.

Рассмотрение второго типа граничных условий (4), когда задавался «гладкий удар» ( $\tau=0$ ) и «удар с трением» ( $\tau=0.05 \sigma_{rr}$ ), показало отклонения амплитуд скоростей и напряжений в пределах 10 процентов в первом случае и к 20 процентам — во втором по сравнению с первым типом граничных условий.

Уменьшение толщины оболочки приводит как к увеличению частоты колебаний, так и к значительным изменениям амплитуд скоростей и напряжений. Например, для скорости соударения  $v_0=0.01$  в случае  $\xi=0.9$  в точке оси симметрии на свободной поверхности сферической оболочки скорость достигает величины 1.44 по сравнению с 1.2 для  $\xi=0.8$ . И, наоборот, поскольку сжимающее напряжение  $\sigma_{rr}$  в точке контакта 1 монотонно увеличивается до прихода в эту точку первого отраженного фронта, то оно успевает достигнуть величины 1.68, а раньше увеличивалось до 1.76. В точках свободной поверхности на интервале первых пяти отражений максимальная концентрация кольцевых напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  уменьшается примерно в два раза.

Проведенный выше физический анализ большого количества численных результатов позволил систематически изучить влияние на динамику процесса таких факторов, как геометрические размеры конструкции, величина внешнего воздействия, характер граничных условий. Большие градиенты скоростей и напряжений на фронте поперечной волны могут привести к развитию остаточных деформаций или к разрушению оболочки в

окрестности этого фронта; на внутренней поверхности из-за значительной концентрации напряжений возможны откольные явления.

Автор благодарит С. С. Григоряна за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Поступила 12 II 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шипицина Е. М. Динамическая задача для незамкнутого шарового слоя под осесимметричным нагружением. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3.
2. Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А. Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению упругих волн. ПМТФ, 1971, № 4.
3. Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А. Применение метода пространственных характеристик к решению задачи о распространении волн в упругой полуполосе. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.