МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1975

УДК 539.3

ИЗГИБ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ НЕИЗОЛИРОВАННЫХ ПЛИТ НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

В. И. ТРАВУШ

(Москва)

Рассматривается изгиб круглых и кольцевых неизолированных плит, лежащих на линейно-деформируемом основании общего типа [1].

При решении задачи применяется модификация метода компенсирующих нагрузок: по линиям разрезов прикладываются компенсирующие нагрузки в виде специальным образом выбранных обобщенных функций с неизвестной плотностью, которая определяется из граничных условий.

1. Рассмотрим бесконечную плиту, лежащую на линейно-деформируемом основании, ядро которого можно представить в виде [1]

$$K(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty c(\lambda)\lambda J_0(\lambda r)\,d\lambda \tag{1.1}$$

Прогибы плиты $w(r,\theta)$ от нагрузки $q(r,\theta)$ определятся из решения системы, которая в безразмерных координатах имеет вид

$$\nabla\nabla w(r,\theta)=q(r,\theta)-p(r,\theta) \tag{1.2}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty K\left(\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)}\right)p(r_1,\theta_1)\,dr_1\,d\theta_1=w(r,\theta)$$

где $p(r,\theta)$ — реактивное давление, ∇ — оператор Лапласа в полярных координатах.

Расположим по линиям $r=r_i$ компенсирующую нагрузку, которую примем в виде

$$q_{ij}(r,\theta)=L_j^1(r,\theta)\left[A_{ij}(\theta)\delta(r-r_i)(2\pi r)^{-1}\right] \tag{1.3}$$

где $L_j^1(r,\theta)$ — некоторый оператор, $A_{ij}(\theta)$ — неизвестная функция, определяемая из граничных условий, $\delta(r-r_i)(2\pi r)^{-1}$ — дельта-функция в полярных координатах.

Пусть $q_0(r,\theta)$ — заданная нагрузка на плиту, тогда

$$q(r,\theta)=q_0(r,\theta)+\sum_{i=1}^k q_{ij}(r,\theta)\qquad (j=1,2) \tag{1.4}$$

Подставив (1.1) в (1.2) и учитывая формулу сложения для бесселевых функций, получим

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\int_0^{2\pi}\int_0^\infty c(\lambda)p_n(\theta_1)J_n(\lambda r)\cos n(\theta-\theta_1)\,d\lambda\,d\theta_1=w(r,\theta) \tag{1.5}$$

$$p_n(\theta_1)=\int_0^\infty p(r_1,\theta_1)r_1J_n(\lambda r_1)\,dr_1$$

Разложим функцию $w(r, \theta)$ в ряд Фурье, n-й член ряда которого имеет вид $w_n^c(r) \cos n\theta + w_n^s(r) \sin n\theta$, подставим его в (1.5), получим для симметричной составляющей $p_{n\lambda}^c = w_{n\lambda}^c c^{-1}(\lambda)$.

Представим нагрузку также в виде ряда Фурье. Учитывая (1.3), получим выражения для коэффициентов этого ряда

$$(1.6)\qquad q_{ijn}^{c}(r) = A_{ijn}^{c} L_{jn}(r) \left[\frac{\delta(r-r_i)}{2\pi r}\right]$$

Аналогичные выражения получаются для кососимметричной составляющей нагрузки.

В дальнейшем рассмотрим только симметричную составляющую нагрузки и, применив к первому уравнению из (1.2) после разложения в ряд Фурье по угловой координате прогиба и нагрузки, преобразование Ханкеля, получим

$$(1.7)\qquad W_{n\lambda} = \frac{Q_{0\lambda n} + \Sigma Q_{ij\lambda n}}{(n^2+\lambda^2)^2 + c^{-1}(\lambda)}, \qquad Q_{0\lambda n} = \int\limits_0^\infty q_0(r) r J_n(\lambda r) dr$$

Запишем вид функций $Q_{ij\lambda n}$

$$(1.8)\qquad Q_{ij\lambda n} = A_{ijn} \int\limits_0^\infty L_{jn}^1(r) [\delta(r-r_i)(2\pi r)^{-1}] J_n(\lambda r) r\, dr = A_{ijn} L_{jn} [J_n(\lambda r_i)]$$

Если в бесконечной плите образуется кольцевой пластический шарнир по радиусу r_i, то при $r=r_i$ радиальный момент от заданных внешних нагрузок и от прикладываемой нагрузки q_{i1} должен быть равен моменту текучести M_T. Если круглая плита соединена по радиусу $r=r_i$ с оставшейся частью шарниром, то

$$(1.9)\qquad L_1 w = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\right] w(r, \theta) = 0$$

$$L_{1n}(r) = \frac{d^2}{dr^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)$$

При свободном опирании плит добавляется граничное условие

$$L_2 w = \left[\frac{\partial}{\partial r}\Delta w + (1-\nu)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\, \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right] = 0$$

В этом случае

$$(1.10)\qquad Q_{i1\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{i1n}\{[(1-\nu)(n^2+n) r_i^{-2} - \lambda^2] J_n(\lambda r_i) -$$

$$-(1-\nu)\lambda r_i^{-1} J_{n+1}(\lambda r_i)\} \cos n\theta$$

$$Q_{i2\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{i2n}\{[\lambda^3 + (1-\nu) n^2 \lambda r_i^{-2}] J_{n+1}(\lambda r_i) -$$

$$-[\lambda^2 n + (1-\nu)(n^2+n^3) r_i^{-3}] J_n(\lambda r_i)\} \cos n\theta$$

Подставив $Q_{0\lambda n}$ и (1.8) в (1.7) и произведя обратное преобразование, найдем прогиб плиты $w(r, \theta)$.

Если функции $Q_{ij\lambda}$ имеют вид (1.10), а $w_\infty(r,\theta)$ — прогиб в бесконечной плите, то

(1.11) $$w(r,\theta)=w_\infty(r,\theta)-\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}A_{i1n}[T_{3nn}-(1-\nu)(n^2+n)r_i^{-2}T_{1nn}+$$

$$+(1-\nu)r_i^{-1}T_{2,n+1,n}]\cos n\theta+\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}A_{i2n}[T_{4,n+1,n}+(1-\nu)r_i^{-2}T_{2,n+1,n}-$$

$$-nT_{3nn}-(1-\nu)(n^3+n^2)r_i^{-3}T_{1nn}]\cos n\theta$$

(1.12) $$T_{j\mu\nu}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda^jJ_\mu(\lambda r_i)J_\nu(\lambda r)}{(n^2+\lambda^2)^2+c^{-1}(\lambda)}d\lambda$$

Произвольные постоянные A_{ijn} можно определить, удовлетворив граничным условиям при $r=r_i$.

2. Вычислим интегралы (1.19). Для основания, описываемого моделью Винклера, $c^{-1}(\lambda)=1$. Применяя контурное интегрирование, получим при $r\leqslant r_i$

$$T_{j\mu\nu}=-\frac{1}{4}\left[\eta_{\mu\nu}\cos(j-3)\frac{\pi}{4}+\varepsilon_{\mu\nu}\sin(j-3)\frac{\pi}{4}\right]+M_{j\mu\nu}\cos(j+\nu-\mu)\frac{\pi}{2}$$

$$\eta_{\mu\nu}=g_\mu(\rho r_i)u_\nu(r)+f_\mu(\rho r_i)v_\nu(r),\qquad \rho=\sqrt[4]{\eta^4+1}$$

(2.1) $$\varepsilon_{\mu\nu}=f_\mu(\rho r_i)u_\nu(r)-g_\mu(\rho r_i)v_\nu(r),\qquad \varphi=\operatorname{arctg} n^{-2}$$

$$u_\nu(\rho r_i)=\operatorname{Re}J_\nu(r_i\rho e^{i\varphi}),\qquad v_\nu(\rho r_i)=\operatorname{Im}J_\nu(r_i\rho e^{i\varphi}),\qquad f_\nu(\rho r_i)=\operatorname{Re}H_\nu^{(1,2)}(r_i\rho e^{i\varphi})$$

$$g_\nu(\rho r_i)=\operatorname{Im}H_\nu^{(1,2)}(r_i\rho e^{i\varphi}),\qquad M_{j\mu\nu}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{s^jK_\mu(sr_i)I_\nu(sr)}{(n^2-s^2)^2+1}ds$$

Входящие сюда функции u_ν, v_ν, g_μ, f_μ приведены в [2]. Для удобства черта над ними опущена.

Для полупространства $c^{-1}(\lambda)=\lambda$ и при $r\leqslant r_i$

(2.2) $$T_{j\mu\nu}=-{}^1/_4\rho^j[(\varepsilon_{\mu\nu}\sin j\varphi+\eta_{\mu\nu}\cos j\varphi)\alpha-(\varepsilon_{\mu\nu}\cos j\varphi-\eta_{\mu\nu}\sin j\varphi)\beta]+$$

$$+\sin(\mu-\nu-j)\frac{\pi}{2}M_{j+1,\mu,\nu}+\cos(\mu-\nu-j)\frac{\pi}{2}K_{j\mu\nu}$$

$$M_{j\mu\nu}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{s^jK_\mu(sr_i)I_\nu(sr)}{(n^2-s^2)^4+s^2}ds$$

$$K_{j\mu\nu}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{s^j(n^2-s^2)^2K_\mu(sr_i)I_\nu(sr)}{(n^2-s^2)^4+s^2}ds$$

$$\alpha=n^2\rho\cos\varphi+\rho^3\cos2\varphi\cos\varphi-\rho^2\sin\varphi\sin2\varphi$$
$$\beta=\rho^3\sin2\varphi\cos\varphi+n^2\sin\varphi+\rho^2\cos2\varphi\sin\varphi$$

$\rho e^{i\varphi}$ — корень уравнения $(n^2+\lambda^2)^2+\lambda=0$. При $r\geqslant r_i$ следует в $M_{j\mu\nu}$ и $M_{j+1,\mu,\nu}$ поменять r и r_i местами, при этом

$$\eta_{\mu\nu}=u_\nu(\rho r_i)g_\mu(r)+v_\nu(\rho r_i)f_\mu(r),\qquad \varepsilon_{\mu\nu}=u_\nu(\rho r_i)f_\mu(r)-v_\nu(\rho r_i)g_\mu(r)$$

В частном случае осесимметричной деформации $n=0$

$$(2.3)\qquad T_{j\mu\nu}=-\frac{1}{3}\left[(f_\mu(r_i)u_\nu(r)-g_\mu(r_i)v_\nu(r))\sin(j-2)\frac{\pi}{3}\right]+$$

$$+(g_\mu(r_i)u_\nu(r)+f_\mu(r_i)v_\nu(r))\cos(j-2)\frac{\pi}{3}+$$

$$+M_{j\mu\nu}\cos(\mu-\nu-j)\frac{\pi}{2}+M_{j+3,\mu,\nu}\sin(\mu-\nu-j)\frac{\pi}{2}$$

Интегралы $M_{j\mu\nu}$ представим рядами

$$M_{j\mu\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(r_i)r^{\nu+2k},\qquad A_k(r_i)=\frac{1}{\pi^2k!\Gamma(\nu+k+1)2^{\nu+2k}}\int_0^\infty\frac{K_\mu(sr_i)s^{\nu+j+2k}}{1+s^6}ds$$

В промежутке интегрирования $[0,\ a]$ $(a\ll1)$ пренебрегаем величиной s^6 по сравнению с единицей и заменяем функцию ее асимптотической формулой

$$K_\mu(sr_i)\approx{}^1/_2\Gamma(\mu)(2/sr_i)^\mu\qquad(\mu\geqslant1)$$

При $a=0.2$, $\mu=1$, $r_i=1$ точность такой замены не превосходит 1%. В промежутке $[b,\ \infty]$ $(b\gg1)$ пренебрегаем единицей по сравнению с s^6.

$$(2.4)\qquad A_k=\frac{1}{\pi^2k!\Gamma(\nu+k+1)2^{\nu+2k}}\left[\left(\frac{2}{r_i}\right)^\mu\frac{\Gamma(\mu)}{2}\frac{0.2^{t-\mu}}{(t-\mu)}+\right.$$

$$\left.+\int_{0.2}^{b}\frac{K_\mu(sr_i)s^{\nu+2k+j}}{1+s^6}ds+\sqrt{\frac{\pi}{2}}r_i^{-(t_1-s)}\Gamma(t_1-5.5,r_ib)\right]$$

$$(t-\mu>0),\quad t_1=j+\nu+2k,\quad t=t_1+1$$

При $\mu=0$ первый член в фигурных скобках следует заменить на $(0.2)^tt^{-1}[\ln2(\gamma r_i)^{-1}-\ln0.2+t^{-1}]$.

Для слоя конечной мощности h, опирающегося на абсолютно гладкое и жесткое основание, начиная с некоторого a, функция $c^{-1}(\lambda)\approx\lambda$

$$(2.5)\qquad T_{j\mu\nu}=\int_0^a\frac{[\lambda(\operatorname{sh}2\lambda h+2\lambda h)-2\operatorname{sh}^2\lambda h]\lambda^jJ_\mu(\lambda r_i)J_\nu(\lambda r)}{[(n^2+\lambda^2)^2(\operatorname{sh}2\lambda h+2\lambda h)+2\operatorname{sh}^2\lambda h][(n^2+\lambda^2)^2+\lambda]}d\lambda+$$

$$+\int_0^\infty\frac{\lambda^jJ_\mu(\lambda r_i)J_\nu(\lambda r)}{(n^2+\lambda^2)^2+\lambda}d\lambda$$

Первый интеграл в (2.5) быстро сходится, а последний представляет собой (2.4).

3. Рассмотрим осесимметринчую деформацию свободно лежащей круглой плиты радиуса r_1 на основании, описываемом моделью Винклера. В этом случае следует плиту дополнить до бесконечной и по радиусу r_1 приложить нагрузки $q_{11}(r)$ и $q_{12}(r)$. Используя (1.10) и (1.11) при $n=0$, получим

$$(3.1)\qquad w(r)=w_\infty(r)+A_{11}[T_{300}(r)+(1-\nu)r_1^{-1}T_{210}(r)]+A_{12}T_{410}(r)$$

Учитывая (2.1), получаем известное решение [1], совпадающее с точностью до произвольных постоянных с аналогичным результатом работы [2], где рассматривался изгиб плиты на винклеровском основании полученным в [2].

(3.2) $$w(r)=w_\infty(r)+A_{11}[(g_0(r_1)-(1-\nu)r_1^{-1}f_0'(r_1))u_0(r)+ +(f_0(r_1)+(1-\nu)r_1^{-1}g_0'(r_1))v_0(r)]+A_{12}[g_0'(r_1)u_0(r)+f_0'(r_1)v_0(r)]$$

Если плита, лежащая на упругом основании, является фундаментом сооружения, воспринимающего действие ветра, то нагрузка, передаваемая на фундамент, может быть представлена [2] в виде $q\cos\theta$. Полагая в (1.11) $n=1$, получим

(3.3) $$w(r,\theta)=w_\infty(r,\theta)+A_{11}[\eta_{11}(r)+2(1-\nu)r_1^{-2}\varepsilon_{11}(r)+ +(1-\nu)r_1^{-1}(\eta_{21}(r)-\varepsilon_{11}(r))]\cos\theta+A_{12}[(\varepsilon_{21}(r)-\eta_{21}(r))\times \times(\sqrt{2}\,8^{-1}+\sqrt{2}\,2^{-1}(1-\nu)r_1^{-2})+\eta_{11}(r)-(1-\nu)2^{-1}r_1^{-3}\varepsilon_{11}(r)]\cos\theta$$

Для получения моментов и поперечных сил следует продифференцировать (3.1) и (3.3). Произвольные постоянные A_{11} и A_{12} находим из условий на контуре плиты.

Рассмотрим изгиб шарнирноразрезных плит с кольцевыми разрезами, лежащих на полупространстве либо на слое. Сначала рассмотрим осесимметричную деформацию шарнирноразрезной плиты с разрезом по радиусу r_1, лежащую на полупространстве. Для этого прикладываем по радиусу r_1 нагрузку $q_{11}(r)$, где $L_{10}(r)$ берется из (1.9)

(2.4) $$w(r)=w_\infty(r)+A_{11}[T_{200}(r,r_1)+(1-\nu)r_1^{-1}T_{110}(r,r_1)]$$

В этом случае из (2.3)

(3.5) $$T_{200}(r,r_1)=-\frac{1}{3}[g_0(r_1)u_0(r)+f_0(r_1)v_0(r)]- -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{s^2K_0(sr_1)I_0(sr)}{1+s^6}ds$$

(3.6) $$T_{110}(r,r_1)=\frac{1}{6}[\sqrt{3}(f_1(r_1)u_0(r)-g_1(r_1)v_0(r))+ +(g_1(r_1)u_0(r)+f_1(r_1)v_0(r)]+\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{sK_1(sr_1)I_0(sr)}{1+s^6}ds$$

Дифференцируя w (3.4) и применяя операторы L_1 и L_2, получаем выражения для момента и поперечной силы

(3.7) $$M_r(r)=M_\infty(r)+A_{11}[(g_0(r_1)\alpha_1(r)+f_0(r_1)\alpha_2(r))/6+M_{400}(r)- -(1-\nu)r^{-1}M_{301}(r)-(1-\nu)(6r_1)^{-1}[(\sqrt{3}f_1(r_1)-g_1(r_1))\alpha_1(r)- -(\sqrt{3}g_1(r_1)+f_1(r_1))\alpha_2(r)]-(1-\nu)r_1^{-1}M_{301}(r)+(1-\nu)^2(rr_1)^{-1}M_{211}(r)]$$

$$Q(r)=Q_\infty(r)+A_{11}[M_{501}(r)-\eta_{01}(r)3^{-1}+(1-\nu)(6r_1)^{-1}(\sqrt{3}\varepsilon_{11}(r)- -\eta_{11}(r))-(1-\nu)r_1^{-1}M_{411}(r)]$$

$$\alpha_1(r)=u_0(r)+\sqrt{3}v_0(r)-(1-\nu)r^{-1}(\sqrt{3}v_1(r)-u_1(r)),\quad \alpha_2(r)=v_0(r)- -\sqrt{3}u_0(r)+(1-\nu)r^{-1}(\sqrt{3}u_1(r)+v_1(r))$$

Полагая $M=0$ при $r=r_1$, находим постоянную A_{11}. При действии на плиту, лежащую на полупространстве нагрузки $q\cos\theta$, имеем

$$w(r)=w_\infty(r)+A_{11}[T_{211}-2(1-\nu)r_1^{-2}T_{011}+(1-\nu)r_1^{-1}T_{121}]\cos\theta$$

Здесь выражения T_{211}, T_{011} и T_{121} определяются из (2.2) при $n=1$. К плите с шарнирами по двум линиям следует приложить аналогичную компенсирующую нагрузку и по линии $r=r_2$.

Тогда получим для осесимметричной деформации

$$w(r)=w_\infty(r)+A_{11}[T_{200}(r,r_1)+(1-\nu)r_1^{-1}T_{110}(r,r_1)]+$$
$$+A_{21}[T_{200}(r,r_2)+(1-\nu)r_2^{-1}T_{110}(r,r_2)]$$

Произвольные постоянные A_{11} и A_{21} определяются из условий $M(r_1)=0$ и $M(r_2)=0$.

Перейдем к решению задачи об изгибе полностью разрезанной плиты, лежащей на полупространстве. При осесимметричной деформации получим из (1.11)

$$w(r)=w_\infty(r)-A[T_{200}+(1-\nu)r_1^{-1}T_{110}]+B[h(r-r_1)-T_{010}]$$

Здесь $h(r-r_1)$ равно r_1^{-1} при $r<r_1$, $^1/_2 r_1^{-1}$ при $r=r_1$ и нулю при $r>r_1$.

Таким образом в случае полного разреза плиты, лежащей на полупространстве, должен произойти разрыв деформаций в основании.

Запишем выражения для поперечной силы

$$Q(r)=Q_\infty(r)+A[T_{201}+(1-\nu)r_1^{-1}T_{111}]-BT_{311}$$

Из (2.3) следует, что в выражение T_{311} входит интеграл

$$\int\limits_0^\infty K_1(sr_1)I_1(sr)\,ds=\frac{\pi r}{4r_1^2}F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2};2;\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right)$$

где $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ — гипергеометрическая функция.

Так как $\alpha+\beta-\gamma=1$, то ряд сходится при $r<r_1$ и расходится при $r=r_1$.

Из интегрального представления гипергеометрической функции следует, что

$$F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2};2;1\right)=\frac{1}{B(^1/_2,{}^3/_2)}\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)}$$

Следовательно, при $r=r_1$ поперечная сила имеет логарифмическую особенность и нельзя удовлетворить граничному условию по линии разреза. Отметим, что контактные напряжения имеют при этом неинтегрируемую особенность[1].

В качестве примера рассмотрим изгиб шарнирноразрезной плиты с разрезом по линии $r=r_1$, лежащей на полупространстве и нагруженной в центре сосредоточенной силой $P=1$. Характеристики гибкости плиты принимаем $s=4$ и $s=10$ по [3], что соответствует $a=0.2$ и $a=0.28$ по [4].

Приведем значения радиальных моментов M_r при $\rho\leqslant1$ (ρ — приведенный радиус), определенных по формулам (3.7) для $s=4$ (вторая строка) и $s=10$ (третья строка).

$\rho=0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$M_r=\infty$	0.085	0.035	0.014	0.0006	0.00
$M_r=\infty$	0.053	0.0148	0.0012	0.00	0.00

Поступила 18 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коренев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М., Физматгиз, 1960.
2. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М., Физматгиз. 1971
3. *Горбунов-Посадов М. И.* Расчет конструкций на упругом основании. М., Госстройиздат, 1953.
4. *Шехтер О. Я.* К расчету фундаментных плит на упругом слое грунта конечной мощности. Основания и фундаменты. Стройвоенмориздат, 1948, № 11.

[1] На эти свойства плиты с полным разрезом автору указал Г. Я. Попов.