МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1975

УДК 539.3

К ТЕОРИИ НЕДНОРОДНЫХ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛИТ

И. И. ВОРОВИЧ, И. Г. КАДОМЦЕВ, Ю. А. УСТИНОВ

(Ростов-на-Дону)

Некоторые результаты исследований плит по трехмерной теории упругости получены в [1–6].

В предлагаемой работе получены и исследованы однородные решения для неоднородных по толщине плит. Как и в однородном случае [7–9], показано, что внутреннее напряженное состояние определяется двумя бигармоническими функциями, одна из которых эквивалентна обобщенной плоской задаче теории упругости, вторая – задаче изгиба. Напряженное состояние краевого эффекта определяется потенциальным и вихревым решениями. Методами, предложенными в [8, 9], рассмотрена задача для неоднородной плиты при заданных на цилиндрической поверхности напряжениях. Асимптотическим методом задача сведена к решению двух последовательностей бигармонических проблем, одна из них эквивалентна плоской задаче теории упругости, вторая – прикладной теории изгиба плит, и обращению некоторой бесконечной матрицы. Элементы матрицы зависят только от упругих свойств плиты и не зависят от ее геометрии и нагрузок. Показано также, что на границе плиты напряженное состояние краевого эффекта имеет тот же порядок, что и бигармоническое. В первом приближении сформулирована асимптотически точная прикладная теория. Некоторые результаты данной работы представлены в [10].

1. Пусть $\Omega=S\times[-h, h]$ — область, занятая плитой, где S — срединная поверхность, $2h$ — толщина плиты (фиг. 1); $S_\pm$ — торцы плиты, соответствующие $z=\pm h$, Γ — боковая поверхность, a — характерный линейный размер S. Будем считать, что материал плиты определяется упругими параметрами Ляме $\lambda=\lambda(\zeta)$, $\mu=\mu(\zeta)$, где $\lambda(\zeta)$, $\mu(\zeta)$ — кусочно-непрерывные функции, $z=h\zeta$.

Уравнения равновесия Ляме в рассматриваемом случае представим в следующем виде:

$$L_1(\varepsilon)\chi=(C_2\chi')'+\varepsilon[(C_1\chi)'+C_1^*\chi']+\varepsilon^2C_0\chi \tag{1.1}$$

$$\chi=\begin{Vmatrix} u\\ v\\ w\end{Vmatrix},\qquad C_0=\begin{Vmatrix}\mu\Delta+(\lambda+\mu)\partial_1^2 & (\lambda+\mu)\partial_1\partial_2 & 0\\ (\lambda+\mu)\partial_1\partial_2 & \mu\Delta+(\lambda+\mu)\partial_2^2 & 0\\ 0 & 0 & \mu\Delta\end{Vmatrix}$$

$$C_1=\begin{Vmatrix}0 & 0 & \mu\partial_1\\ 0 & 0 & \mu\partial_2\\ \lambda\partial_1 & \lambda\partial_2 & 0\end{Vmatrix},\qquad C_2=\begin{Vmatrix}\mu & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \lambda+2\mu\end{Vmatrix}$$

$$\partial_1=\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \partial_2=\frac{\partial}{\partial\eta},\quad \Delta=\partial_1^2+\partial_2^2,\quad x=a\xi,\quad y=a\eta,\quad z=h\zeta,\quad h=a\varepsilon$$

Здесь штрих означает производную по ζ; C_1^* — транспонированная матрица-оператор.

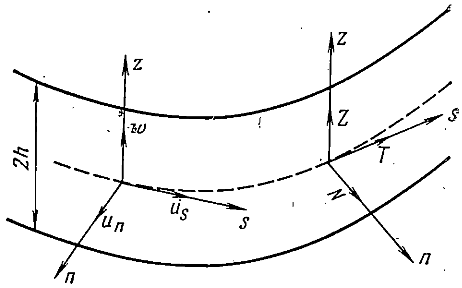
Изучим решения уравнения (1.1), соответствующие отсутствию напряжений на торцах плиты

$$L_2(\varepsilon)\chi=[C_2\chi'+C_1\chi]_{\zeta=\pm1}=0 \tag{1.2}$$

2. Введем потенциальное решение [8, 9] при помощи соотношений (2.1)

(2.1) $u^{(2)}=\alpha(\zeta)\partial_1 A,\ v^{(2)}=\alpha(\zeta)\partial_2 A,\ w^{(2)}=\gamma\varepsilon^{-1}\beta(\zeta)A,\ \varepsilon^2\Delta A-\gamma^2 A=0$

Подставляя (2.1) в уравнения (1.1) и граничные условия (1.2), приходим к следующей спектральной задаче относительно пары функций $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$:



$$(2.2)\quad \begin{gathered}(\mu\alpha')'+\gamma[(\mu\beta)'+\lambda\beta']+\\+\gamma^2(\lambda+2\mu)\alpha=0\\ [(\lambda+2\mu)\beta']'+\gamma[(\lambda\alpha)'+\\+\mu\alpha]+\gamma^2\mu\beta=0\\ (\alpha'+\gamma\beta)_{\zeta=\pm1}=0\\ [(\lambda+2\mu)\beta'+\gamma\lambda\alpha]_{\zeta=\pm1}=0\end{gathered}$$

Введем следующие обозначения: γ_k — отличная от нуля точка спектра, (α_k, β_k) — соответствующая ей пара собственных функций; H_μ, H_λ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$(g_1, g_2)_{H_\mu}=\int_{-1}^{1}\mu g_1\bar g_2 d\zeta,\qquad (g_1, g_2)_{H_\lambda}=\int_{-1}^{1}\lambda g_1\bar g_2 d\zeta$$

Теорема 1. Среди $\{\gamma_k\}$ нет чисто мнимых величин.

Доказательство. Умножим первое уравнение (2.2) на α_k, второе — на β_k и проинтегрируем по отрезку $\zeta\in[-1, 1]$. После простых преобразований получаем

$$(2.3)\quad \begin{gathered}\gamma_k^2 e_2+\gamma_k 2e_1-e_0=0,\qquad e_0=\|\alpha_k\|^2_{H_\lambda}+\|\beta_k\|^2_{H_\mu}+2\|\alpha_k\|^2_{H_\mu}\\ e_1=i\,\mathrm{Im}\,[(\alpha_k', \beta_k)_{H_\mu}+(\beta_k', \alpha_k)_{H_\lambda}],\qquad e_2=\|\alpha_k'\|_{H_\mu}+\|\beta_k'\|_{H_\lambda}+2\|\beta_k'\|_{H_\mu}\end{gathered}$$

Теорема имеет место, поскольку коэффициент e_1 чисто мнимый, а дискриминант квадратного уравнения (2.3), как это можно показать, строго больше нуля.

Уравнение (2.3) всегда имеет два корня, один из которых γ_k^- лежит в левой полуплоскости, другой γ_k^+ — в правой, и им соответствует одна и та же пара собственных функций (α_k, β_k). Следовательно, одно из решений (2.1), соответствующее γ_k^+ или γ_k^-, при $\varepsilon\to0$ имеет характер пограничного слоя, локализованного в окрестности поверхности Г.

При помощи замены

$$\alpha=p_0\gamma^{-2}f''-p_2 f,\ \beta=-\gamma^{-3}(p_0 f'')'-2\gamma^{-1}(p_1 f')+\gamma^{-1}(p_2 f)'$$

$$p_0=\frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)},\qquad p_1=\frac{1}{2\mu},\qquad p_2=\frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}$$

спектральная задача (2.2) сводится к следующей:

$$(2.4)\quad \begin{gathered}(p_0 f'')''+\gamma^2[2(p_1 f')'-(p_2 f)''-p_2 f'']+\gamma^4 p_0 f=0,\\ \gamma f(\pm1)=0,\ \gamma f'(\pm1)=0\end{gathered}$$

Соотношения (2.4) являются обобщением известной спектральной задачи П. Ф. Папковича [11, 12] на неоднородный случай.

Легко видеть, что структура спектра будет симметричной, т. е. если γ_k — точка спектра, то точками спектра также будут — γ_k, $\bar\gamma_k$, $-\bar\gamma_k$.

При помощи простых приемов, примененных в [13], можно показать, что имеют место следующие соотношения обобщенной ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} p_0(f_k''f_l''-\gamma_k^2\gamma_l^2 f_k f_l)\,d\zeta=0,\qquad k\neq l$$

$$\int_{-1}^{1}[2p_1f_k'f_l'+p_2(f_kf_l''+f_lf_k'')-p_0(\gamma_k^2+\gamma_l^2)f_kf_l]d\zeta=0$$

В случае $\gamma_k=\gamma_l$ эти выражения отличны от нуля только при отсутствии присоединенных векторов.

В работе [14] доказана двукратная полнота системы собственных присоединенных векторов спектральной задачи (2.4) при условии, что коэффициенты p_0, p_1, p_2 достаточно гладкие. Заметим, что этот же факт имеет место, когда указанные функции кусочно-непрерывны.

3. Введем вихревое решение [8, 9] с помощью соотношений

$$u^{(3)}=l(\zeta)\partial_2B,\qquad v^{(3)}=-l(\zeta)\partial_1B,\qquad w^{(3)}=0,\qquad \varepsilon^2\Delta B-\delta^2B=0 \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в уравнение (1.1) и граничное условие (1.2), получаем следующую спектральную задачу: $-\mu^{-1}(\mu l')'=\delta^2l$, $l'(\pm1)=0$. Правая часть уравнения и граничное условие определяют некоторый положительный оператор T в пространстве H_μ. Следовательно, все собственные значения $\{\lambda_m(T)=\delta_m^2\}$ неотрицательные и имеют точку сгущения на бесконечности [15], а систему собственных вектор-функций $\{l_k\}$ можно считать ортонормированной, т. е.

$$(l_m,l_n)_{H_\mu}=\int_{-1}^{1}\mu l_ml_nd\zeta=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$$

Заметим также, что $\delta=0$ — точка спектра и ей соответствует собственная функция

$$l_0=\left(\int_{-1}^{1}\mu\,d\zeta\right)^{-1/2}$$

4. Анализ соотношений (2.2) показывает, что $\gamma=0$ — кратная точка спектра и ей соответствует некоторая жорданова цепочка. Кроме того, как было показано выше, $\delta=0$ — также точка спектра. Эти два факта позволяют сделать вывод, что существует еще одно частное решение уравнений (1.1), (1.2), для построения которого в силу кратности точки спектра требуется специальный подход. В однородном случае [7–9] это решение выражается через две бигармонические функции. Покажем, что этот факт имеет место и в рассматриваемом случае неоднородной плиты.

Введем в соотношения (1.1), (1.2) спектральный параметр σ $\partial_1=\varepsilon^{-1}\sigma\partial_1^\circ$, $\partial_2=\varepsilon^{-1}\sigma\partial_2^\circ$, после чего получаем следующую спектральную задачу:

$$L(\sigma)\chi=\{L_1^\circ(\sigma)\chi,\ L_2^\circ(\sigma)\chi\}=0 \tag{4.1}$$

Здесь операторы $L_1^\circ(\sigma)$, $L_2^\circ(\sigma)$ получаются соответственно из операторов $L_1(\varepsilon)$, $L_2(\varepsilon)$ заменой ε на σ и ∂_1, ∂_2 на ∂_1°, ∂_2°.

Предположим, что $\sigma_0=0$ является кратной точкой спектра и построим жорданову цепочку по схеме [16]

$$L(\sigma_0)\chi_0=0,\qquad L(\sigma_0)\chi_1+\frac{\partial L(\sigma_0)}{\partial\sigma_0}\chi_0=0 \tag{4.2}$$

$$L(\sigma_0)\chi_2+\frac{\partial L(\sigma_0)}{\partial\sigma_0}\chi_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2L(\sigma_0)}{\partial\sigma_0^2}\chi_0=0$$

Здесь χ_0 — собственный вектор, отвечающий соответствующему числу σ_0, а $\chi_1,\ldots,\chi_{r-1}$ — присоединенные векторы к собственному вектору χ_0.

После интегрирования системы (4.2) получаем (нуль над операторами опускаем)

(4.3) $$u_0=u_0(\xi,\eta),\quad v_0=v_0(\xi,\eta),\quad w_0=w_0(\xi,\eta)$$

(4.4) $$u_1=-\zeta\partial_1 w_0+u_1{}^\circ(\xi,\eta),\quad v_1=-\zeta\partial_2 w_0+v_1{}^\circ(\xi,\eta)$$
$$w_1=-k_1(\zeta)(\partial_1 u_0+\partial_2 v_0)$$

(4.5) $$\Gamma_1{}^*(u_0,v_0)\equiv[(\lambda^*+2\mu^*)\partial_1{}^2+\mu^*\partial_2{}^2]u_0+(\lambda^*+\mu^*)\partial_1\partial_2 v_0=0$$
$$\Gamma_2{}^*(u_0,v_0)\equiv(\lambda^*+\mu^*)\partial_1\partial_2 u_0+[(\lambda^*+2\mu^*)\partial_2{}^2+\mu^*\partial_1{}^2]v_0=0$$

(4.6) $$u_2=\Gamma_1{}^\circ(u_0,v_0)+u_2{}^\circ(\xi,\eta)=[(\lambda^\circ+2\mu^\circ)\partial_1{}^2+\mu^\circ\partial_2{}^2]u_0+$$
$$+(\lambda^\circ+\mu^\circ)\partial_1\partial_2 v_0+u_2{}^\circ(\xi,\eta)$$
$$v_2=\Gamma_2{}^\circ(u_0,v_0)+v_2{}^\circ(\xi,\eta)=(\lambda^\circ+\mu^\circ)\partial_1\partial_2 u_0+$$
$$+[\mu^\circ\partial_1{}^2+(\lambda^\circ+2\mu^\circ)\partial_2{}^2]v_0+v_2{}^\circ(\xi,\eta)$$
$$w_2=k_2(\zeta)(\partial_2{}^2+\partial_1{}^2)w_0-k_1(\zeta)(\partial_1 u_1+\partial_2 v_1)+w_2{}^\circ(\xi,\eta)$$

(4.7) $$\Gamma_1{}^*(u_1{}^\circ,v_1{}^\circ)=a^*\partial_1\Delta w_0,\quad \Gamma_2{}^*(u_1{}^\circ,v_1{}^\circ)=a^*\partial_2\Delta w_0$$

(4.8) $$u_3=\Gamma_1{}^\circ(u_1{}^\circ,v_1{}^\circ)+q_1(\zeta)\partial_1\Delta w_0-\zeta\partial_1 w_2{}^\circ+u_3{}^\circ(\xi,\eta)$$
$$v_3=\Gamma_2{}^\circ(u_1{}^\circ,v_1{}^\circ)+q_1(\zeta)\partial_2\Delta w_0-\zeta\partial_2 w_2{}^\circ+v_3{}^\circ(\xi,\eta)$$
$$w_3=k_2(\zeta)\Delta w_1{}^\circ-k_1(\zeta)(\partial_1 u_2{}^\circ+\partial_2 v_2{}^\circ)+w_3{}^\circ(\xi,\eta)$$

(4.9) $$\Gamma_1{}^*(u_2{}^\circ,v_2{}^\circ)=a^*\partial_1\Delta w_1{}^\circ,\qquad \Gamma_2{}^*(u_2,v_2)=a^*\partial_2\Delta w_2{}^\circ,\qquad \Delta^2 w_0=0$$

(4.10) $$u_4=\Gamma_1{}^\circ(u_2{}^\circ,v_2{}^\circ)+q_1(\zeta)\partial_1\Delta w_1-\zeta\partial_1 w_3{}^\circ+u_4{}^\circ(\xi,\eta)$$
$$v_4=\Gamma_2{}^\circ(u_2{}^\circ,v_2{}^\circ)+q_1(\zeta)\partial_2\Delta w_1-\zeta\partial_2 w_3{}^\circ+v_4{}^\circ(\xi,\eta)$$
$$w_4=k_2(\zeta)\Delta w_2{}^\circ-k_1(\zeta)(\partial_1 u_3{}^\circ+\partial_2 v_3{}^\circ)+w_4{}^\circ(\xi,\eta)$$

(4.11) $$\mu^*=\int_{-1}^{1}\mu\,d\zeta,\qquad \lambda^*=\int_{-1}^{1}\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}d\zeta,\qquad a^*=\int_{-1}^{1}\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\zeta\,d\zeta$$

$$k_1(\zeta)=\int_0^\zeta\frac{\lambda\,d\zeta}{\lambda+2\mu},\qquad k_2(\zeta)=\int_0^\zeta\frac{\lambda\zeta\,d\zeta}{\lambda+2\mu},\qquad \mu^\circ=\int_0^\zeta\frac{d\zeta_1}{\mu}\int_{\zeta_1}^{1}\mu\,d\zeta_2$$

$$\lambda^\circ=\int_0^\zeta\frac{\lambda(\zeta-\zeta_1)d\zeta_1}{\lambda+2\mu}+\int_0^\zeta\frac{d\zeta_1}{\mu}\int_{\zeta_1}^{1}\frac{2\lambda\mu d\zeta_2}{\lambda+2\mu}$$

$$q(\zeta)=\int_0^\zeta\frac{\lambda(\zeta_1-\zeta)\zeta_1\,d\zeta_1}{\lambda+2\mu}-\int_0^\zeta\frac{d\zeta_1}{\mu}\int_{\zeta_1}^{1}\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\zeta_2\,d\zeta_2$$

Следующий этап интегрирования приводит к соотношениям типа (4.9), (4.10), где индекс у всех функций $u_3{}^\circ$, $v_3{}^\circ$, $w_3{}^\circ$ увеличивается на единицу.

Заметим, что неоднородные уравнения (4.7) имеют решение вида

$$u_1{}^\circ=\frac{a^*}{\lambda^*+2\mu^*}\partial_1 w_0,\qquad v_1{}^\circ=\frac{a^*}{\lambda^*+2\mu^*}\partial_2 w_0$$

Аналогичный вид имеет неоднородное решение уравнений (4.9)

Таким образом, $\sigma_0=0$ является четырехкратным собственным значением задачи (4.1), ему соответствует построенная выше жорданова цепочка u_s, v_s, w_s $(s=0, 1, 2, 3)$. Из соотношений (4.3) — (4.10) следует, что частное решение задачи (4.1), которое будем называть бигармоническим, определяется через функции $u_0(\xi,\eta)$, $v_0(\xi,\eta)$, удовлетворяющие уравнениям (4.5) плоской теории упругости с приведенными упругими параметрами λ^*, μ^*, и бигармоническую функцию w_0.

Вводя вместо u_0, v_0 бигармоническую функцию $\Phi_0(\xi, \eta)$ и полагая $w_0=a\Phi_1(\xi, \eta)$, получаем следующие выражения для перемещений и напряжений бигармонического решения:

$$u^{(1)}=a\varepsilon\left[\varphi_1+b\partial_1\Phi_1-\partial_1\sum_{i=0}^{1}(\zeta^i\Phi_i-\varepsilon^2q_i\Delta\Phi_i)\right] \tag{4.12}$$

$$v^{(1)}=a\varepsilon\left[\varphi_2+b\partial_2\Phi_1-\partial_2\sum_{i=0}^{1}(\zeta^i\Phi_i-\varepsilon^2q_i\Delta\Phi_i)\right]$$

$$w^{(1)}=a\left[\Phi_1+\varepsilon^2(k_2-k_1b)\Delta\Phi_1-\varepsilon^2\frac{k_1\mu^*}{\lambda^*+\mu^*}\Delta\Phi_0\right]$$

$$\sigma_x^{(1)}=2\mu\varepsilon\left[-b\partial_2{}^2\Phi_1+\sum_{i=0}^{1}(\zeta^i\partial_2{}^2+r_i\Delta-\varepsilon^2q_i\partial_2\Delta)\Phi_i\right] \tag{4.13}$$

$$\sigma_y^{(1)}=2\mu\varepsilon\left[-b\partial_1{}^2\Phi_1+\sum_{i=0}^{1}(\zeta^i\partial_1{}^2+r_i\Delta-\varepsilon^2q_i\partial_1\Delta)\Phi_i\right]$$

$$\tau_{xy}^{(1)}=-2\mu\varepsilon\partial_1\partial_2\left[b\Phi_1+\sum_{i=0}^{1}(\zeta^i+\varepsilon^2q_i\Delta)\Phi_i\right],\qquad \sigma_z^{(1)}=0$$

$$\tau_{xz}^{(1)}=\varepsilon^2\sum_{i=0}^{1}r_i{}^*\partial_1\Delta\Phi_i,\qquad \tau_{yz}^{(1)}=\varepsilon^2\sum_{i=0}^{1}r_i{}^*\partial_2\Delta\Phi_i$$

Здесь φ_1, φ_2 — сопряженные гармонические функции, связанные с Φ_0 соотношением

$$\partial_1\varphi_1=\partial_2\varphi_2=\frac{\lambda^*+2\mu^*}{2(\lambda^*+\mu^*)}\Delta\Phi_0$$

$$q_0(\zeta)=\frac{\mu^*\lambda^\circ-\lambda^*\mu^\circ}{\lambda^*+\mu^*},\qquad q_1(\zeta)=q(\zeta)+b(\lambda^\circ+2\mu^\circ)$$

$$r_0(\zeta)=\frac{2\mu^*\lambda-\lambda^*(\lambda+2\mu)}{2(\lambda^*+\mu^*)(\lambda+2\mu)},\qquad r_1(\zeta)=\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(b-\zeta)$$

$$r_s{}^*=2\int_\zeta^1\mu r_s(\zeta)\,d\zeta\quad(s=0,1),\qquad b=(\lambda^*+2\mu^*)a^*$$

Для однородной плиты выражения (4.12), (4.13) с точностью до не существенных множителей совпадают с формулами, полученными в [8] для бигармонического решения. Заметим, что для плиты с симметричной по толщине структурой $a^*=b=0$ и напряженно-деформированное состояние расчленяется на симметричное, определяемое функцией $\Phi_0(\xi, \eta)$, и кососимметричное, определяемое функцией $\Phi_1(\xi, \eta)$; если Φ_s – достаточно медленно меняющиеся функции, то, как видно из (4.12), (4.13), при достаточно малом ε выполняются гипотезы Кирхгофа.

5. Рассмотрим задачу, когда к боковой поверхности плиты Г приложены напряжения

$$\sigma_n|_\Gamma=N(s, \zeta),\quad \tau_{ns}|_\Gamma=T(s, \zeta),\quad \tau_{nt}|_\Gamma=Z(s, \zeta) \tag{5.1}$$

Здесь n, s, ζ – местные безразмерные координаты (фиг. 1), связанные с границей S, которую обозначим ∂S.

Деформированное состояние плиты будем отыскивать в виде

$$u=\sum_{i=1}^{3} u^{(i)}, \quad v=\sum_{i=1}^{3} v^{(i)}, \quad w=\sum_{i=1}^{3} w^{(i)} \tag{5.2}$$

Как и в [8, 9], будем считать, что задача решена, если по заданным на Г напряжениям определяются граничные условия для функций Φ_i, A_k, B_m. Воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. В рассматриваемом случае, учитывая, что перемещения, определяемые по (5.2), удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям (1.2), получаем

$$\iint\limits_{\Gamma} \{(\sigma_n-N)[\delta u_{n0}^{(1)}+\varepsilon a(b-\zeta)\delta\partial_n\Phi_1+\delta u_n^{(2)}+\delta u_n^{(3)}]+ \tag{5.3}$$

$$+(\tau_{ns}-T)[\delta u_{s0}+\varepsilon a(b-\zeta)\delta\partial_s\Phi_1+\delta u_s^{(2)}+\delta u_s^{(3)}]+$$

$$+(\tau_{nz}-Z)(a\delta\Phi_1+\delta w^{(2)})\}d\zeta\, ds=0$$

$$\sigma_n=2\mu\varepsilon\left[-bQ_n\Phi_1+\sum_{i=0}^{1}(\zeta^i Q_n+r_i\Delta-\varepsilon^2 q_i Q_n\Delta)\Phi_i\right]+ \tag{5.4}$$

$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}[f_k''(\zeta)A_k-\varepsilon^2 2\mu\alpha_k(\zeta)Q_n A_k]-2\mu\varepsilon^3\sum_{m=1}^{\infty} l_m(\zeta)Q_s B_m$$

$$\tau_{ns}=2\mu\varepsilon Q_s\left[-b\Phi_1+\sum_{i=0}^{1}(\zeta^i\Phi_i+\varepsilon^2 q_i\Delta\Phi_i)\right]-$$

$$-2\mu\varepsilon^3\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\zeta)Q_s A_k+\varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}[(\mu l_m')'B_m-2\mu\varepsilon^2 l_m Q_n B_m]$$

$$\tau_{nz}=\varepsilon^2\sum_{i=0}^{1} r_i{}^*\frac{\partial\Delta\Phi_i}{\partial n}-\varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(\zeta)\frac{\partial A_k}{\partial n}+\mu\varepsilon^2\sum_{m=1}^{\infty} l_m'\frac{\partial B_m}{\partial s}\frac{1}{H}$$

$$u_n^{(2)}+u_n^{(3)}=a\varepsilon^3\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\zeta)\frac{\partial A_k}{\partial n}-a\varepsilon^3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{H}l_m(\zeta)\frac{\partial B_m}{\partial s} \tag{5.5}$$

$$u_s^{(2)}+u_s^{(3)}=a\varepsilon^3\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\zeta)\frac{1}{H}\frac{\partial A_k}{\partial s}-a\varepsilon^3\sum_{m=1}^{\infty} l_m(\zeta)\frac{\partial B_m}{\partial n}$$

$$Q_n(\ldots)=\left(\frac{1}{H^2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{a}{RH}\frac{\partial}{\partial n}+n\frac{aR'}{H^3R^2}\frac{\partial}{\partial s}\right)(\ldots)$$

$$Q_s(\ldots)=-\left(\frac{1}{H}\frac{\partial^2}{\partial n\,\partial s}-\frac{a}{H^2R}\frac{\partial}{\partial s}\right)(\ldots), \qquad H=1+n\frac{a}{R}$$

где R — радиус кривизны контура ∂S.

Обозначим через $a_k(s)$, $b_m(s)$ граничные значения соответственно функций $A_k(\xi,\eta)$, $B_m(\xi,\eta)$ на контуре ∂S и, следуя [9], введем оператор S_k, определяемый так:

$$S_k a_k=\varepsilon\frac{\partial A_k}{\partial n}\Big|_{\Gamma}$$

Полагая теперь в (5.3) отличными от нуля только вариации δu_{0n}, δu_{0s}, $\delta\Phi_1$, $\delta\partial_n\Phi_1$, каждую из которых считаем независимой, получаем

(5.6)
$$Q_n\left[\mu^{(0)}\Phi_0+(\mu^{(1)}-b\mu^{(0)})\Phi_1-\varepsilon^2(q_0^{(0)}\Delta\Phi_0+q_1^{(0)}\Delta\Phi_1)-\varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(0)}A_k\right]_{n=0}=N_0$$

$$Q_s\left[\mu^{(0)}\Phi_0+(\mu^{(1)}-b\mu^{(0)})\Phi_1-\varepsilon^2(q_1^{(0)}\Delta\Phi_0+q_1^{(0)}\Delta\Phi_1)-2\varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(0)}A_k\right]_{n=0}=T.$$

(5.7)
$$Q_n\left[\mu^{(1)}\Phi_0+(\mu^{(2)}-b\mu^{(1)})\Phi_1-\varepsilon^2(q_0^{(1)}\Delta\Phi_0+q_1^{(1)}\Delta\Phi_1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{1}r_i^{(1)}\Delta\Phi_i-\varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(1)}A_k\right]_{n=0}+\varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}l_m\left(S_mb_m'-\varepsilon\frac{a}{R}b_m'\right)=M_{nn}$$

$$\partial_sQ_s\left[\mu^{(1)}\Phi_0+(\mu^{(2)}-b\mu^{(1)})\Phi_1-\varepsilon^2(q_0^{(1)}\Delta\Phi_0+q_1^{(1)}\Delta\Phi_1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{1}r_i\Delta\Phi_i-\varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(1)}A_k\right]_{n=0}-\varepsilon^2\sum_{m=1}^{\infty}l_m^{(1)}\delta_m^{-2}(aR^{-1}S_mb_m+\varepsilon b_m'')=Z_0+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$$

(5.8)
$$2\varepsilon N_0=\int_{-1}^{1}N\,d\zeta,\qquad 2\varepsilon T_0=\int_{-1}^{1}T\,d\zeta,\qquad 2\varepsilon Z_0=\int_{-1}^{1}Z\,d\zeta$$

$$2\varepsilon M_{nn}=\int_{-1}^{1}N\zeta\,d\zeta,\qquad 2\varepsilon M_{ns}=\int_{-1}^{1}T\zeta\,d\zeta$$

$$\mu^{(t)}=\int_{-1}^{1}\mu\zeta^t\,d\zeta,\qquad q_i^{(t)}=\int_{-1}^{1}q_i(\zeta)\zeta^t\,d\zeta,\qquad r_i^{(t)}=\int_{-1}^{1}r_i\zeta^t\,d\zeta$$

$$\alpha_k^{(t)}=\int_{-1}^{1}\mu\alpha_k(\zeta)\zeta^t\,d\zeta,\qquad l_m^{(1)}=\int_{-1}^{1}\mu l_m'\,d\zeta$$

Варьируя граничные значения A_k, получаем бесконечную систему уравнений

(5.9)
$$2S_p{}^*Q_n\left[-b\alpha_p^{(0)}\Phi_1+\sum_{i=0}^{1}(\alpha_p^{(i)}\Phi_i-\varepsilon^2q_{ip}\Delta\Phi_i)\right]_{n=0}+$$
$$+\sum_{i=0}^{1}(r_{ip}S_p\Delta\Phi_i)_{n=0}+\sum_{k=1}^{\infty}C_{pk}^{(1)}S_p{}^*a_k-2\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{pk}(aR^{-1}S_p{}^*S_ka_k-$$
$$-\varepsilon S_p{}^*a_k'')+2\varepsilon^2\sum_{m=1}^{\infty}l_{pm}(S_p{}^*S_mb_m'-aR^{-1}S_p{}^*b_m')-$$
$$-2\varepsilon Q_s\left[-b\alpha_p^{(0)}\Phi_1+\sum_{i=0}^{1}(\alpha_p^{(i)}\Phi_i-\varepsilon^2q_{ip}\Delta\Phi_i)\right]_{n=0}-$$

$$-2\varepsilon^3 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{pk} (S_k a_k' - aR^{-1} a_k') - \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} l_{pm} [\delta_m{}^2 b_m +$$

$$+2\varepsilon (aR^{-1} S_m b_m + \varepsilon b_m'')] + \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{1} r_{ip} \frac{\partial \Delta \Phi_i}{\partial n} \right)_{n=0} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} C_{pk} S_k a_k + \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} l_{pm}^{(1)} b_m' = S_p N_p - \varepsilon T_p' + Z_p$$

Здесь $S_m{}^*$ — оператор, сопряженный S_m

$$r_{ip} = \int_{-1}^{1} r_i \alpha_p d\zeta; \quad r_{ip}{}^* = \int_{-1}^{1} r_i{}^* \alpha_p d\zeta, \quad q_{ip} = \int_{-1}^{1} q_i \alpha_p d\zeta \tag{5.10}$$

$$C_{pk}^{(1)} = \int_{-1}^{1} f_k'' \alpha_p d\zeta, \quad C_{pk}^{(2)} = -\int_{-1}^{1} f_k' \beta_p d\zeta$$

$$\alpha_{pk} = 2 \int_{-1}^{1} \mu \alpha_k \alpha_p d\zeta, \quad l_{pm} = \int_{-1}^{1} \mu l_m \alpha_p d\zeta, \quad l_{mp}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \mu l_m' \beta_p d\zeta$$

$$\varepsilon N_p = \int_{-1}^{1} N \alpha_p d\zeta, \quad \varepsilon T_p = \int_{-1}^{1} T \alpha_p d\zeta, \quad \varepsilon^2 Z_p = \int_{-1}^{1} Z \beta_p d\zeta$$

Варьируя граничные значения функций B_m, получаем

$$2 \left[S_m{}^* Q_n \left(l_m^{(1)} \Phi_1 + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{1} q_{im}{}^\circ \Delta \Phi_i \right) + \varepsilon \partial_s Q_n \Phi_1 \right]_{n=0} + \tag{5.11}$$

$$+2\varepsilon \sum_{i=0}^{1} [r_{im}{}^\circ \partial_s \Delta \Phi_i - \varepsilon^2 q_{im}{}^\circ \partial_s Q_n \Delta \Phi_i]_{n=0} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} f_{mk} a_k' -$$

$$-2\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} l_{km} (aR^{-1} S_k a_k + \varepsilon a_k'')' + 2\varepsilon^2 (S_m b_m' - \varepsilon a R^{-1} b_m') +$$

$$+2\varepsilon S_m{}^* \sum_{k=1}^{\infty} l_{km} (S_k a_k' - \varepsilon a R^{-1} a_k') -$$

$$-S_m{}^* [\delta_m{}^2 b_m + \varepsilon^2 (aR^{-1} \delta_m b_m + \varepsilon b_m'')] = S_m T_m + \varepsilon N_m'$$

$$q_{im}{}^\circ = \int_{-1}^{1} \mu q_i l_m \, d\zeta, \quad r_{im}{}^\circ = \int_{-1}^{1} \mu r_i l_m \, d\zeta; \quad \varepsilon T_m = \int_{-1}^{1} T l_m \, d\zeta \tag{5.12}$$

$$\varepsilon N_m = \int_{-1}^{1} N l_m d\zeta \quad (m=1,2,\ldots)$$

Аналогично [8, 9], получена замкнутая система уравнений, полностью определяющая решение задачи. Уравнения (5.6), (5.7) определяют граничные условия для бигармонических функций Φ_i. Система (5.9), (5.11) определяет все a_k и, наконец, из уравнения (5.11) находятся все граничные значения $b_m(s)$. Исключая с помощью систем (5.9) – (5.11) функции $a_k(s)$, $b_m(s)$ из уравнений (5.6), (5.7), получаем точную формулировку краевой задачи для определения внутреннего напряженно-деформируемого состояния плиты. Для плиты симметричного относительно срединной плоскости строения эта задача упрощается, расчленяясь на две независимые задачи относительно функций Φ_0, Φ_1.

6. Задачу можно упростить, если параметр ε достаточно мал, а граничные значения σ_n°, τ_{ns}°, τ_{nz}° таковы, что определяемые ими функционалы (5.8), (5.10), (5.12) являются достаточно медленно изменяющимися функциями параметра s. В этом случае к рассматриваемой задаче можно применить асимптотический метод в варианте [8, 9]. Будем искать решения в виде

$$\Phi_i=\Phi_{i0}+\varepsilon\Phi_{i1}+\ldots,\qquad a_k(s)=a_{k0}+\varepsilon a_{k1}+\ldots \tag{6.1}$$
$$b_m(s)=b_{m0}+\varepsilon b_{m1}+\ldots$$

предполагая, что внешняя нагрузка представима в виде разложений

$$N(s,\zeta)=\varepsilon(N^{(0)}+\varepsilon^2N^{(2)}+\ldots),\ T(s,\zeta)=\varepsilon(T^{(0)}+\varepsilon^2T^{(2)}+\ldots) \tag{6.2}$$
$$Z(s,\zeta)=\varepsilon^2(Z^{(0)}+\varepsilon^2Z^{(2)}+\ldots)$$

Подставляя (6.1), (6.2) в выражения (5.6)–(5.12) и используя для операторов S_m и $S_m{}^*$ их асимптотические представления [9], получаем рекуррентную систему для определения коэффициентов разложения (6.1). В первом приближении получаем следующие соотношения:

$$Q_n[\mu^{(0)}\Phi_{00}+(\mu^{(1)}-b\mu^{(0)})\Phi_{10}]_{n=0}=N_0^{(0)} \tag{6.3}$$
$$Q_s[\mu^{(0)}\Phi_{00}+(\mu^{(1)}-b\mu^{(0)})\Phi_{10}]_{n=0}=T_0^{(0)}$$

$$Q_n[\mu^{(1)}\Phi_{00}+(\mu^{(2)}-b\mu^{(1)})\Phi_{10}]_{n=0}+Q_n\sum_{i=0}^{1}r_i^{(1)}\Delta\Phi_i|_{n=0}=M_{nn}^{(0)} \tag{6.4}$$
$$\sum_{i=0}^{1}r_i^{(1)}\frac{\partial\Delta\Phi_i}{\partial n}+\partial_sQ_s[\mu^{(1)}\Phi_{00}+(\mu^{(2)}-b\mu^{(1)})\Phi_{10}]_{n=0}=Z_0^{(0)}+\frac{\partial M_{ns}^{(0)}}{\partial s}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_{pk}a_{k0}=\gamma_pN_p^{(0)}+Z_p^{(0)}+2\gamma_p\left[bQ_n\Phi_{10}-\sum_{i=0}^{1}(\alpha_p^{(i)}Q_n\Phi_{i0}+r_{ip}\Delta\Phi_{i0})\right]_{n=0} \tag{6.5}$$
$$C_{pk}=(\gamma_p+\gamma_k)\int_{-1}^{1}p_1f_k'f_p'd\zeta+(\gamma_p-\gamma_k)\int_{-1}^{1}[p_2(f_k''f_p-f_p''f_k)+(\gamma_k^2-\gamma_p^2)p_0f_kf_p]d\zeta$$

$$b_{m0}=\delta_m^{-2}[T_m^{(0)}-2l_m^{(1)}Q_n\Phi_{10}]_{n=0} \tag{6.6}$$

Разъясним полученные соотношения. Решение краевой задачи (6.3), (6.4) для бигармонических функций Φ_{00}, Φ_{10} совместно с формулами (4.12), (4.13) определяет асимптотически точное (с погрешностью $O(\varepsilon)$) внутреннее напряженно-деформированное состояние плиты и поэтому может служить критерием правильности той или иной прикладной теории неоднородных (многослойных) плит.

Задачу (6.3), (6.4) можно свести к последовательному решению двух независимых задач, введя новую бигармоническую функцию

$$\Phi=\mu^{(0)}\Phi_{00}+(\mu^{(1)}-b\mu^{(0)})\Phi_{10} \tag{6.7}$$

Последняя определяется граничными условиями (6.3). С помощью представления Гурса для Φ и формул Колосова – Мусхелишвили этой задаче можно придать классический вид.

Исключая из (6.4) с помощью (6.7) Φ_{00}, приходим к обобщенной задаче изгиба относительно функции Φ_{10}

$$(d_1\Delta+d_2Q_n)\Phi_{10}=M_{nn}{}^\circ=M_{nn}-\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(0)}}Q_n\Phi-\frac{r_1^{(1)}}{\mu^{(0)}}\Delta\Phi$$

$$[d_1\partial_n\Delta\Phi_{10}+d_2\partial_sQ_s\Phi_{10}]_{n=0}=Z_0{}^\circ+\partial_sM_{ns}{}^\circ,\qquad Z_0{}^\circ=Z_0-\frac{r_1^{(1)}}{\mu^{(0)}}\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial n}\Big|_{n=0}$$

$$M_{ns}{}^\circ=M_{ns}-\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(0)}}Q_n\Phi|_{n=0},\qquad d_1=r_1^{(1)}\left(b-\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(0)}}\right)+r_2^{(1)},\qquad d_2=\frac{\mu^{(0)}\mu^{(2)}-(\mu^{(1)})^2}{\mu^{(0)}}$$

Отметим, что для плит симметричного строения получаются независимые задачи относительно Φ_{00} и Φ_{10}.

Для определения a_{k0} получена бесконечная система (6.5), матрица которой зависит только от упругих параметров $\lambda(\zeta)$, $\mu(\zeta)$. Условия разрешимости этой системы рассмотрены в [14].

Определение следующих членов разложений (6.1), как в [17], позволяет построить уточненные прикладные теории.

7. Рассмотрим поведение напряжений на боковой поверхности плиты Г. Имеем

$$\sigma_n=\varepsilon\left\{2\mu\left[-bQ_n\Phi_{10}+\sum_{i=0}^{1}(\zeta^iQ_n\Phi_{i0}+r_i\Delta\Phi_{i0})\right]_{n=0}+\sum_{k=1}^{\infty}f_k''(\zeta)a_{k0}\right\}+ \tag{7.1}$$
$$+\varepsilon^2\left\{2\mu\left[-bQ_n\Phi_{11}+\sum_{i=0}^{1}(\zeta^iQ_n\Phi_{i1}+r_i\Delta\Phi_{i1})\right]_{n=0}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}[f_k''(\zeta)a_{k1}-2\mu aR^{-1}\gamma_k\alpha_k(\zeta)a_{k0}]+2\mu\sum_{m=1}^{\infty}\delta_ml_m(\zeta)b_m'\right\}+\ldots$$

$$\sigma_s=\varepsilon\left\{2\mu\left[-b\partial_n{}^2\Phi_{10}+\sum_{i=0}^{1}(\zeta^i\partial_n{}^2\Phi_{i0}+r_i\Delta\Phi_{i0})\right]_{n=0}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}[f_k''(\zeta)+2\mu\gamma_k{}^2\alpha_k(\zeta)]a_{k0}\right\}+$$
$$+\varepsilon^2\left\{2\mu\left[-b\partial_n{}^2\Phi_{11}+\sum_{i=0}^{1}(\zeta^i\partial_n{}^2\Phi_{i1}+r_i\Delta\Phi_{i1})\right]_{n=0}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}[(f_k''+2\mu\gamma_k{}^2\alpha_k)a_{k1}-2\mu aR^{-1}\gamma_k\alpha_ka_{k0}]-2\mu\sum_{m=1}^{\infty}\delta_ml_m(\zeta)b_m'\right\}+O(\varepsilon^2)$$

$$\sigma_z=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k{}^2f_k(a_{k0}+\varepsilon a_{k1}+\ldots)$$

$$\tau_{ns}=\varepsilon\left\{2\mu\left[-bQ_s\Phi_{10}+\sum_{i=0}^{1}\zeta^iQ_s\Phi_{i0}\right]_{n=0}-\mu\sum_{m=1}^{\infty}\delta_m{}^2l_mb_{m0}\right\}+$$
$$+\varepsilon^2\left\{2\mu\left[-bQ_s\Phi_{11}+\sum_{i=0}^{1}\zeta^iQ_s\Phi_{i1}\right]_{n=0}+2\mu\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\alpha_k(\zeta)a_{k0}-\right.$$

$$-\mu\sum_{m=1}^{\infty}[\delta_m^2 l_m(\zeta)b_{m1}-2l_m(\zeta)\delta_m b_{m0}]\Big\}+O(\varepsilon^2)$$

$$\tau_{nz}=-\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k f_k'(\zeta)a_{k0}+\varepsilon^2\Big[\sum_{i=0}^{1}r_i^*\partial_n\Delta\Phi_{i0}\Big|_{n=0}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(\zeta)(\gamma_k a_{k1}-0.5aR^{-1}a_{k0})+\mu\sum_{m=1}^{\infty}l_m'(\zeta)b_{m0}'\Big]+\ldots$$

$$\tau_{zs}=-\varepsilon\mu\sum_{m=1}^{\infty}\delta_m l_m' b_{m0}+\varepsilon^2\Big[\sum_{i=0}^{1}r_i^*\partial_s\Delta\Phi_{i0}\Big|_{n=0}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(\zeta)a_{k0}'-\mu\sum_{m=1}^{\infty}l_m'(\delta_m b_{m1}-0.5aR^{-1}b_{m0})\Big]+\ldots$$

Анализ выражений (7.1) показывает, что, как и в однородной плите [8, 9], погранслойные решения в напряжениях σ_n, σ_s и τ_{ns} имеют тот же порядок относительно ε, что и основное решение, а в напряжениях σ_z, τ_{nz}, τ_{sz} они играют основную роль и делают эти напряжения того же порядка, что и σ_n, σ_s, τ_{ns}.

Отметим, что разработанный подход можно обобщить и на неоднородные трансверсально изотропные плиты, на плиты из вязкоупругих материалов и т. п.

Поступила 16 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гусейн-Заде М. И.* К построению теории изгиба слоистых пластинок. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
2. *Гусейн-Заде М. И.* Напряженное состояние погранслоя для слоистых пластинок. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1969.
3. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г.* Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
4. *Кадомцев И. Г.* Краевой эффект в трехслойной плите. Изв. Северо-Кавказ. научн. центра высшей школы, 1973, № 4.
5. *Рапопорт Р. М.* Некоторые задачи теории изгиба толстых многослойных плит. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1966, т. 80.
6. *Раппопорт Р. М.* К теории изгиба слоистых плит. В сб.: Расчет пространственных конструкций, вып. 13, М., Стройиздат, 1970.
7. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
8. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
9. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
10. *Устинов Ю. А.* Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит. Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 4.
11. *Папкович П. Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
12. *Папкович П. Ф.* Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит. ПММ, 1941, т. 5, вып. 3.
13. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем, для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1954, т. 17, вып. 2.
14. *Устинов Ю. А., Юдович В. И.* О полноте элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
15. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
16. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
17. *Аксентян О. К., Устинов Ю. А.* Построение уточненных прикладных теорий для плиты на основе уравнений теории упругости. ПММ, 1972, т. 3, вып. 2.