МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1975

УДК 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОСНОВНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

П. И. ПЕРЛИН

(Москва)

Разработка теории многомерных (в частности двумерных) систем сингулярных интегральных уравнений проведена в [1, 2]. Построены системы сингулярных уравнений, соответствующие основным задачам теории упругости для областей, ограниченных поверхностями Ляпунова. Исследованы вопросы разрешимости этих уравнений и установлены дифференциальные свойства искомых функций в зависимости от краевых условий.

Численное решение указанных уравнений затрудняется отсутствием квадратурных формул для вычисления двумерных сингулярных интегралов. Для устранения этого затруднения в работе [2] предложены эквивалентные сингулярным уравнениям теории упругости так называемые функциональные уравнения. Вопросы численного решения сингулярных уравнений теории упругости методом механических квадратур рассматривались в работах [3, 4]. Для случая сферической поверхности оказался эффективным аппарат теории рядов [5].

Предлагаемый ниже способ вычисления сингулярных интегралов, присутствующих в интегральных уравнениях теории упругости, основан на методе исключения особенностей [6]. Заметим, что аналогичный подход использовался при разработке численных методов вычисления сингулярных интегралов [7] и решения интегральных уравнений [8] в одномерном случае.

Приведем сингулярные интегральные уравнения, соответствующие первой и второй, внутренней и внешней основным задачам теории упругости

$$\varphi(p)-\varkappa\int_S \mathbf{K}(q,p)\varphi(q)\,dS_q=\mathbf{F}(p) \tag{1}$$

$$\varphi(p)-\varkappa\int_S \mathbf{K}(q,p)\varphi(q)\,dS_q=-\int_S \mathbf{\Gamma}(q,p)\mathbf{f}(q)\,dS_q \tag{2}$$

где S — поверхность, ограничивающая тело, $\mathbf{K}(q, p)$ и $\mathbf{\Gamma}(q, p)$ — некоторые матрицы. Уравнение (1) при $\varkappa=1$ и $\mathbf{F}(p)=-\mathbf{f}(p)$ соответствует первой внутренней задаче (обозначим ее через D_i), а при $\varkappa=-1$ и $\mathbf{F}(p)=\mathbf{f}(p)$ — первой внешней задаче (D_a). Уравнение (2) при $\varkappa=-1$ соответствует второй внутренней задаче (T_i), а при $\varkappa=1$ — второй внешней задаче (T_a). Выше через вектор-функцию $\mathbf{f}(p)$ обозначались краевые условия. Отметим, что матрица $\mathbf{\Gamma}(q, p)$ является регулярной.

Доказано, что интегральные уравнения (1), (2) имеют только вещественные собственные числа, причем они отсутствуют на полуинтервале $-1<\varkappa\leqslant1$. Поэтому интегральные уравнения задач D_i и T_a разрешимы при произвольных правых частях, в то время как уравнения задач D_a и T_i разрешимы при выполнении некоторых соотношений (условий ортогональности). Полагаем, что эти условия удовлетворяются. Заметим, что для задачи T_i эти условия совпадают с условием равенства нулю главного вектора и главного вектор-момента внешних сил.

Сингулярные интегралы, присутствующие в уравнениях (1), (2), принадлежат к тому классу интегралов, для вычисления которых может быть эффективно применен метод исключения особенностей. Приведем соотношение

$$\int\limits_S \mathbf{K}(q,p)\,dS_q=-\mathbf{E}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Это равенство есть аналог интеграла Гаусса. На основании этого равенства сингулярный интеграл в уравнениях (1) и (2) может преобразовать к виду

$$\int\limits_S \mathbf{K}(q,p)\varphi(q)\,dS_q=\int\limits_S \mathbf{K}(q,p)\,[\varphi(q)-\varphi(p)]\,dS_q-\varphi(p) \tag{3}$$

Представление (3) не содержит сингулярных членов и может быть использовано для численного решения уравнений (1), (2).

Остановимся на методе малого параметра [9]. Ищем решение в виде ряда

$$\varphi(p)=\varphi_0(p)+\varkappa\varphi_1(p)+\varkappa^2\varphi_2(p)+\ldots+ \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнения (1), (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$, придем к рекуррентному соотношению

$$\varphi_n(p)=\int\limits_S \mathbf{K}(q,p)\,\varphi_{n-1}(q)\,dS_q \quad {\scriptstyle (n=1,2,\ldots)}, \qquad \varphi_0(p)=\mathbf{F}_1(p) \tag{5}$$

где $\mathbf{F}_1(p)$ — правая часть рассматриваемых уравнений.

Поскольку значение $\varkappa=-1$ является полюсом резольвенты, ряд (4) для задач D_i и T_a не будет сходящимся, так как соответствующее им значение $\varkappa=1$ расположено на круге сходимости. Для устранения возникающего затруднения следует воспользоваться какой-либо модификацией метода, например уничтожением полюса посредством домножения [10]. Тогда применительно к рассматриваемым уравнениям можно утверждать, что ряд

$$\varphi(p)=0.5\varphi_0(p)+0.5[\varphi_0(p)+\varphi_1(p)]+0{,}5[\varphi_1(p)+\varphi_2(p)]+\ldots \tag{6}$$

будет сходящимся. Ряд (6) фактически отличается от ряда (4) (при $\varkappa=1$) тем, что последняя удерживаемая при численной реализации функция берется с коэффициентом 0.5.

В случае задачи T_i из (4) оказывается сходящимся из-за выполнения условия ортогональности. Указанное обстоятельство может быть извлечено из работ [2, 9]. (Из-за погрешности численной реализации сходимость ряда (4) следует понимать в асимптотическом смысле.)

Реализация рекуррентного соотношения (5) может быть произведена с помощью метода исключения особенностей, поскольку функция $\mathbf{F}(p)$ принадлежит классу Гельдера — Липшица по постановке задачи, а получающиеся в ходе последовательных построений функции $\varphi_i(p)$ — на основании известных свойств сингулярных операторов.

Опишем одну из возможных расчетных схем построения функций $\varphi_i(p)$. Разобьем поверхность S на малые многоугольники, вершины которых будем называть узловыми точками и обозначать через q_j. Выберем в каждой из малых областей по расположенной в центральной части точке, которые будем называть опорными и обозначать через p_i ($i=1, 2, \ldots, N$; N — полное число многоугольников). Определяем в опорных точках значения функций $\varphi_0(p)$, приравняв их согласно (5) правым частям. Далее, например, посредством линейной интерполяции найдем значения функции

$\varphi_0(q_j)$ во всех узловых точках. После этого переходим к вычислению во всех опорных точках p_j значений функций $\varphi_1(p_j)$, используя предлагаемый выше метод исключения особенностей. Вычисление появляющегося при этом регулярного интеграла можно проводить по какой-либо квадратурной формуле, например посредством аппроксимации подынтегрального выражения линейной функцией. Тогда каждое i-е слагаемое интегральной суммы будет представляться как произведение среднего значения по узловым точкам подынтегрального выражения $\mathbf{K}(p_i, q_j)[\boldsymbol{\varphi}(q_j)-\boldsymbol{\varphi}(p_j)]$ на площадь многоугольника. Определив таким образом во всех точках p_i значения функции $\varphi_i(p)$, посредством линейной интерполяции находим ее значения в узловых точках и так далее.

Очевидно, что во всех рассматриваемых задачах можно выбрать столь мелкое разбиение поверхности S на малые области, что предлагаемый процесс приведет к решению с произвольной точностью.

В качестве примера рассмотрим первую внешнюю задачу для сферы, радиус которой обозначим R. Будем считать, что смещение на поверхности δ постоянно по величине и направлено по нормали. Можно показать, что точное значение искомой плотности $\varphi(p)$ равно по величине $1.5\delta(1-\nu)/(1+\nu)$ (ν – коэффициент Пуассона) и направлено также по нормали к поверхности.

Введем на поверхности сферы сферическую систему координат и разобьем поверхность на малые четырехугольники, разделив ее соответственно по углу $\varphi(-\pi<\varphi<\pi)$ на n, а по углу $\theta(-\pi/2<\theta<\pi/2)$ на m частей.

Ниже приведены значения величины искомой плотности в зависимости от чисел m и n при $\nu=0.3$.

$n\times m$	10×6	20×20	30×30	Точное значение
φ/δ	0.821	0.813	0.810	0.808

Поступила 20 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
2. *Купрадзе В. Д.* Методы теории потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
3. *Cruse T. A.* Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Internat. J. Solids and Structures, 1969, vol. 5, Nо. 12.
4. *Александров А. Я.* Решение основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 2.
5. *Перлин П. И.* Решение первой основной осесимметрической задачи теории упругости для области, ограниченной эллипсоидом и сферой. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 2.
6. *Канторович Л. В.* О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей. Матем. сб., 1934, т. 41, вып. 2.
7. *Ebert Jost.* Ein Beitrag zur Lösung ebener Randwertprobleme mit Hilfe von Funktionalgleichungen und der elektrischen Potentialanalogie. Schiffbauforschung, 1972, Bd 11, Nr. 5—6.
8. *Фан Ван-Хап.* О применении метода замены интеграла конечной суммой к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1969, № 3.
9. *Pham The Lai.* Potentiels elastiques; tensors de Creen et de Neumann. J. de Méc., 1967, vol. 6, № 2.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.– Л., Физматгиз, 1962.