

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
ПЛОСКИХ, ОСЛАБЛЕННЫХ ВЫРЕЗАМИ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ  
ОБЛАСТЕЙ, НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ

В. А. ДУДНИКОВ, Н. Ф. МОРОЗОВ

(Ленинград)

На основе моментной теории упругости, учитывающей стесненное вращение элементов, исследуется напряженно-деформированное состояние плоских областей, ослабленных вырезами с угловыми точками. Получены асимптотические формулы, характеризующие напряженно-деформированное состояние вблизи вершин угловых вырезов. Подробно рассмотрен случай трещины. Выписаны главные члены асимптотики усредненного угла поворота и тангенс истинного угла поворота.

Модельной задачей, несущей основные особенности и трудности проблемы, является задача о растяжении плоскости, ослабленной конечным прямолинейным разрезом. Решение задачи методами классической линейной теории упругости приведено, например, в [1]. При таком подходе оказывается, что произвольно малая растягивающая сила вызывает на конце разреза, вообще говоря, бесконечные напряжения, деформации и бесконечный тангенс угла поворота. При многоугольных вырезах, кроме того, можно наблюдать явление «наложения берегов», о теоретической возможности такого явления упоминается в [1]. Пример, в котором наложение берегов реализуется, приведен в [2]. Обнаруженное явление дополнительно свидетельствует о необходимости уточненной постановки условий задачи в окрестности нерегулярных точек.

Ниже рассматривается задача, поставленная В. В. Новожиловым: выяснить характер особенности напряженно-деформированного состояния в конце разреза с учетом моментных напряжений. Вопросы, связанные с введением в головке трещины сил сцепления, здесь не обсуждаются. Для плоскости с полубесконечным разрезом эта задача исследовалась в работах [3, 4], однако оставалось сомнение в возможности распространения полученных результатов на случай конечного выреза.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область с прямолинейным разрезом  $\Gamma = \{(x, y); y=0, -1 \leq x \leq 1\} \subset \Omega$  (фигура). (Заметим, что дальнейшие рассуждения существенно не изменятся при переходе к многоугольным вырезам.)

Рассмотрим в  $\Omega$  систему уравнений в перемещениях  $u$  и  $v$  (см., например, [5, 6])

$$(1) \quad \frac{E}{1+\nu} \Delta [l^2 (v_{xy} - u_{yy}) - u] + p_x = 0, \quad \frac{E}{1+\nu} \Delta [l^2 (u_{xy} - v_{xx}) + v] + p_y = 0$$

Граничные условия на разрезе имеют вид

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_y|_{\Gamma^\pm} &\equiv \frac{E}{1+\nu} v_y + \nu p|_{\Gamma^\pm} = -q_\pm(x) \\ \tau_{yx}|_{\Gamma^\pm} &\equiv \frac{E}{2(1+\nu)} [l^2 \Delta (v_x - u_y) + v_x + u]|_{\Gamma^\pm} = 0 \\ \mu_y|_{\Gamma^\pm} &\equiv \frac{El^2}{1+\nu} (u_{yy} - v_{xy})|_{\Gamma^\pm} = 0 \end{aligned}$$

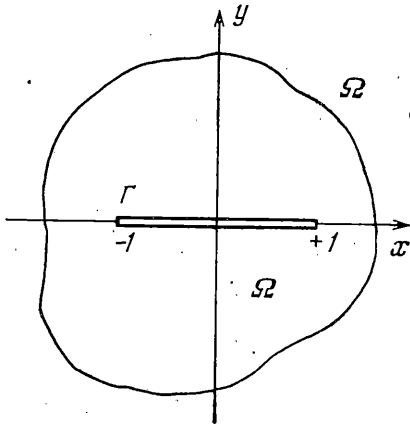
Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа, индексы  $x$  и  $y$  обозначают дифференцирование по  $x$  и  $y$  соответственно,  $\Gamma^\pm$  — верхний и нижний «берега разреза».

Внешнюю часть границы  $\Omega$  обозначим через  $\partial\Omega$ . На  $\partial\Omega$  зададим следующие граничные условия:

$$(3) \quad u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \omega \equiv \frac{1}{2}(v_x - u_y)|_{\partial\Omega} = 0$$

Заметим, что  $p \equiv \sigma_x + \sigma_y$ . При  $\nu \neq \frac{1}{2}$  в случае сжимаемой среды  $p = E[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}(u_x + v_y)$  — еще одна неизвестная функция (при  $\nu = \frac{1}{2}$ ), и к системе (1) добавляется условие несжимаемости  $u_x + v_y = 0$ . Составим функционал потенциальной энергии

$$(4) \quad J = \frac{E^*}{1+\nu} \iint_{\Omega} \left\{ u_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{2}(u_y + v_x)^2 + l^2[(v_{xx} - u_{xy})^2 + (u_{xy} - v_{yy})^2] + \nu p(u_x + v_y) \right\} d\Omega + \int_{\Gamma^+} q_+ v dx - \int_{\Gamma^-} q_- v dx$$



Введем гильбертово пространство  $H$  векторов  $W = \{u, v\}$ , удовлетворяющих условиям (3) с нормой

$$\|W\| = \left\{ \iint_{\Omega} (|u|^2 + |v|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\omega_x|^2 + |\omega_y|^2) d\Omega \right\}^2$$

Функционал (4) является полуограниченным в  $H$ . Можно показать, что существует единственный вектор  $W_0 = \{u_0, v_0\} \in H$ , которому соответствует минимум функционала. Этот вектор является обобщенным решением задачи (1)–(3), причем если  $q_{\pm}(x)$  — гладкие функции, то и  $\{u_0, v_0\}$  имеют соответствующую гладкость всюду в  $\Omega$  за исключением угловых точек границы.

Далее выясняется поведение обобщенного решения вблизи концов разреза  $\Gamma$ . Следуя работе [5], введем функции  $\varphi$  и  $\psi$ , которые связаны с перемещениями следующим образом:

$$(5) \quad \psi = \frac{l^2 E}{1+\nu} (v_x - u_y)$$

$$\varphi_{yy} = \frac{E}{1+\nu} u_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (u_x + v_y) + \frac{l^2 E}{1+\nu} (v_{xxy} - u_{xyy})$$

$$\varphi_{xx} = \frac{E}{1+\nu} v_y + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (u_x + v_y) - \frac{l^2 E}{1+\nu} (v_{xxy} - u_{xxy})$$

$$\varphi_{xy} = \frac{El^2}{2(1+\nu)} (v_{xxx} - u_{xyy} - v_{xyy} + u_{yyy}) - \frac{E}{2(1+\nu)} (v_x + u_y)$$

Легко написать и обратную связь

$$\frac{E}{1+\nu} u_x = \varphi_{yy} - \psi_{xy} - \nu \Delta \varphi, \quad \frac{E}{1+\nu} v_x = -\varphi_{xy} + \frac{1}{2}(\psi_{xx} - \psi_{yyy}) + \frac{1}{2} l^{-2} \psi$$

$$\frac{E}{1+\nu} v_y = \varphi_{xx} + \psi_{xy} - \nu \Delta \varphi, \quad \frac{E}{1+\nu} u_y = -\varphi_{xy} + \frac{1}{2}(\psi_{xx} - \psi_{yyy}) - \frac{1}{2} l^{-2} \psi$$

Из условий совместности получаем систему уравнений для  $\varphi$  и  $\psi$

$$(6) \quad \psi_y - l^2 \Delta \psi_y = 2(1-\nu) l^2 \Delta \varphi_x, \quad \psi_x - l^2 \Delta \psi_x = -2(1-\nu) l^2 \Delta \varphi_y$$

Условия на разрезе  $\Gamma$  записываются так:

$$(7) \quad \varphi_{xx} + \psi_{xy} |_{\Gamma^\pm} = -q_\pm, \quad -\varphi_{xy} + \psi_{xx} |_{\Gamma^\pm} = 0, \quad \psi_y |_{\Gamma^\pm} = 0$$

Для простоты будем считать, что функции  $q_\pm(x)$  обращаются в нуль вблизи концов разреза.

Изучение поведения решения вблизи угловых точек проводится по методу, изложенному в работе [7]. Рассмотрим, например, решение вблизи правого конца разреза. Введем полярные координаты  $(r, \theta)$  с началом в точке  $\{x=1, y=0\}$ . Обозначим через  $\eta(r)$  «срезающую» функцию, бесконечно дифференцируемую, равную единице вблизи вершины и нулю в остальной части  $\Omega$ . Подставляя в уравнения (6), (7) вместо  $\varphi$  и  $\psi$  функции  $\eta\varphi$  и  $\eta\psi$ , обозначая затем  $\eta\varphi$  и  $\eta\psi$  снова через  $\varphi$  и  $\psi$  и отбрасывая несущественные слагаемые, получим задачу на плоскости с разрезом вдоль полуоси  $\{0 \leq r < \infty, \theta = \pi\}$

$$(8) \quad \Delta \psi_r - \gamma r^{-1} \Delta \varphi_\theta = f_1, \quad -r^{-1} \Delta \psi_\theta - \gamma \Delta \varphi_r = f_2, \quad \gamma = 2(1-\nu)$$

$$(9) \quad \varphi_{rr} |_{\theta=\pm\pi} = g_\pm^{(1)}, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^{-1} \varphi_\theta - \psi_r) |_{\theta=\pm\pi} = g_\pm^{(2)}, \quad \psi_\theta |_{\theta=\pm\pi} = g_\pm^{(3)}$$

Через  $f_1, f_2, g_\pm^{(j)}$  обозначены гладкие функции с компактными носителями, равные нулю при малых  $r$ , возникающие вследствие дифференцирования срезки  $\eta(r)$ . Используя произвол в выборе  $\varphi$  (эта функция, как известно, определена с точностью до слагаемых, линейно зависящих от  $x$  и  $y$ ), перепишем условия (9) в виде

$$(10) \quad \varphi |_{\theta=\pm\pi} = h_\pm^{(1)}, \quad \varphi_\theta + r \psi_r |_{\theta=\pm\pi} = h_\pm^{(2)}, \quad \psi_\theta |_{\theta=\pm\pi} = h_\pm^{(3)}$$

Будем писать асимптотику решения системы (8), удовлетворяющую условиям, аналогичным (10) на сторонах угла  $\theta = \pm\alpha, 0 < \alpha \leq \pi$ .

После применения преобразования Меллина

$$u^m(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r^{i\lambda} u(r) dr$$

задача примет вид

$$(11) \quad \psi_{\theta\theta}^m - \lambda^2 \psi^m + \frac{\gamma}{i\lambda + 2} (\varphi_{\theta\theta}^m - \lambda^2 \varphi^m) = f_1^m(\lambda - 3i)$$

$$\psi_{\theta\theta}^m - \lambda^2 \psi^m - \gamma(i\lambda + 2) (\varphi_{\theta\theta}^m - \lambda^2 \varphi^m) = f_2^m(\lambda - 3i)$$

$$(12) \quad \varphi^m(\lambda, \pm\alpha) = h_\pm^{m(1)}(\lambda), \quad \varphi_\theta^m(\lambda, \pm\alpha) + i\lambda \psi^m(\lambda, \pm\alpha) = h_\pm^{m(2)}(\lambda),$$

$$\psi_\theta^m(\lambda, \pm\alpha) = h_\pm^{m(3)}(\lambda)$$

Фундаментальная система решений для уравнений (11), если  $\lambda \neq 0, i$ , такова:

$$Y_1 = \begin{vmatrix} \gamma^{-1} \sin i\lambda\theta, & \gamma^{-1} \cos i\lambda\theta \\ \cos i\lambda\theta, & \sin i\lambda\theta \end{vmatrix}_z, \quad Y_2 = \begin{vmatrix} \gamma^{-1} \sin i\lambda\theta, & \gamma^{-1} \cos i\lambda\theta \\ -\cos i\lambda\theta, & -\sin i\lambda\theta \end{vmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{vmatrix} \gamma^{-1} \sin(i\lambda + 2)\theta, & \gamma^{-1} \cos(i\lambda + 2)\theta \\ -\cos(i\lambda + 2)\theta, & \sin(i\lambda + 2)\theta \end{vmatrix}$$

Фундаментальная система решений (11) для  $\lambda=i$  имеет вид

$$Y_1 = \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix}, Y_2 = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}, Y_3 = \begin{vmatrix} \gamma^{-1} \cos \theta & -\gamma^{-1} \sin \theta \\ \theta \sin \theta & \theta \cos \theta \end{vmatrix}$$

Запишем условия (12) в виде

$$(13) \quad \begin{aligned} U_1 y^m(\lambda, \theta) |_{\theta=\pm\alpha} &= h_1^m(\lambda), & U_2 y^m(\lambda, \theta) |_{\theta=\pm\alpha} &= h_2^m(\lambda) \\ U_3 y^m(\lambda, \theta) |_{\theta=\pm\alpha} &= h_3^m(\lambda) \end{aligned}$$

где  $y^m(\lambda, \theta) = (\varphi^m(\lambda, \theta), \psi^m(\lambda, \theta))$ ,  $h_j^m(\lambda) = (h_+^{m(j)}(\lambda), h_-^{m(j)}(\lambda))$ .

$$U_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, U_2 = \begin{vmatrix} \partial/\partial\theta & i\lambda \\ \partial/\partial\theta & i\lambda \end{vmatrix}, U_3 = \begin{vmatrix} 0 & \partial/\partial\theta \\ 0 & \partial/\partial\theta \end{vmatrix}$$

Собственные числа задачи (11), (13) являются корнями определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(Y_1) & U_1(Y_2) & U_1(Y_3) \\ U_2(Y_1) & U_2(Y_2) & U_2(Y_3) \\ U_3(Y_1) & U_3(Y_2) & U_3(Y_3) \end{vmatrix}$$

Вычисляя определитель, получим

$$(14) \quad \Delta = -2^5 \gamma^{-4} (i\lambda)^2 \sin i\lambda\alpha \cos i\lambda\alpha \{ [ (i\lambda+2)\gamma - i\lambda ] \sin i\lambda\alpha \cos (i\lambda+2)\alpha + \\ + [ (i\lambda+2) - i\lambda\gamma ] \cos i\lambda\alpha \sin (i\lambda+2)\alpha \} \{ [ (i\lambda+2)\gamma - i\lambda ] \cos i\lambda\alpha \sin (i\lambda+2)\alpha + \\ + [ (i\lambda+2) - i\lambda\gamma ] \sin i\lambda\alpha \cos (i\lambda+2)\alpha \}$$

Для  $\lambda=i$  определитель равен  $\Delta = -2^5 \sin \alpha \cos \alpha [ (\gamma^{-1}-1)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \alpha^2 (\gamma^{-1}+1)^2 ]$ .

Рассмотрим снова случай  $\alpha=\pi$ ,  $\gamma$  — произвольное число (физически допустимыми являются значения  $\gamma$  из интервала  $1 \leq \gamma \leq 2$ ). Тогда  $\Delta = -2^4 \gamma^{-4} (\gamma+1)^2 (i\lambda)^2 \sin^2 2i\lambda\pi$ , и, следовательно, корни определителя  $\Delta$  таковы:  $\lambda_k = -ik/2$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Вклад в асимптотику решения с конечной энергией (4) могут вносить лишь те собственные значения  $\lambda_k$ , для которых  $k \leq -1$ . Заметим, что влияние слагаемых вида  $\psi_y$  и  $\psi_x$  в (6), которые не учтены в (8), начинает сказываться лишь с  $\lambda_k = 3/2i$ , поэтому из задачи (8), (9) можно получить четыре первых члена асимптотического решения задачи (6), (7).

Каждому значению  $\lambda_k$  соответствуют три собственных вектора  $\Phi_k(\theta)$  (за исключением особого случая  $\lambda_k=i$ ). Присоединенных векторов нет (полностью функции Грина — простые). Собственному числу  $\lambda_1 = 1/2i$  отвечают собственные векторы

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(\theta) &= \begin{vmatrix} \cos 1/2\theta \\ -\sin 1/2\theta \end{vmatrix}, & \Phi_1^{(2)}(\theta) &= \begin{vmatrix} -\gamma^{-1}(\sin 1/2\theta + \sin 3/2\theta) \\ 3 \cos 1/2\theta + \cos 3/2\theta \end{vmatrix} \\ \Phi_1^{(3)}(\theta) &= \begin{vmatrix} \gamma^{-1}[(3+\gamma) \cos 1/2\theta + (1+\gamma) \cos 3/2\theta] \\ (3+\gamma) \sin 1/2\theta + (1+\gamma) \sin 3/2\theta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Числу  $\lambda_2=i$  отвечает лишь один вектор  $\Phi_2(\theta) = \begin{vmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{vmatrix}$

Числу  $\lambda_3=3/2i$  — векторы вида

$$\begin{aligned} \Phi_3^{(1)}(\theta) &= \begin{vmatrix} \cos 3/2\theta \\ -\sin 3/2\theta \end{vmatrix}, & \Phi_3^{(2)}(\theta) &= \begin{vmatrix} -3\gamma^{-1}(\sin 3/2\theta + \sin 1/2\theta) \\ \cos 3/2\theta + 3 \cos 1/2\theta \end{vmatrix} \\ \Phi_3^{(3)}(\theta) &= \begin{vmatrix} \gamma^{-1}[(1+3\gamma) \cos 3/2\theta + 3(1+\gamma) \cos 1/2\theta] \\ (1+3\gamma) \sin 3/2\theta + 3(1+\gamma) \sin 1/2\theta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Числу  $\lambda_4=2i$

$$\Phi_4^{(1)}(\theta) = \begin{vmatrix} \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{vmatrix}, \quad \Phi_4^{(2)}(\theta) = \begin{vmatrix} -\sin 2\theta \\ \gamma \cos 2\theta - (\gamma+1) \end{vmatrix}, \quad \Phi_4^{(3)}(\theta) = \begin{vmatrix} \cos 2\theta - 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Асимптотика искомого решения имеет вид

(15)

$$y(r, \theta) = \sum_{1 \leq |k| \leq 4} \sum_{j=1}^3 C_j^{(k)} \Phi_k^{(j)} r^{-i_k} + R(r, \theta), \quad R(r, \theta) = o(r^{\delta/2+\varepsilon}) \text{ при } r \rightarrow 0$$

где  $\varepsilon$  — произвольное малое положительное число,  $C_j^{(k)}$  — некоторые постоянные.

Пользуясь формулами связи между напряжениями и функциями  $\varphi$  и  $\psi$  (см., например, [4])

(16)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} - \frac{1}{r} \psi_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \psi_{\theta}, & \sigma_{\theta} &= \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_{r\theta} - \frac{1}{r^2} \psi_{\theta} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \varphi_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta} - \frac{1}{r} \psi_r - \frac{1}{r^2} \psi_{\theta\theta}, & \tau_{\theta r} &= -\frac{1}{r} \varphi_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta} + \psi_{rr} \\ \mu_r &= \psi_r, & \mu_{\theta} &= \frac{1}{r} \psi_{\theta} \end{aligned}$$

и условием конечности энергии, можно представить главные члены асимптотического разложения решения вблизи точки (1, 0) в виде

(17)

$$\begin{aligned} J(r, \theta)^{(1)} &= C_1^{(1)} r^{1/2} \Phi_1^{(1)}(\theta) + C_1^{(2)} r \Phi_2(\theta) + \\ &+ r^{3/2} [C_1^{(3)} \Phi_3^{(2)}(\theta) + C_2^{(3)} \Phi_3^{(2)}(\theta) + C_3^{(3)} \Phi_3^{(3)}(\theta)] + \dots \end{aligned}$$

Если  $q_+ = q_-$  и область  $\Omega$  симметрична, то в (17)  $C_2^{(2)} = 0$ , и главные члены асимптотического разложения приобретают вид

(18)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{C_3^{(3)}}{4\gamma} r^{-1/2} \left[ (1+3\gamma) \cos \frac{3}{2}\theta - (5-\gamma) \cos \frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_{\theta} &= \frac{C_3^{(3)}}{4\gamma} r^{-1/2} \left[ (1+3\gamma) \cos \frac{3}{2}\theta + (3+\gamma) \cos \frac{\theta}{2} \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{C_3^{(3)}}{4\gamma} r^{-1/2} \left[ (1+3\gamma) \sin \frac{3}{2}\theta + (1-5\gamma) \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ \tau_{\theta r} &= \frac{C_3^{(3)}}{4\gamma} r^{-1/2} (1+3\gamma) \left[ \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ \mu_r &= \frac{1}{2} C_1^{(1)} r^{-1/2} \sin \frac{1}{2}\theta, & \mu_{\theta} &= \frac{1}{2} C_1^{(1)} r^{-1/2} \cos \frac{1}{2}\theta \end{aligned}$$

что совпадает с формулами, полученными иным методом в [8].

Пользуясь соотношениями (15) с учетом (5) и (18), получаем вблизи конца трещины выражения для главных членов асимптотики усредненно-го угла поворота  $\omega$  и для тангенса истинного угла поворота  $\theta^*$

(19)

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{C_1^{(1)}}{2l^2} r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \operatorname{tg} \theta^* &= \frac{v_x}{1+u_x} = \\ &= \frac{2\omega + (1+\nu) [(\sigma_r - \sigma_{\theta}) \sin 2\theta + (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) \cos 2\theta] E^{-1}}{1 + (1+\nu) [(\cos^2 \theta - \nu) \sigma_r + (\sin^2 \theta - \nu) \sigma_{\theta} - (\tau_{r\theta} - \tau_{\theta r}) \sin \theta \cos \theta] E^{-1}} \end{aligned}$$

Как видно,  $\omega$  непрерывен и равен нулю в вершине трещины, а  $\theta^*$  претерпевает разрыв: справа от точки  $(1, 0)$  на оси абсцисс  $\theta^*=0$ , слева  $-\theta^*=\pm\pi/2$ .

Следует отметить, что при условии  $\gamma=1$ ,  $\alpha\in(0, \pi)$  (14) принимает вид:  $\Delta=-2^6(i\lambda)^2 \sin 2i\lambda\alpha \sin^2 2(i\lambda+1)\alpha$ . Собственные числа таковы:  $\lambda_k=-ik\pi/2\alpha$ ,  $\mu_m=-i(m\pi/2\alpha-1)$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Рассмотрим два случая. 1)  $0<\alpha\leq\pi/2$ . Здесь главный член асимптотики решения задачи (6), (7), обладающего конечной энергией, определяется числом  $\mu_1=i(\pi/2\alpha+1)$ , которому отвечают два собственных вектора

$$\Phi(\theta) = \begin{vmatrix} \sin(\pi/2\alpha+1)\theta - \sin(\pi/2\alpha-1)\theta \\ (\pi/2\alpha-1)(\pi/2\alpha+1)^{-1} \cos(\pi/2\alpha+1)\theta - \cos(\pi/2\alpha-1)\theta \end{vmatrix}$$

$$\Psi(\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\pi/2\alpha+1)\theta + \cos(\pi/2\alpha-1)\theta \\ -(\pi/2\alpha-1)(\pi/2\alpha+1)^{-1} \sin(\pi/2\alpha+1)\theta - \sin(\pi/2\alpha-1)\theta \end{vmatrix}$$

Присоединенных векторов нет. Решение задачи в окрестности точки  $r=0$  имеет вид

$$y(r, \theta) = r^{\pi/2\alpha+1}(C_1\Phi(\theta) + C_2\Psi(\theta)) + o(r^{\pi/\alpha+\varepsilon}), \text{ где } \varepsilon>0, C_1, C_2 = \text{const.}$$

2) Допустим теперь, что  $\pi/2<\alpha<\pi$ . Собственное число является простым. Решение в окрестности вершины углового выреза имеет вид

$$y(r, \theta) = Cr^{\pi/2\alpha}\chi(\theta) + o(r^{\pi/\alpha+\varepsilon}), \quad \chi(\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\pi\theta/2\alpha) \\ -\sin(\pi\theta/2\alpha) \end{vmatrix}$$

На основе проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

1. Из формул (18), (19) следует, что в окрестности вершины трещины качественное изменение по сравнению с классической линейной теорией упругости претерпевает лишь  $\omega$ , приобретая гладкость. Напомним, что в классической теории  $\omega \sim \omega_1(\theta)r^{-1/2}$ . Остальные характеристики сохраняют порядок сингулярности.

2. Конечность разреза  $\Gamma$  и вид области  $\Omega$  сказываются лишь на количественных значениях коэффициентов интенсивности  $C_j^k$  в формулах (18), (19).

3. Заметим, что результаты [8] определенным образом связаны с симметричным характером внешней нагрузки, а также с конкретным видом исследуемой области  $\Omega$  и прямолинейностью разреза. Эти условия не являются сколько-нибудь существенными для применения методов, изложенных выше, причем значительно упрощаются математические выкладки и дается обобщение результатов работы [8].

Поступила 19 III 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. Морозов Н. Ф. К вопросу о деформированном состоянии плоских упругих областей с угловыми вырезами. Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон., 1972, вып. 3, № 13.
3. Каландия А. И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
4. Морозов Н. Ф. Особенности однородных решений плоской задачи с полубесконечным разрезом в моментной теории упругости. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 5.
5. Mindlin R. D. Influence of couple-stresses on stress-concentration. Exptl. Mech., 1963, vol. 3, No. 1. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1964, № 4.)
6. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1962, vol. 11, No. 5. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1964, № 4.)
7. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1.
8. Sternberg Eli, Muki Rokuro. The effect of couple-stresses on the stress-concentration around a crack. Internat. J. Solids and Structures, 1967, vol. 3, No. 1.