МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1975

УДК 539.3

КРУЧЕНИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ПЛОСКОЙ ЩЕЛЬЮ ИЛИ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, А. П. ПОДДУБНЯК

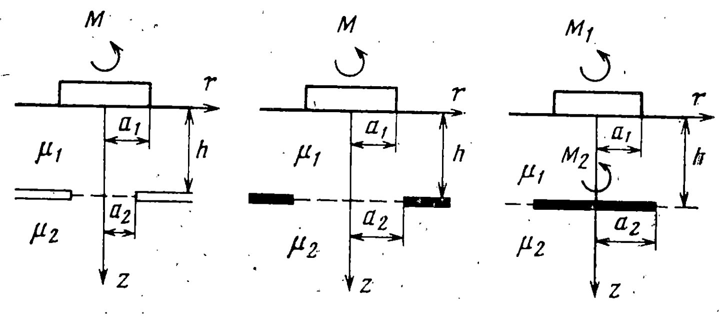
(Львов)

Кручение двухслойной упругой среды без внутренних дефектов рассматривалось в работах [1, 2] Влияние щели на напряженное состояние упругого тела при кручении учитывалось в публикациях [3–8], а наличие неплоских включений исследовалось в работах [9–11].

Здесь изучается осесимметричная задача о кручении двухслойной среды плоским круглым штампом при наличии полного сцепления между штампом и упругим телом. Среда представляется в виде упругого слоя, спаянного с упругим полупространством, материалы которых различны. В плоскости сопряжения слоя и полупространства соосно к штампу расположены внешняя щель (задача А), или внешнее жесткое включение (задача В), либо же круглое внутреннее жесткое включение — шайба (задача С).

С помощью интегрального преобразования Ханкеля задача сводится к системе парных интегральных уравнений, которые приводятся к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Решение исследуется при небольших отношениях радиусов штампа и перемычки или шайбы к толщине слоя.

1. Рассмотрим двухслойную упругую среду $z \geqslant 0$, состоящую из слоя $0 \leqslant z \leqslant h$ и полупространства $z \geqslant h$. Пусть в плоскости сопряжения материалов с упругими постоянными μ_1 и μ_2 имеется внешняя плоская щель, свободная от усилий, или внешнее жесткое плоское включение, либо внутреннее круглое жесткое включение (шайба). Пусть данная двухслойная среда



Фиг. 1

подвергается упругому кручению при помощи плоского круглого штампа, спаянного с упругим телом соосно со щелью или с включениями. Предполагается, что поверхность среды вне штампа свободна от внешних напряжений. Таким образом, имеется три различные смешанные задачи — А, В, С (фиг. 1).

В случае задачи С считаем, что к шайбе также приложен внешний крутящий момент.

Требуется определить компонент вектора смещения $u_\theta(r, z)$, исчезающий при $r, z \to \infty$ и удовлетворяющий дифференциальному уравнению равновесия Мичелла [12]

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}=0 \tag{1.1}$$

$$u_\theta(r,z)=u(r,z)=\begin{cases} u_1(r,z) & (0\leqslant z<h)\\ u_2(r,z) & (h<z<\infty)\end{cases}$$

при граничных условиях и условиях сопряжения

$$(1.2)\quad \begin{matrix} u_1=\varepsilon_1 r \quad (0\leqslant r<a_1)\\ \tau_{\theta z}^{(1)}=0 \quad (r>a_1)\end{matrix} \qquad \text{задачи A, B, C } (z=0)$$

$$(1.3)\quad \begin{matrix} u_1=u_2,\ \tau_{\theta z}^{(1)}=\tau_{\theta z}^{(2)} \quad (0\leqslant r<a_2)\\ \tau_{\theta z}^{(1)}=\tau_{\theta z}^{(2)}=0 \quad (r>a_2)\end{matrix} \qquad \text{задача A } (z=h)$$

$$(1.4)\quad \begin{matrix} u_1=u_2,\ \tau_{\theta z}^{(1)}=\tau_{\theta z}^{(2)} \quad (0\leqslant r<a_2)\\ u_1=u_2=0 \quad (r>a_2)\end{matrix} \qquad \text{задача B } (z=h)$$

$$(1.5)\quad \begin{matrix} u_1=u_2=\varepsilon_2 r \quad (0\leqslant r<a_2)\\ u_1=u_2,\ \tau_{\theta z}^{(1)}=\tau_{\theta z}^{(2)} \quad (r>a_2)\end{matrix} \qquad \text{задача C } (z=h)$$

Здесь ε_1 — угол поворота штампа ($\varepsilon_1=\varepsilon$ в задачах A, B), ε_2 — угол поворота шайбы в задаче C. Напряжения выражаются через перемещения по формулам

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(r,z)=\mu_i\frac{\partial u_i(r,z)}{\partial z},\quad \tau_{r\theta}^{(i)}(r,z)=\mu_i r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{u_i(r,z)}{r}\right] \quad (i=1,2) \tag{1.6}$$

Используя интегральное преобразование Ханкеля, решение уравнения (1.1) получим в виде [13]

$$u_i(r,z)=\int_0^\infty p[\delta_{i1}A(p)e^{pz}+B_i(p)e^{-pz}]J_1(pr)\,dp \quad (i=1,2) \tag{1.7}$$

где $J_\nu(pr)$ — функция Бесселя первого рода ν-го порядка, δ_{ij} — символ Кронекера, $A(p)$, $B_1(p)$, $B_2(p)$ — произвольные функции.

2. *Задача A*. Введем новые функции φ_1 и φ_2 с помощью соотношений [14]

$$\mu_1 p[A(p)-B_1(p)]=\int_0^{a_1}\varphi_1(t)\sin pt\,dt \tag{2.1}$$

$$\mu_2 pB_2(p)e^{-ph}=\int_0^{a_2}\varphi_2(t)\sin pt\,dt \tag{2.2}$$

Граничные условия (1.2) и (1.3) приводят к системе парных интегральных уравнений, которые в свою очередь можно привести к системе интегральных уравнений типа Абеля. Обращая последнюю, получим интегральные уравнения Фредгольма второго рода относительно функций φ_1 и φ_2 [15, 14]

$$\varphi_i(x)+\sum_{j=1}^{2}\int_0^{a_j}K_{ij}(x,t)\varphi_j(t)\,dt=-\frac{4}{\pi}\varepsilon\mu_1 x\delta_{i1}\quad(0\leqslant x\leqslant a_i)\quad{\scriptstyle(i=1,2)}\tag{2.3}$$

с ядрами

$$K_{ij}(x,t)=\frac{2}{\pi}(1-\beta_1\delta_{i2})\int_0^\infty\frac{\exp(-\delta_{ij}ph)}{\operatorname{sh}ph}\sin px\sin pt\,dp$$

$$\beta_i=\mu_i/(\mu_1+\mu_2)\quad{\scriptstyle(i=1,2)},\qquad\beta=\beta_1-\beta_2$$

Для решения системы интегральных уравнений (2.3) применим метод последовательных приближений. В итоге получим следующий результат:

$$\varphi_i(x)=\frac{4}{\pi}\varepsilon\mu_1 a_i[(-1)^i-\delta_{i2}\beta_1]\sum_{m=1,3,5}\left(\frac{x}{a_i}\right)^m\varphi_{i,m}\quad(0\leqslant x\leqslant a_i)\quad{\scriptstyle(i=1,2)}\tag{2.4}$$

$$\varphi_{1,1}=1-0.1275\delta_1^3+0.0330\delta_1^5+0.0162(\delta_1^6+49\beta_2\delta_1^3\delta_2^3)-$$
$$-0.0085\delta_1^7+o(\delta_1^9)$$
$$\varphi_{1,3}=0.0550\delta_1^5-0.0401\delta_1^7+o(\delta_1^9),\quad\varphi_{1,5}=-0.0201\delta_1^7+o(\delta_1^9)$$
$$\varphi_{2,1}=0.8925\delta_1^3-0.1023\delta_1^5-0.1134(\delta_1^6+\beta_2\delta_1^3\delta_2^3)+1.079\delta_1^7+o(\delta_1^9)$$
$$\varphi_{2,3}=(-0.1705\delta_1^3+5.093\delta_1^5)\delta_2^2+o(\delta^9),\quad\varphi_{2,5}=$$
$$=2.553\delta_1^3\delta_2^4+o(\delta^9)$$
$$\varphi_{i,m}=o(\delta^8)\ {\scriptstyle(m\geqslant7)},\quad\delta_1=a_1/h,\quad\delta_2=a_2/h,\quad\delta=\max\{\delta_1,\delta_2\}$$

Для равномерной сходимости решения (2.4) к точному при $m\to\infty$ достаточно, чтобы δ_1 и δ_2 удовлетворяли неравенству [15]

$$0<B<1\tag{2.5}$$

$$B=\frac{\zeta(3)}{\pi}[(1+49\beta_2^2)\delta_1^6+(49+\beta_2^2)\delta_2^6]^{1/2}$$

где $\zeta(x)$ — ζ-функция Римана. Если $\delta_1=\delta_2=\delta$, то $\delta<0.639$.

Если ограничиться вторым приближением, то решение (2.4) следует рассматривать при $m\leqslant5$. Относительная погрешность такого решения выражается неравенством

$$\Delta_i\leqslant\frac{C_i}{\sqrt{3}}\frac{B^2}{1-B}\sup_{\{0\leqslant\xi\leqslant1\}}\left[\frac{1}{\omega_i(\xi)}\right]\quad{\scriptstyle(i=1,2)}\tag{2.6}$$

$$\omega_i(\xi)=\sum_{m=1,3,5}\xi^{m-1}\varphi_{i,m},\quad C_1=\frac{\zeta(3)}{\pi}\sqrt{\delta_1^6+49\delta_2^6},\quad C_2=\frac{\zeta(3)}{\pi}\beta_2\sqrt{49\delta_1^6+\delta_2^6}$$

Приведём формулы для касательных напряжений $\tau_{\theta z}$ под штампом и в плоскости щели

$$\tau_{\theta z}(\rho,0)=-\frac{4\varepsilon\mu_1\rho}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left[\varphi_{1,1}-(1-2\rho^2)\varphi_{1,3}-\frac{1}{3}(1+4\rho^2-8\rho^4)\varphi_{1,5}\right]$$

$$\left(\rho=\frac{r}{a_1}<1\right)$$

$$\tau_{\theta z}(\rho, h) = -\frac{4\varepsilon\mu_1\beta_2\rho}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left[\varphi_{2,1} - (1-2\rho^2)\varphi_{2,3} - \frac{1}{3}(1+4\rho^2-8\rho^4)\varphi_{2,5}\right]$$

$$\left(\rho = \frac{r}{a_2} < 1\right)$$

$$\varepsilon = \frac{M}{16\mu_1 a_1^3}\left[\sum_{m=1,3,5}\frac{\varphi_{1,m}}{(m+2)}\right]^{-1} = \frac{M}{16\mu_1 a_1^3}\left[\frac{1}{3} - 0.0425\delta_1^3 + \right.$$

$$\left. + 0.0220\delta_1^5 + 0.0054(\delta_1^6 + 49\beta_2\delta_1^3\delta_2^3) - 0.0107\delta_1^7\right]^{-1}$$

Перемещения в плоскостях $z=0$ и $z=h$ определяются по формулам

$$u_1(\rho, 0) = \frac{2}{\pi}\varepsilon a_1\left\{\left(\varphi_{1,1} + \frac{3}{4}\rho^2\varphi_{1,3} + \frac{5}{8}\rho^4\varphi_{1,5}\right)\rho \arcsin\frac{1}{\rho} - \right.$$

$$- \left[\varphi_{1,1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\rho^2\right)\varphi_{1,3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{12}\rho^2 + \frac{5}{8}\rho^4\right)\varphi_{1,5}\right]\frac{\sqrt{\rho^2-1}}{\rho} +$$

$$+ 4\rho\left[\left(\frac{1}{3}\delta_1^3 - 0.0425\delta_1^6\right)U_{3,0}(y_1) - 0.4\delta_1^5 U_{7,2}(y_1) - \right.$$

$$\left.\left. - 0.297\beta_2\delta_1^3\delta_2^3 U_{3,0}\left(y_1, \frac{1}{2}\right)\right]\right\} \qquad \left(\rho = \frac{r}{a_1} > 1\right)$$

$$u_i(\rho, h) = \varepsilon a_2\beta_1\rho\left(\varphi_{2,1} + \frac{3}{4}\rho^2\varphi_{2,3} + \frac{5}{8}\rho^4\varphi_{2,5}\right) \qquad \left(\rho = \frac{r}{a_2} \leqslant 1\right) \qquad (i=1,2)$$

$$u_2(\rho, h) = \frac{2}{\pi}\varepsilon a_2\beta_1\left\{\left(\varphi_{2,1} + \frac{3}{4}\rho^2\varphi_{2,3} + \frac{5}{8}\rho^4\varphi_{2,5}\right)\rho \arcsin\frac{1}{\rho} - \right.$$

$$\left. - \left[\varphi_{2,1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\rho^2\right)\varphi_{2,3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{12}\rho^2 + \frac{5}{8}\rho^4\right)\varphi_{2,5}\right]\frac{\sqrt{\rho^2-1}}{\rho}\right\} \quad \left(\rho = \frac{r}{a_2} \geqslant 1\right)$$

$$u_1(\rho, h) = -\frac{\beta_2}{\beta_1}u_2(\rho, h) + \frac{8}{\pi}\varepsilon a_2\rho\left[\left(\frac{1}{3}\delta_1^3 - 0.0425\delta_1^6\right)U_{3,0}\left(y_2, \frac{1}{2}\right) - \right.$$

$$- 0.4\delta_1^5 U_{7,2}\left(y_2, \frac{1}{2}\right) - 0.297\beta_2\delta_1^3\delta_2^3 U_{3,0}(y_2) + 0.1\rho^2\delta_1^5\delta_2^2 U_{7,0}\left(y_2, \frac{1}{2}\right) +$$

$$\left. + 0.423\delta_1^7 U_{11,4}\left(y_2, \frac{1}{2}\right)\right] \qquad \left(\rho = \frac{r}{a_2} > 1\right)$$

$$U_{p,q}(x) = S_{p,q}(x, 1, 1), \qquad U_{p,q}\left(x, \frac{1}{2}\right) = S_{p,q}\left(x, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$S_{p,q}\left(x, \alpha, \frac{i}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(2n+i)^q}{\sqrt{[(2n+i)^2 + x^2]^p}}, \qquad y_i = \rho\delta_i. \qquad (i=1,2)$$

Касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ нетрудно получить из (1.6).

Полученные результаты позволяют определить предельное значение момента кручения M (угла поворота ε) или радиус перемычки в случае подвижно-равновесного состояния трещины. Например, формула для вычисления радиуса перемычки a_2 подвижно-равновесной трещины имеет вид: $a_2=32(Lh^3/M\beta_2)^2(0.139-0.035\delta_1^3+0.002\delta_1^2+o(\delta_1^5))$ $(\beta_2\neq 0)$. Здесь L — постоянная, зависящая от свойств материалов [5].

3. *Задача В*. Используя известные результаты [16], получим следующую систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\psi_i(x)+\sum_{j=1}^{2}\int_0^{a_j}L_{ij}(x,t)\psi_j(t)\,dt=-\frac{4}{\pi}\varepsilon\mu_1 x\delta_{i1}\quad(0\leqslant x\leqslant a_i)\quad(i=1,2)\tag{3.1}$$

с ядрами

$$L_{ij}(x,t)=-[\delta_{i1}+(-1)^j\beta_1\delta_{i2}]\sqrt{xt}\int_0^\infty\frac{\exp(-\delta_{ij}ph)}{\operatorname{ch}ph}pJ_{i-1/2}(px)J_{j-1/2}(pt)\,dp$$

Пользуясь приближенным решением системы (3.1) при условии

$$0<B<1\tag{3.2}$$

$$B=\left\{\left[\left(\frac{2}{\pi}\ln 2\right)^2+\beta_1^2\right]\delta_1^2+\left[1+\left(\frac{2}{\pi}\beta_1\ln 2\right)^2\right]\delta_2^2\right\}^{1/2}$$

напряжения и перемещения можно представить в виде

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(\rho,0)-\frac{4\varepsilon\mu_1\rho}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left[\psi_{1,0}-(1-2\rho^2)\psi_{1,2}-\frac{1}{3}(1+4\rho^2-8\rho^4)\psi_{1,4}\right]\quad\left(\rho=\frac{r}{a_1}<1\right)$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(\rho,h)=-\varepsilon\mu_1\beta_2\rho\left(3\psi_{2,0}+\frac{15}{4}\rho^2\psi_{2,2}+\frac{35}{8}\rho^4\psi_{2,4}\right)\quad(i=1,2)\quad\left(\rho=\frac{r}{a_2}\leqslant 1\right)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(\rho,h)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\varepsilon\mu_1\beta_2\left\{\frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}\sum_{m=0,2,4}\psi_{2,m}-\frac{1}{2}\left(3\psi_{2,0}+\frac{15}{4}\rho^2\psi_{2,2}+\frac{35}{8}\rho^4\psi_{2,4}\right)\rho\arcsin\frac{1}{\rho}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[3\psi_{2,0}+\frac{5}{2}\left(1+\frac{3}{2}\rho^2\right)\psi_{2,2}+7\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{12}\rho^2+\frac{5}{8}\rho^4\right)\psi_{2,4}\right]\frac{\sqrt{\rho^2-1}}{\rho}\right.$$

$$\left(\rho=\frac{r}{a_2}>1\right)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(\rho,h)=-\frac{\beta_1}{\beta_2}\tau_{\theta z}^{(2)}(\rho,h)-\frac{8}{\pi}\varepsilon\mu_1\rho\left[(\delta_1^3\delta_2+0.095\delta_1^6\delta_2)V_{5,1}\left(y_2,\frac{1}{2}\right)-\right.$$

$$-2\delta_1^5\delta_2V_{9,3}\left(y_2,\frac{1}{2}\right)+3.02\delta_1^7\delta_2V_{13,5}\left(y_2,\frac{1}{2}\right)+$$

$$\left.+1.5\delta_1^5\delta_2^3\rho^2V_{9,1}\left(y_2,\frac{1}{2}\right)\right]\quad\left(\rho=\frac{r}{a_2}>1\right)$$

$$u_1(\rho,0)=\frac{2}{\pi}\varepsilon a_1\left\{\left(\psi_{1,0}+\frac{3}{4}\rho^2\psi_{1,2}+\frac{5}{8}\rho^4\psi_{1,4}\right)\rho\arcsin\frac{1}{\rho}-\right.$$

$$-\left[\psi_{1,0}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\rho^2\right)\psi_{1,2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{12}\rho^2+\frac{5}{8}\rho^4\right)\psi_{1,4}\right]\frac{\sqrt{\rho^2-1}}{\rho}-$$

$$-4\rho\left[\left(\frac{1}{3}\delta_1^3+0.032\delta_1^6-0.021\delta_1^8\right)V_{3,0}(y_1)-(0.4\delta_1^5+0.017\delta_1^8)V_{7,2}(y_1)-\right.$$

$$- 0.168\beta_1\delta_1^3\delta_2^5 V_{5,1}\left(y_1, \frac{1}{2}\right)\Big]\Big\} \qquad \left(\rho = \frac{r}{a_1} > 1\right)$$

$$u_i(\rho, h) = \frac{4}{\pi}\varepsilon\beta_1 a_2 \rho\left[\psi_{2,0} + \frac{1}{3}(1+2\rho^2)\psi_{2,2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\left(1 + \frac{4}{3}\rho^2 + \frac{8}{3}\rho^4\right)\psi_{2,4}\right]\sqrt{1-\rho^2} \qquad (i=1,2) \qquad \left(\rho = \frac{r}{a_2} \leqslant 1\right)$$

$$\varepsilon = \frac{M}{16\mu_1 a_1^3}\left[\sum_{m=0,2,4}\frac{\psi_{1,m}}{m+3}\right]^{-1}$$

$$\psi_{1,0} = 1 + 0.0956\delta_1^3 - 0.0309\delta_1^5 + 0.0091\delta_1^6 + 0.0084\delta_1^7 - 0.0029\delta_1^8 - 0.4227\beta_1\delta_1^3\delta_2^5$$
$$\psi_{1,2} = -0.0515\delta_1^5 + 0.0392\delta_1^7 - 0.0016\delta_1^8, \qquad \varphi_{1,4} = 0.0196\delta_1^7$$
$$\psi_{2,0} = \delta_2(0.8392\delta_1^3 - 1.696\delta_1^5 + 0.0802\delta_1^6 + 2.546\delta_1^7),$$
$$\psi_{2,2} = \delta_2^3(-1.696\delta_1^3 + 7.129\delta_1^5)$$

$$\varphi_{2,4} = 2.546\delta_1^3\delta_2^5, \qquad V_{p,q}(x) = S_{p,q}(x, -1, 1), \qquad V_{p,q}\left(x, \frac{1}{2}\right) = S_{p,q}\left(x, -1, \frac{1}{2}\right)$$

Если $\beta_1=1$ ($\mu_2=0$), приходим к решению задачи о кручении упругого слоя, спаянного по нижнему основанию с жестким полупространством, имеющим цилиндрическую круговую полость.

4. *Задача C.* Соответствующая система фредгольмовских уравнений имеет вид

$$\Phi_i(x) + \sum_{j=1}^{2}\int_0^{a_j} M_{ij}(x,t)\Phi_j(t)\,dt = (-1)^i\frac{4}{\pi}\varepsilon_i\mu_1 x \quad (0 \leqslant x \leqslant a_i) \quad (i=1,2) \tag{4.1}$$

$$M_{ij}(x,t) = \frac{4}{\pi}[(-1)^{i+j}\beta_1 - \delta_{i1}\beta_2]\int_0^\infty \frac{\exp[-(1+\delta_{ij})ph]}{1-\beta\exp(-2ph)}\sin px \sin pt\, dp$$

Контактные напряжения $\tau_{\theta z}$ под штампом и в плоскости сопряжения слоя с полупространством получим по формулам

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(\rho, 0) = -\frac{4\mu_1\rho}{\pi\sqrt{1-\rho_2}}\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_i\left[\Phi_{1,1}^{(i)} - (1-2\rho^2)\Phi_{1,3}^{(i)} - \frac{1}{3}(1+4\rho^2-8\rho^4)\Phi_{1,5}^{(i)}\right]$$
$$\left(\rho = \frac{r}{a_1} < 1\right)$$

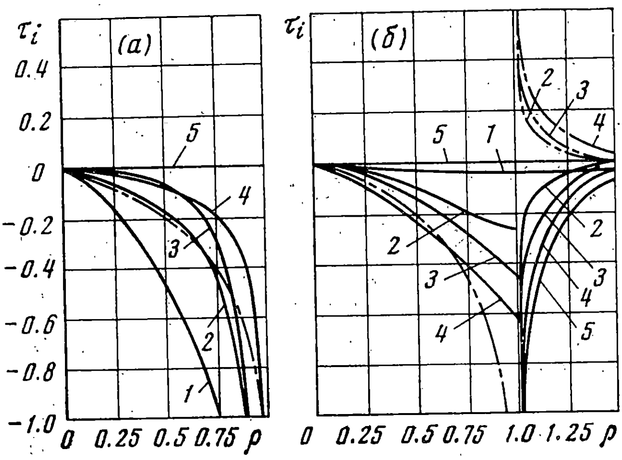
$$\tau_{\theta z}^{(i)}(\rho, h) = \frac{(-1)^{i+1}4\mu_i\rho}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}H(1-\rho)\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j\left[\Phi_{2,1}^{(j)} - (1-2\rho^2)\Phi_{2,3}^{(j)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}(1+4\rho^2-8\rho^4)\Phi_{2,5}^{(j)}\right] - \frac{8}{\pi}\mu_1\beta_2\rho\left\{\varepsilon_1\left[\left(\delta_1^3\delta_2 - \frac{\sigma(3)}{3\pi}\beta\delta_1^6\delta_2\right)W_{5,1}\left(y_2, \frac{1}{2}\right) - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\sigma(3, {}^1/_2)}{3\pi}\beta_1\delta_1^3\delta_2^4 W_{5,1}(y_2) - 3.33\delta_1^5\delta_2 W_{9,3}\left(y_2, \frac{1}{2}\right)\right] +$$
$$+ \varepsilon_2\left[\left(\delta_2^4 - \frac{\sigma(3)}{3\pi}\beta_1\delta_2^7\right)W_{5,1}(y_2) - \frac{\sigma(3, {}^1/_2)}{3\pi}\delta_1^3\delta_2^4 W_{5,1}\left(y_2, \frac{1}{2}\right) - \right.$$
$$\left.\left. - 3.33\delta_2^6 W_{9,3}(y_2)\right]\right\} \qquad \left(\rho = \frac{r}{a_2} \geqslant 0\right) \qquad (i=1,2)$$

$$\Phi_{1,1}^{(1)} = 1 - \frac{\sigma(3)}{3\pi}\beta\delta_1^3 + \frac{\sigma(5)}{10\pi}\beta\delta_1^5 + \left[\frac{\sigma(3)}{3\pi}\beta\right]^2\delta_1^6 + \left[\frac{\sigma(3,{}^1/_2)}{3\pi}\right]^2\beta_1\delta_1^3\delta_2^3 - \frac{3\sigma(7)}{112\pi}\beta\delta_1^7$$

$$\Phi_{1,3}^{(1)} = \frac{\sigma(5)}{6\pi}\beta\delta_1^5 - \frac{\sigma(7)}{8\pi}\beta\delta_1^7, \qquad \Phi_{1,5}^{(1)} = -\frac{\sigma(7)}{16\pi}\beta\delta_1^7$$

$$\Phi_{1,1}^{(2)} = -\frac{\sigma(3,{}^1/_2)}{3\pi}\delta_2^3 + \frac{\sigma(5,{}^1/_2)}{10\pi}\delta_2^5 + \frac{\sigma(3)\,\sigma(3,{}^1/_2)}{9\pi^2}(\beta\delta_2^3\delta_1^3+\delta_2^6\beta_1) - \frac{3\sigma(7,{}^1/_2)}{112\pi}\delta_2^7$$

$$\Phi_{1,3}^{(2)} = \frac{\sigma(5,{}^1/_2)}{6\pi}\delta_1^2\delta_2^3 - \frac{\sigma(7,{}^1/_2)}{8\pi}\delta_1^2\delta_2^5, \qquad \Phi_{1,5}^{(2)} = -\frac{\sigma(7,{}^1/_2)}{16\pi}\delta_1^4\delta_2^3$$



Фиг. 2

$$\Phi_{2,1}^{(1)} = -\frac{\sigma(3,{}^1/_2)}{3\pi}\beta_1\delta_1^3 + \frac{\sigma(5,{}^1/_2)}{10\pi}\delta_1^5\beta_1 + \frac{\sigma(3)\,\sigma(3,{}^1/_2)}{9\pi^2}\beta_1(\beta\delta_1^6+\beta_1\delta_1^3\delta_2^3) - \frac{3\sigma(7,{}^1/_2)}{112\pi}\beta_1\delta_1^7$$

$$\Phi_{2,3}^{(1)} = \frac{\sigma(5,{}^1/_2)}{6\pi}\beta_1\delta_1^3\delta_2^2 - \frac{\sigma(7,{}^1/_2)}{8\pi}\beta_1\delta_1^5\delta_2^2, \qquad \Phi_{2,5}^{(1)} = -\frac{\sigma(7,{}^1/_2)}{16\pi}\beta_1\delta_1^3\delta_2^4$$

$$\Phi_{2,1}^{(2)} = 1 - \frac{\sigma(3)}{3\pi}\beta_1\delta_2^3 + \frac{\sigma(5)}{10\pi}\beta_1\delta_2^5 + \left[\frac{\sigma(3)}{3\pi}\beta_1\right]^2\delta_2^6 + \left[\frac{\sigma(3,{}^1/_2)}{3\pi}\right]^2\beta_1\delta_1^3\delta_2^3 - \frac{3\sigma(7)}{112\pi}\delta_2^7\beta_1$$

$$\Phi_{2,3}^{(2)} = \frac{\sigma(5)}{6\pi}\beta_1\delta_2^5 - \frac{\sigma(7)}{8\pi}\beta_1\delta_2^7, \qquad \Phi_{2,5}^{(2)} = -\frac{\sigma(7)}{16\pi}\beta_1\delta_2^7$$

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{n-1}}{n^x}, \qquad \sigma(x,{}^1/_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{(n+{}^1/_2)^x}, \qquad H(x) = \begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

$$W_{p,q}(x) = S_{p,q}(x,\beta,1), \qquad \bar{W}_{p,q}(x,{}^1/_2) = S_{p,q}(x,\beta,{}^1/_2)$$

Углы поворота ε_1 и ε_2 связаны с моментами кручения M_1 и M_2 соотношением

$$M_i = 16(\mu_1+\delta_{i2}\mu_2)a_i^3\sum_{m=1,3,5}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j\frac{\Phi_{i,m}^{(j)}}{m+2} \qquad (i=1,2)$$

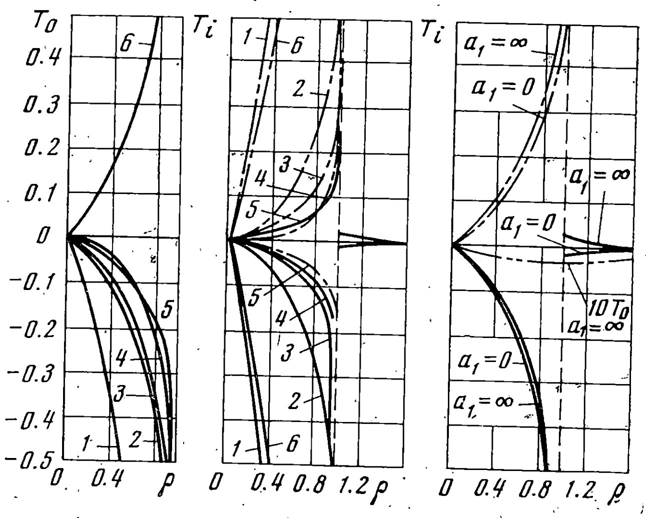
Параметры δ_1 и δ_2 удовлетворяют неравенству

$$0 \leq B < 1 \tag{4.2}$$

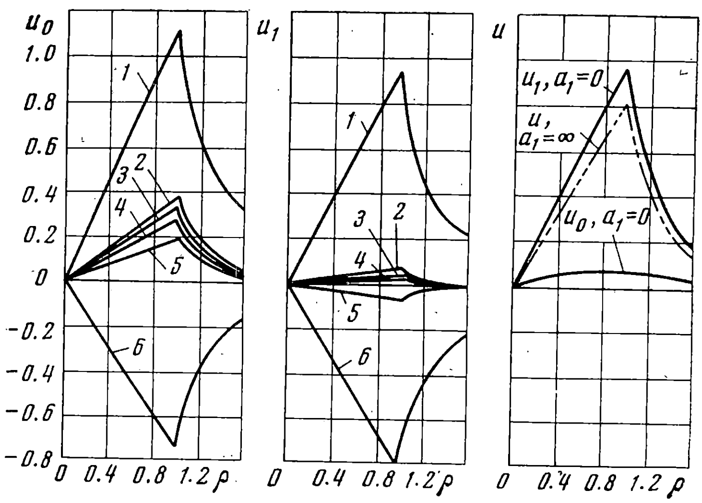
$$B = \pi^{-1}\{[\beta^2\sigma^2(3) + \beta_1^2\sigma^2(3, 1/2)]\delta_1^6 + [\beta_1^2\sigma^2(3) + \sigma^2(3, 1/2)]\delta_2^6\}^{1/2}$$

Выражения для перемещений, ввиду их некоторой громоздкости, здесь не приводятся.

В частных случаях, а именно, при $a_2=0$, получаем известные результаты [1], при $\mu_2=0$ — задачу Я. С. Уфлянда [17]. Из данного решения



Фиг. 3



Фиг. 4

можно получить задачу о кручении бесконечного двухслойного упругого пространства с помощью поворота внутренней жесткой шайбы, размещенной в плоскости сопряжения материалов, и задачу о кручении внутренней шайбой двухслойной упругой среды, поверхность которой свободна от внешних усилий или жестко защемлена.

Задачи A, B и C переходят в задачу Рейсснера — Сагоци [18] при $\delta_1=$ $=\delta_2=0$ ($h\to\infty$).

5. Сравнивая результаты решения задач A и B, можно заметить, что на распределение напряжений и перемещений в плоскости $z=0$ большее влияние оказывает щель по сравнению с жестким включением. Подсчеты показывают, что на контактные напряжения под штампом в обоих случаях влияние неоднородности упругой среды, щели и включения при $\delta_1\leqslant 0.2$ (δ_2 удовлетворяет условиям (2.5) или (3.2)) пренебрежимо мало, причем погрешность решения уменьшается с увеличением δ_2. При некоторых соотношениях между параметрами δ_1 и δ_2 коэффициент интенсивности касательных напряжений в плоскости сопряжения материалов k_2 может превышать коэффициент интенсивности контактных напряжений под штампом k_1 в случае задачи A

$$k_1=\sum_{m=1,3,5}\varphi_{1,m},\qquad k_2=\beta_2\sum_{m=1,3,5}\varphi_{2,m}$$

и составлять более половины этого же коэффициента в случае задачи B

$$k_1=\sum_{m=0,2,4}\psi_{1,m},\qquad k_2=\beta_1\sum_{m=0,2,4}\psi_{2,m}$$

Графики распределения напряжений $\tau_i=\tau_{\theta z}{}^{(i)}(\rho,\ h)/M$ ($i=1,2$) приведены на фиг. 2: $\delta_1=1.0$, $\delta_2=0{,}05$ (фиг. 2, *а*); $\delta_1=0.8$, $\delta_2=0.4$ (фиг. 2, *б*). Штрихпунктирной линией изображены кривые для $\tau_{\theta z}(\rho,\ 0)/M$ при $\rho<1$ и для τ_2 при $\rho>1$. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 указывают значения параметра $\beta_1=0$, 0.3, 0.5, 0.8, 1.

На фиг. 3 и 4 для случая задачи C приведены графики зависимости $T_0=a^3\tau_{\theta z}(\rho,\ 0)/M_1$, $T_i=a^3\tau_{\theta z}{}^{(i)}(\rho,\ h)/M_1$ ($i=1,\ 2$), $U_0=a^2u(\rho,\ 0)/\mu M_1$, $U_1=a^2u(\rho,\ h)/$ $/\mu M_1$ от числа $\eta=M_2/M_1$ при $\delta_1=\delta_2=a/h=0.6$, $\mu_1=\mu_2=\mu$. Последовательность цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствует значениям параметра $\eta=10$, 1.0, 0.1, -0.1, -1.0, -10. В случаях когда $a_1=0$ или $a_1=\infty$, значение M_1 в T_0, T_i, U_0, U_1 следует заменить на $M=M_2$. Сплошными линиями обозначены кривые для T_1, а штрихпунктирными — кривые для T_2.

Поступила 23 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грилицкий Д. В.* Кручение двухслойной упругой среды. Прикл. механ., 1961, т. 7, вып. 1.
2. *Westmann R. A.* Layered systems subjected to surface shears. J. Engng Mech. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Engrs., 1963, vol. 86, pt. 1, No. 6.
3. *Александров В. М., Сметанин Б. И., Соловьев А. С.* Эффективные методы решения сложных смешанных задач теории упругости, связанных с вопросами концентрации напряжений. В сб.: Концентрация напряжений, вып. 3. Киев, «Наукова думка», 1971.
4. *Проценко В. С.* Кручение упругого полупространства, ослабленного плоской круглой щелью. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 6.
5. *Салганик Р. Л.* Об осесимметричных трещинах продольного сдвига, ПМТФ, 1962, № 3.
6. *Смелянская Л. М., Токарь А. С.* Прочность составного упругого слоя, ослабленного плоской круглой щелью. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 10.
7. *Уфлянд Я. С.* Некоторые задачи о кручении упругих тел, ослабленных соосными круговыми щелями. В сб.: Концентрация напряжений, вып. 3. Киев, «Наукова думка», 1971.
8. *Collins W. D.* Some axially symmetric stress distributions in elastic solids containing penny-shaped cracks. II. Cracks in solids under torsion. Mathematika, 1962, vol. 9, pt. 1, No. 17.
9. *Руховец А. Н., Уфлянд Я. С.* Смешанные задачи о кручении упругого полупространства со сферическим включением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
10. *Das S. C.* On the effect of a rigid spherical inclusion in a semi-infinite elastic solid under stresses produced by a couple on the plane boundary. Z. angew. Math. und Mech., 1956, Bd. 36, H 1—2.

11. *Nariboli G. A.* Effect of rigid inclusions and cavities in a large body under torsion. Appl. Sci. Res., Sec. A, 1963, vol. 11, No. 4–6.
12. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
13. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
14. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
15. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.* Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1966.
17. *Уфлянд Я. С.* Кручение упругого слоя двумя штампами. Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 5.
18. *Reissner E., Sagoci H. F.* Forced torsional oscillations of an elastic half-space. I. J. Appl. Phys., 1944, vol. 15, No. 9.