МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1975

УДК 539.3:534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОТОКЕ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Г. Е. БАГДАСАРЯН

(Ереван)

Задачи устойчивости тонких тел в потоке проводящего газа при наличии магнитного поля рассматривались в работах [1–8]. В этих работах влияние магнитного поля учитывается, с одной стороны силой, с которой магнитное поле действует на токи проводимости в газе и приводит к изменению избыточного давления на теле, с другой стороны – силой, обусловленной напряжениями Максвелла на поверхности тела. В перечисленных работах электромагнитные эффекты в теле не рассматриваются, т. е. не учитываются силы, обусловленные токами проводимости в оболочке.

Ниже рассматривается задача об устойчивости проводящей цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле, обтекаемой с внешней стороны сверхзвуковым потоком идеально проводящего невязкого газа. Исследуется влияние проводимости материала оболочки на критическую скорость флаттера. Получена приближенная формула для расчета избыточного давления газа на тело, которую можно применять к анализу устойчивости конечных пластин и оболочек конечной проводимости, движущихся в потоке проводящего газа.

1. Рассмотрим бесконечную круговую цилиндрическую оболочку толщины $2h$, радиуса R, изготовленную из материала с конечной постоянной электропроводностью σ. Пусть оболочку обтекает сверхзвуковой поток идеально проводящего газа с невозмущенной скоростью u, направленной по образующим цилиндра. Внутри оболочки газ находится в покое под давлением p_0, равным давлению невозмущенного потока, обтекающего газ. Оболочка находится в магнитном поле, вектор напряженности которого направлен параллельно скорости обтекающего потока. Принимается, что магнитные и диэлектрические проницаемости газа и материала оболочки равны единице.

Отнесем оболочку к цилиндрической системе координат (x, r, θ), совместив полярную ось x с осью оболочки.

Принимается также, что упругие перемещения оболочки, электромагнитные и аэродинамические возмущения настолько малы, что задачу можно рассматривать в линейной постановке.

Пусть u, v, w — тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки (малые отклонения срединной поверхности от невозмущенной цилиндрической формы). Вследствие этих возмущений в газе индуцируется электромагнитное поле, компоненты которого определяются из уравнений магнитогазодинамики для внешней области. При этом должны удовлетворяться условия непроницаемости стенок, условия для электромагнитного поля на поверхности раздела двух сред и условия затухания электромагнитных и аэродинамических возмущений на бесконечности. Точное решение этой задачи было получено в статье [3].

Согласно [3], для избыточного давления Δp, поперечной нагрузки Z и компонент индуцированного электромагнитного поля в газе имеем

$$(1.1)\qquad \Delta p=\beta\rho_0\gamma a_0^2\alpha w(x, \theta, t)$$

$$Z=-\Delta p-2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+T_{rr}-T_{rr}^*$$

$$T_{rr}=-\beta\rho_0\gamma V_A^2,\qquad T_{rr}^*=\rho_0V_A^2\nu_1\frac{I_n(\nu_1R)}{I_n'(\nu_1R)}w$$

(1.2) $$h_x=H_0\beta\rho(r_0)w,\quad h_r=-\frac{iH_0}{k}\frac{d\rho}{dr}w,\quad h_\theta=-\frac{iH_0}{kr}\rho(r_0)\frac{\partial w}{\partial\theta}$$

$$E_x=0,\quad E_r=\frac{iH_0}{krc}V\rho(r_0)\frac{\partial w}{\partial\theta},\quad E_\theta=-\frac{iH_0}{ck}V\frac{d\rho}{dr}w,\quad (r_0=\beta\sqrt{|k|}\,r)$$

$$\rho(r_0)=\sqrt{k}\frac{H_n^{(2)}(r_0)}{[H_n^{(2)}(\beta\sqrt{k}R)]'}\qquad (k>0,\ V>U)$$

$$\rho(r_0)=\sqrt{k}\frac{H_n^{(1)}(r_0)}{[H_n^{(1)}(\beta\sqrt{k}R)]'}\qquad (k>0,\ U>V)$$

$$\rho(r_0)=\frac{k}{\sqrt{|k|}}\frac{K_n(r_0)}{K_n'(\beta\sqrt{|k|}R)}\qquad (k<0)$$

$$\gamma=\rho(\beta\sqrt{|k|}R),\quad k=\frac{(M_1^2-1)(M_1^2-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)M_1^2-\lambda^2},\quad \alpha=\frac{M_1^2}{M_1^2-1},\quad M_1^2=\frac{(U-V)^2}{a_0^2}$$

$$a_0^2=\frac{\varkappa p_0}{\rho_0},\quad V=\frac{\omega}{\beta},\quad V_A^2=\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0},\quad \lambda=\frac{V_A}{a_0},\quad \nu_1=\beta\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

Формулы (1.1) и (1.2) справедливы в предположении, что стенка цилиндра совершает колебания типа бегущих волн, распространяющихся вдоль оболочки $w(x,\theta,t)=w_0\exp[i(\omega t-\beta x)]\cos n\theta$.

Здесь ω — частота колебаний, $\beta=\pi/l$ — волновое число, l — длина полуволны в направлении образующих, n — число волн по окружности.

В формулах (1.1), (1.2) ρ_0 — плотность невозмущенного газа, $\varkappa$ — показатель политропии, M_1 — число Маха в относительном движении проводящего газа и упругой волны, V_A — скорость распространения электромагнитных волн Альфвена, V — фазовая скорость распространения упругой волны в оболочке, $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$ — функции Генкеля первого и второго рода, K_n — функция Бесселя чисто мнимого аргумента порядка n, ε — коэффициент линейного затухания, ρ — плотность материала оболочки, T_{rr} и T_{rr}^* — компоненты максвеллова тензора натяжений в газе и в вакууме соответственно.

Для изучения флаттера интерес представляет лишь случай $k>0$, $U>Y$ (в этом случае колебательный процесс поддерживается за счет энергии, поглощаемой из потока), анализом которого ограничимся.

Определение аэродинамических сил по формуле (1.1) представляет большие трудности, связанные с тем, что $\rho(r_0)$ является сложной трансцендентной функцией скорости U, частоты ω и напряженности магнитного поля H_0. С целью получения оценок для избыточного давления газа рассмотрим случай [9]

(1.3) $$M_1^2\gg1,\qquad \beta R\sqrt{k}\gg n$$

Первое условие (1.3) требует, чтобы газ перемещался достаточно быстро относительно волн деформации, распространяющихся вдоль оболочки, а второе условие требует, чтобы показатель изменяемости поперек потока не был чрезмерно велик.

Принимая (1.3) и используя асимптотические формулы функций Генкеля для Δp и Z из (1.1) в случае умеренных магнитных полей, получим следующие упрощенные выражения:

$$\Delta p=\frac{\varkappa p_0}{a_0}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{1.4}$$

$$Z=-\frac{\varkappa p_0}{a_0}\sqrt{1+\lambda^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\beta\rho_0 V_A{}^2 w-2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t} \tag{1.5}$$

Второй член в (1.5) представляет компонент максвеллова тензора напряжений в вакууме и, как показано в работе [10], им можно пренебрегать, если не интересуют волновые процессы в вакууме.

Формула (1.4) является некоторым обобщением формулы для давления, полученной на основе «поршневой теории» классической газодинамики на случай магнитогидродинамического обтекания упругих оболочек.

Формулу (1.4) можно получить иным путем, а именно, принимая, что и в магнитной газодинамике при больших сверхзвуковых скоростях имеет место «закон плоских сечений». В этом случае приближенная формула для возмущенного давления (формула простой волны) имеет вид

$$p=p_0\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_n}{a}\right)^{2\varkappa/(\varkappa-1)} \tag{1.6}$$

где a — скорость распространения возмущений в проводящем газе, v_n — «скос» потока, равный нормальной компоненте скорости частиц газа на обтекаемой поверхности. В данном случае в линейном приближении

$$v_n=\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.7}$$

Известно, что явление распространения возмущений в проводящем газе значительно сложнее соответствующего явления в нейтральном газе. В последнем случае имеется лишь одна скорость распространения малых возмущений — скорость звука. В проводящем газе существуют три скорости распространения слабых разрывов — скорость альфвеновских волн и скорости быстрых и медленных магнитозвуковых волн. Известно также, что в направлении, перпендикулярном магнитному полю, скорости альфвеновских и медленных магнитозвуковых волн равны нулю, а скорость быстрых магнитозвуковых волн имеет величину [11]

$$a=a_0\sqrt{1+\lambda^2} \tag{1.8}$$

Подставляя (1.7) и (1.8) в (1.6) и линеаризируя, для избыточного давления получим выражение, полностью совпадающее с (1.4).

2. В работах [12, 13] на основе совместного асимптотического интегрирования трехмерных уравнений электродинамики и теории упругости сформулированы следующие гипотезы магнитоупругости тонких тел.

Нормальный к срединной поверхности прямолинейный элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной срединной поверхности оболочки и сохраняет свою длину.

Тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля по толщине оболочки остаются неизменными.

Вторая гипотеза аналитически запишется следующим образом:

$$E_x^{(i)}=\varphi(x,\theta,t),\qquad E_\theta^{(i)}=\psi(x,\theta,t),\qquad h_r^{(i)}=f(x,\theta,t) \tag{2.1}$$

где индекс i означает принадлежность к внутренней области (область, занимаемая оболочкой), φ, ψ, f — искомые компоненты соответствующих напряженностей электромагнитного поля в оболочке.

Учитывая, что тангенциальные компоненты вектора напряженности электрического поля на поверхности раздела двух сред (поверхность $r=R$) должны быть непрерывными, из (1.2), (1.3) и (2.1) получим

$$\varphi=0,\qquad \psi=-\frac{H_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t} \tag{2.2}$$

Уравнения движения оболочки, полученные в работе [13], с учетом (1.5) и (2.2) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$D\Delta\Delta w+\frac{2Eh}{R(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R}\right)+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+$$

$$+2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\varkappa p_0}{a_0}\sqrt{1+\lambda^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{4h^3\sigma H_0^2}{3c^2}\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\,\partial t}$$

$$D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\qquad y=R\theta$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Таким образом, задача колебания и устойчивости проводящих оболочек, обтекаемых потоком идеально проводящего газа в продольном магнитном поле, свелась к решению системы (2.3) при соответствующих условиях закрепления торцов оболочки.

3. Будем рассматривать движения с большим показателем изменяемости. Для таких движений, как известно, влияние тангенциальных составляющих сил инерции пренебрежимо мало. В этом случае введя функцию $\Phi(x,\theta,t)$, связанную с u, v, w соотношениями

$$u=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi,\qquad v=-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(2+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\Phi,\qquad w=\Delta\Delta\Phi$$

приведем систему (2.3) к одному разрешающему уравнению

$$D\Delta^2\Delta^2\Phi+\frac{2Eh}{R^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+\left[2\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\rho h\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}+\right. \tag{3.1}$$

$$\left.+\frac{\varkappa p_0}{a_0}\sqrt{1+\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{4h^3\sigma H_0^2}{3c^2}\frac{\partial^3}{\partial y^2\,\partial t}\right]\Delta^2\Phi=0$$

Решение уравнения (3.1) будем искать в классе волн, распространяющихся вдоль оболочки

$$\Phi=\Phi_0 e^{i(\omega t-\beta x)}\cos(ny/R) \tag{3.2}$$

Подстановка (3.2) в (3.1) приводит к характеристическому уравнению, которое запишем следующим образом:

$$\omega^2-i\omega(2\varepsilon+\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}+\sigma_0\lambda^2n^2)+i\beta U\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}-\Omega_0{}^2=0 \tag{3.3}$$

$$\gamma_0=\frac{\varkappa p_0}{2\rho h a_0},\qquad \sigma_0=\frac{2h^2a_0{}^2\rho_0}{3R^2}\frac{4\pi\sigma}{c^2\rho},\qquad m=\beta R$$

$$\Omega_0{}^2=\frac{D}{2\rho hR^4}\left[(m^2+n^2)^2+\frac{3(1-\nu^2)R^2}{h^2}\frac{m^4}{(m^2+n^2)^2}\right]$$

Здесь Ω_0 — частота собственных поперечных колебаний оболочки в вакууме, σ_0 — параметр, характеризующий проводимость материала оболочки, λ — параметр, характеризующий напряженность заданного внешнего магнитного поля.

Поступая аналогичным образом, как в работе [9], из уравнения (3.3) для критической скорости флаттера получим формулу

$$U_*=V_0\left(1+\frac{2\varepsilon+\sigma_0\lambda^2n^2}{\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \tag{3.4}$$

где $V_0=\Omega_0/\beta$ — фазовая скорость распространения изгибных волн при собственных колебаниях оболочки в вакууме.

В случае отсутствия магнитного поля ($\lambda=0$) из (3.4) получается

$$U_*{}^\circ=V_0\left(1+\frac{2\varepsilon}{\gamma_0}\right) \tag{3.5}$$

Формула (3.5) совпадает с известной формулой, полученной в работе [9].

Наибольший интерес представляют те значения аргументов m и n, вблизи которых критическая скорость принимает минимальное значение. Эти значения определяются из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$a_1m^6+a_2m^4+a_3m^2-a_4=0,\qquad m^2-n^2=0 \tag{3.6}$$

$$a_1=\frac{48\sigma_0\lambda^2}{\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}},\qquad a_2=16\left(1+\frac{2\varepsilon}{\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$$

$$a_3=\frac{3(1-\nu^2)R^2}{h^2\gamma_0}\frac{\sigma_0\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\qquad a_4=\frac{3(1-\nu^2)R^2}{h^2}\left(1+\frac{2\varepsilon}{\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$$

Из (3.4), (3.6) легко заметить, что как длины волн в осевом и азимутальном направлениях, так и минимальное значение критической скорости существенно зависят от величины напряженности магнитного поля и от проводимости материала оболочки.

С целью получения результатов в замкнутой форме рассмотрим случай $m^2 \gg n^2$. Тогда из (3.4) для критической скорости флаттера получим формулу

$$(3.7)\qquad U_* = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{D}{2\rho h}}\left[m^2 + \frac{3(1-\nu^2)R^2}{16h^2}\frac{1}{m^2}\right]^{1/2}\left(1+\frac{2\varepsilon+\sigma_0\lambda^2 n^2}{\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$$

Очевидно, что наименьшее значение U_* будет получено, если n приравняем единице.

Из (3.7) видно, что минимум функции U_* равен

$$(3.8)\qquad \min_{(m,n)} U_* = \sqrt{\frac{2Eh}{\rho R\sqrt{3(1-\nu^2)}}}\left(1+\frac{2\varepsilon+\sigma_0\lambda^2}{\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$$

Рассматривая (3.8), можно сделать следующие выводы: учет проводимости материала оболочки приводит к увеличению области устойчивости (критическая скорость увеличивается); если $\sigma_0 \gg \varepsilon$ (материал оболочки обладает высокой проводимостью), то при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности область устойчивости оболочки неограниченно возрастает; если же $\sigma_0 < \varepsilon$, то с увеличением напряженности магнитного поля критическая скорость вначале уменьшается, достигая минимума при $\lambda^2 = 2(\varepsilon - \sigma_0)/\sigma_0$, после чего начинает неограниченно возрастать.

Институт механики АН АрмССР

Поступила 1 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лисунов А. Д.* Флаттер панели в потоке сжимаемой проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. ПМТФ, 1960, № 4.
2. *Kaliski S., Solarz L.* Aero-magneto-flutter of a plate flown past by a perfectly conducting gas in a magnetic field with isotopic ation. Proc. Vibrat. Problems, 1962, vol. 3, No. 3.
3. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Флаттер цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. Инж. ж., МТТ, 1966, № 6.
4. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки в потоке проводящего газа при наличии магнитного поля. Тр. VI Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Баку, 1966.
5. *Solarz L.* Aeromagnetic flutter of walls of a plane infinite channl. Bull. Acad. Polon. Sci., ser. Sci. Techn., 1966, vol. 7, No. 4.
6. *Solarz L.* Aero-magneto-flutter of a plane duct of finite length. Proc. Vibrat. Problems, 1966, vol. 4, No. 7.
7. *Kaliski S., Solarz L.* Aero-magneto-flutter of an infinite cylindrical duct. Proc. Vibrat. Problems, 1969, vol. 1, No. 10.
8. *Вольмир А. С., Селезова Л. В.* Поведение упругой цилиндрической панели в потоке проводящего газа при действии магнитного поля. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 5.
9. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
10. *Kaliski S.* Magnetoelastic vibration of perfectly conductnig plates and bars. Proc. Vibrat. Problems, 1962, vol. 3, No. 4.
11. *Калихман Л. Е.* Элементы магнитной газодинамики. М., Атомиздат, 1964.
12. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
13. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.