

ОСЕССИММЕТРИЧНАЯ ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ЗАМКНУТОЙ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКЕ ВРАЩЕНИЯ

Н. Д. ВЕКСЛЕР

(Таллин)

На тонкую упругую оболочку с гладким меридианом, мало отличающимся от окружности, погруженную в безграничную идеальную сжимаемую жидкость, набегаает плоский импульс давления с произвольным законом изменения интенсивности по времени. Описывается построение решения линейной осесимметричной задачи об отыскании поля давления в дифракционной волне, удовлетворяющей скалярному волновому уравнению, при нулевых начальных условиях, условиях контакта на поверхности оболочки и условия излучения.

При решении задач дифракции волн принято исходить из предположения, что окружающая объект безграничная среда является акустической и описывается скалярным волновым уравнением. Объект может быть недеформируемым («акустически жестким» либо «акустически мягким») или деформируемым (описывается по теории упругости либо по теории тонких упругих оболочек). В процессе построения решения задачи дифракции существенным моментом является использование метода разделения переменных. Как известно, существует одиннадцать систем координат, в которых скалярное волновое уравнение разделяется. Если форма объекта соответствует одной из этих систем координат, то обычный способ решения задачи дифракции предполагает применение интегрального преобразования по времени с последующим использованием в пространстве изображений метода разделения переменных. Обратное преобразование выполняется аналитически либо численно. Преимущества метода разделения переменных особенно ощутимы при решении внешней задачи — о движении окружающей объект среды. Отказ от метода разделения переменных вынуждает решать сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. При численном решении задачи дифракции на ЭВМ такую систему приходится решать в каждой точке области, что связано с большими затратами машинного времени.

Если геометрия объекта мало отличается от геометрии, допускающей разделение переменных, то можно использовать метод малого параметра (метод возмущений) для перенесения результатов с объекта сравнения на исследуемый. Это приводит к решению в виде степенного ряда по малому параметру.

Предлагаемый подход позволяет выявить влияние малых изменений геометрии объекта на решение задачи дифракции. При достаточно гладком меридиане можно ограничиться нулевым и первым приближениями. Если же меридиан объекта описывается быстроизменяющейся колеблющейся кривой малой амплитуды относительно кривой сравнения (шероховатая поверхность), то в ряду по степеням малого параметра следует удерживать несколько членов.

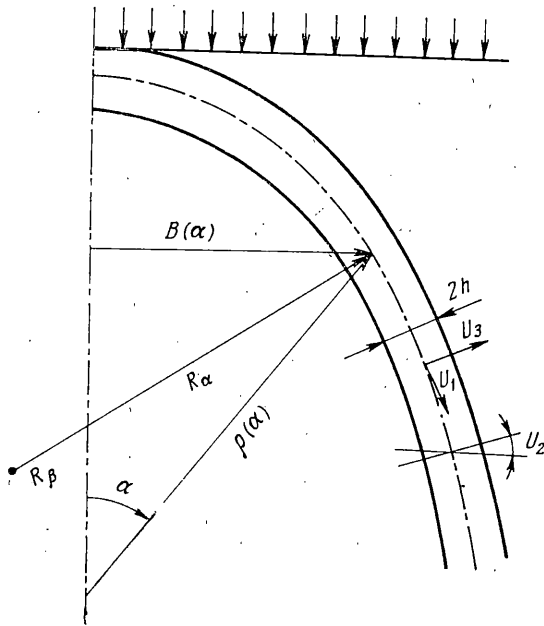
1. Пусть на погруженную в безграничную идеальную сжимаемую жидкость тонкую упругую оболочку вращения набегаает плоский импульс давления конечной длительности

$$(1.1) \quad p_i(t, z) = p_0 [g(t_1)H(t_1) - g(t_2)H(t_2)] \\ t_1 = t - z, \quad t_2 = t_1 - t_0, \quad t = cTL^{-1}, \quad t_0 = cT_0L^{-1}$$

Здесь и далее p_i — давление в падающей волне, t — безразмерное время, z — безразмерная координата вдоль оси симметрии оболочки, p_0 — постоянная, имеющая размерность давления, g — функция, определяющая закон изменения давления в падающей волне, H — единичная функция Хевисайда, t_0 — безразмерная длительность импульса, c — скорость звука в жидкости, ρ — плотность жидкости, T — время, L — характерный линейный раз-

мер оболочки. Время t отсчитывается с момента касания падающей волновой поверхности оболочки.

Полагаем, что срединная поверхность оболочки образуется при вращении плоской кривой (меридиана) вокруг оси, лежащей в ее плоскости. В полярных координатах уравнение меридиана имеет вид $\rho = \rho(\alpha)$ (фигура). Коэффициенты первой квадратичной формы A , B и главные радиусы кривизны R_α , R_β срединной поверхности оболочки определяются формулами: $A = (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}$, $B = \rho \sin \alpha$, $R_\alpha = (\rho^2 + \rho'^2)^{3/2} / (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')$, $R_\beta = \rho \sin \alpha (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2} / (\rho \sin \alpha - \rho' \cos \alpha)$. Здесь и далее штрихом обозначена производная по α .



Уравнения движения в перемещениях теории типа Тимошенко тонких упругих оболочек при осесимметричной деформации, вызванной нагрузкой типа давления, имеют вид

$$(1.2) \quad \sum_{(j=1)}^3 L_{ij} u_j = \delta_{is} q^* \quad (i=1, 2, 3)$$

где $u_1 = U_1 L^{-1}$, $u_3 = U_3 L^{-1}$ — безразмерные тангенциальное и нормальное перемещения срединной поверхности оболочки, а $u_2 = U_2$ — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки, δ_{ij} — символ Кронекера, L_{ij} — дифференциальные операторы

$$(1.3) \quad \begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{B'^2}{B^2} - \nu \frac{A'B'}{AB} + \nu \frac{B''}{B} - \kappa^2 \left(\frac{A}{R_\alpha} \right)^2 - \lambda_0^2 \left(\frac{A}{L} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{12} &= \kappa^2 \frac{A^2}{LR_\alpha}, \quad L_{13} = \left[(1 + \kappa^2) \frac{A}{R_\alpha} + \nu \frac{A}{R_\beta} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{A}{R_\alpha} \left[\frac{B'}{B} \left(1 - \frac{R_\alpha}{R_\beta} \right) - \frac{R_\alpha'}{R_\alpha} \right] \\ L_{21} &= \kappa^2 \frac{L}{R_\alpha}, \quad L_{23} = -\kappa^2 \frac{L}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

$$L_{22} = a^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{B'^2}{B^2} - \nu \frac{A'B'}{AB} + \nu \frac{B''}{B} - \lambda_0^2 \left(\frac{A}{L} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] - \kappa^2$$

$$L_{31} = \left[(1 + \kappa^2) \frac{A}{R_\alpha} + \nu \frac{A}{R_\beta} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha} - \kappa^2 \frac{A}{R_\alpha} \left(\frac{R_\alpha'}{R_\alpha} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{B} \left(\nu \frac{A}{R_\alpha} + \frac{A}{R_\beta} \right)$$

$$L_{32} = -\kappa^2 \frac{A}{L} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{B'}{B} \right), \quad q_* = \frac{1 - \nu^2}{2E} \frac{A^2 q}{Lh}$$

$$L_{33} = -\kappa^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] + \left(\frac{A}{R_\alpha} \right)^2 + 2\nu \frac{A^2}{R_\alpha R_\beta} + \left(\frac{A}{R_\beta} \right)^2 + \lambda_0^2 \left(\frac{A}{L} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

В этих формулах используются следующие обозначения: $a^2 = 1/3 h^2 A^{-2}$, $\lambda_0^2 = c^2 c_1^{-2}$, $c_1^2 = E \rho_1^{-1} (1 - \nu^2)^{-1}$, $\kappa^2 = 1/2 (1 - \nu) k_T^2$, причем $2h$ — толщина оболочки, c_1 — скорость распространения первого фронта в теории оболочек типа Тимошенко; E , ν , ρ_1 — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки, k_T^2 — численный коэффициент сдвига, q — нормальный компонент внешней силы, приходящейся на единицу площади срединной поверхности оболочки.

Окружающая оболочку идеальная сжимаемая жидкость описывается скалярным волновым уравнением относительно давления p_s

$$(1.4) \quad \left(\nabla_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_s = 0, \quad \nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \text{ctg } \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)$$

где ∇_0^2 — оператор Лапласа, а $r = RL^{-1}$ — безразмерная координата.

Рассмотрим задачу об отыскании поля давления в дифракционной волне p_s в области $t \geq 0$, $r \geq r(\alpha)$, $\pi \geq \alpha \geq 0$ при нулевых начальных и следующих граничных условиях:

$$q = -(p_i + p_s), \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) (p_i + p_s) [\rho c^2 (1 + \lambda^2)^{1/2}]^{-1} \quad \text{при } r = r(\alpha)$$

$$p_s = \frac{\partial p_s}{\partial t} = u_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad \text{при } t=0; \quad p_s \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

$$r(\alpha) = \rho(\alpha) / L, \quad \lambda = r(\alpha)' / r(\alpha)$$

Предполагается, что давление p_s ограничено в области, где оно определено. Ниже описывается отыскание давления p_s , вызванного первым слагаемым в (1.1). Давление, обусловленное вторым слагаемым в (1.1), находится аналогичным образом. Суммарное давление определяется путем суперпозиции.

2. Запишем уравнение меридиана оболочки

$$(2.1) \quad r(\alpha) = 1 + \varepsilon y(\alpha), \quad \pi \geq \alpha \geq 0$$

где ε — малый параметр, $y(\alpha)$ — ограниченная гладкая функция.

Используем специальную форму кривой (2.1) для решения сформулированной задачи методом малого параметра.

Заданные функции, дифференциальные операторы и неизвестные величины разложим в ряды по степеням малого параметра

$$(2.2) \quad p_i = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_{ik}, \quad L_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k L_{ijk} \quad (i,j=1,2,3), \quad p_s = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_{sk}, \quad u_j = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_{jk} \quad (j=1,2,3)$$

Разложения (2.2) подставим в систему уравнений (1.2), волновое уравнение (1.4), краевые и начальные условия, учитывая формулы для коэффициентов первой квадратичной формы и главных радиусов кривизны и

используя дифференциальные операторы (1.3). Функции $p_{i\alpha}$, $p_{s\alpha}$ (2.2) и их производные по r разложим в ряды Тейлора вблизи $r=1$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и получим бесконечную последовательность задач, которую можно решить по порядку.

1. Выпишем уравнения и условия, вытекающие из приравнивания коэффициентов при ε в нулевой степени

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^3 L_{ij0} u_{j0} = \delta_{i3} \beta_0 q_0 \quad (i=1,2,3), \quad \beta_0 = \frac{1-\nu^2}{2} \frac{\rho_0 L}{Eh}$$

$$\left(\nabla_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_{s0} = 0, \quad q_0 = - (p_{i0} + p_{s0}) |_{r=1}$$

$$\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial t^2} = - \frac{\beta_0}{\gamma_0} \frac{\partial}{\partial r} (p_{i0} + p_{s0}) |_{r=1}, \quad \gamma_0 = \frac{1-\nu^2}{2} \frac{L \rho_0 c^2}{Eh}$$

$$p_{s0} = \frac{\partial p_{s0}}{\partial t} = u_{j0} = \frac{\partial u_{j0}}{\partial t} = 0, \quad \text{при } t=0 \quad (j=1,2,3); \quad p_{s0} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

Дифференциальные операторы L_{ij0} (2.3) имеют вид

$$(2.4) \quad L_{110} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu - \kappa^2 - \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{120} = L_{210} = \kappa^2, \quad L_{130} = (1 + \nu + \kappa^2) \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$L_{220} = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu - \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \kappa^2$$

$$L_{230} = -\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{310} = (1 + \nu + \kappa^2) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha \right)$$

$$L_{320} = -\kappa^2 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha \right), \quad L_{330} = -\kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + 2(1 + \nu) + \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

2. Учитывая множители при ε в первой степени, соответственно имеем

$$(2.5) \quad \sum_{j=1}^3 L_{ij0} u_{j1} = \delta_{i3} \beta_0 q_1 - \sum_{j=1}^3 L_{ij1} u_{j0} \quad (i=1,2,3)$$

$$\left(\nabla_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_{s1} = 0, \quad q_1 = - \left[y \left(2 + \frac{\partial}{\partial r} \right) (p_{i0} + p_{s0}) + (p_{i1} + p_{s1}) \right] \Big|_{r=1}$$

$$\frac{\partial^2 u_{31}}{\partial t^2} = - \frac{\beta_0}{\gamma_0} \left[y \frac{\partial^2}{\partial r^2} (p_{i0} + p_{s0}) - y' \frac{\partial}{\partial \alpha} (p_{i0} + p_{s0}) + \frac{\partial}{\partial r} (p_{i1} + p_{s1}) \right] \Big|_{r=1}$$

$$p_{s1} = \frac{\partial p_{s1}}{\partial t} = u_{j1} = \frac{\partial u_{j1}}{\partial t} = 0 \quad (j=1,2,3), \quad p_{s1} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

Дифференциальные операторы (2.5) представим в форме

$$(2.6) \quad L_{111} = (\nu - 2) \operatorname{ctg} \alpha y' + (\nu + 2\kappa^2) y'' - 2\lambda_0^2 y \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{121} = \kappa^2 (y - y''), \quad L_{221} = a^2 \left[(\nu - 2) \operatorname{ctg} \alpha y' + \nu y'' - 2\lambda_0^2 y \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]$$

$$L_{131} = -[\nu \operatorname{ctg} \alpha y' + (1 + \kappa^2) y''] \frac{\partial}{\partial \alpha} - (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) y'' - \operatorname{ctg} y'' - y''''$$

$$L_{211} = -\kappa^2 (y + y''), \quad L_{231} = \kappa^2 y \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$L_{311} = -[\nu \operatorname{ctg} \alpha y' + (1 + \kappa^2) y''] \frac{\partial}{\partial \alpha} + (1 + \nu - \operatorname{ctg}^2 \alpha) y' - (\nu + \kappa^2) \operatorname{ctg} \alpha y'' - \kappa^2 y''''$$

$$L_{321} = -\kappa^2 \left[y \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha \right) + y' \right]$$

$$L_{331} = -2 \left[(1 + \nu) \operatorname{ctg} \alpha y' + (1 + \nu) y'' - \lambda_0^2 y \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]$$

Правая часть в системе уравнений (2.5) известна из решения задачи (2.3).

Отметим, что задача (2.3) является задачей о дифракции плоской звуковой волны на тонкой упругой сферической оболочке [1]. Решение задачи (2.5) дает возможность учесть влияние отклонения срединной поверхности оболочки от сферической формы; при этом поправка к решению (2.3) вычисляется с точностью до членов порядка ε . Представленный метод решения накладывает некоторое ограничение на форму меридиана (2.1) срединной поверхности оболочки. Приемлемые результаты можно ожидать при функциях $y(\alpha)$ вида

$$(2.7) \quad y(\alpha) = A f_n(\alpha), \quad |A| \leq 1, \quad \pi \geq \alpha \geq 0 \quad (n=1, 2, 3)$$

$$f_1(\alpha) = \cos n\alpha \quad (n=1, 2), \quad f_2(\alpha) = \cos^2 \alpha$$

$$f_3(\alpha) = Z^m [1 + m(1 - Z)], \quad Z = \alpha / \pi \quad (m=1, 2, 3, 4)$$

Если в рядах (2.2) удерживать больше членов, то функцию $y(\alpha)$ можно задать, например, в виде произведения функций $f_n(\alpha)$ (2.7) или ввести параметры $n > 2, m > 4$.

3. Применим интегральное преобразование Лапласа по времени t , позволяющее учесть при решении начальные условия.

Исходя из (1.1) $p_i = p_0 g(t - z) H(t - z)$, запишем в полярных координатах

$$(3.1) \quad p_i = p_0 g[t - (1 + \varepsilon y_0 - r \cos \alpha)] H[t - (1 + \varepsilon y_0 - r \cos \alpha)], \quad y_0 = y(\alpha) |_{\alpha=0}$$

Оригиналу (3.1) соответствует изображение

$$(3.2) \quad p_i^L = p_0 g^L(s) \exp[-s(1 - r \cos \alpha)] \exp(-\varepsilon s y_0)$$

где s — параметр преобразования, L — индекс изображения.

Разложив $\exp(-\varepsilon s y_0)$ в ряд по степеням ε , получим из (3.2)

$$(3.3) \quad p_i^L = p_0 g^L(s) \exp[-s(1 - r \cos \alpha)] \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{(-s y_0)^k}{k!}$$

$$p_{s_0}^L = g^L(s) r^{-1} \exp(-sr) \sum_{m=0}^{\infty} p_{0m}^L f_m(sr) P_m(\cos \alpha)$$

Сопоставление выражения (3.3) с изображением разложения (2.2) дает

$$(3.4) \quad p_{i0}^L = g^L(s) \exp[-s(1-r \cos \alpha)], \quad p_{i1}^L = -y_0 s g^L(s) \exp[-s(1-r \cos \alpha)]$$

1. Нулевое приближение. Применяв к задаче (2.3) интегральное преобразование Лапласа, имеем

$$(3.5) \quad \sum_{j=1}^3 N_{ij0} u_{j0}^L = \delta_{i3} \beta_0 q_0^L \quad (i=1,2,3), \quad (\nabla_0^2 - s^2) p_{s0}^L = 0$$

$$q_0^L = -(p_{i0}^L + p_{s0}^L)|_{r=1}, \quad u_{30}^L = -s^2 \frac{\beta_0}{\gamma_0} \frac{\partial}{\partial r} (p_{i0}^L + p_{s0}^L)|_{r=1}, \quad p_{s0}^L \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

Операторы N_{ij0} (3.5) получаются из соответствующих операторов L_{ij0} (2.4) заменой символов $\partial^2 / \partial t^2$ на s^2 .

Используя метод разделения переменных, представим решение задачи (3.5) в виде бесконечных рядов по полиномам Лежандра

$$(3.6) \quad u_{10}^L = \sum_{m=0}^{\infty} u_{0m}^L \frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial \alpha}, \quad u_{20}^L = \sum_{m=0}^{\infty} v_{0m}^L \frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial \alpha}$$

$$u_{30}^L = \sum_{m=0}^{\infty} w_{0m}^L P_m(\cos \alpha), \quad p_{30}^L = g^L(s) r^{-1} \exp(-sr) \sum_{m=0}^{\infty} p_{0m}^L f_m(sr) P_m(\cos \alpha)$$

содержащих неопределенные коэффициенты $u_{0m}^L, v_{0m}^L, w_{0m}^L, p_{0m}^L$. Решения (3.6) ограничены при $\lambda \gg \alpha \gg 0$, а p_{s0}^L удовлетворяет условию излучения.

Неизвестные коэффициенты находятся из алгебраической системы уравнений

$$(3.7) \quad a_{11m} u_{0m}^L + a_{12m} v_{0m}^L + a_{13m} w_{0m}^L = 0, \quad a_{21m} u_{0m}^L + a_{22m} v_{0m}^L + a_{23m} w_{0m}^L = 0$$

$$a_{31m} u_{0m}^L + a_{32m} v_{0m}^L + (a_{33m} + a_{34m}) w_{0m}^L = -(2m+1) \beta_0 g^L(s) / F_m(s)$$

Запишем коэффициенты a_{ijm}

$$a_{11m} = s^2 c_{11m} + d_{11m}, \quad a_{12m} = a_{21m} = d_{12m}, \quad a_{13m} = d_{13m}, \quad a_{22m} = s^2 c_{22m} + d_{22m},$$

$$a_{23m} = d_{23m}$$

$$a_{31m} = d_{31m}, \quad a_{32m} = d_{32m}, \quad a_{33m} = s^2 c_{33m} + d_{33m}, \quad a_{34m} = \gamma_0 s^2 f_m(s) / F_m(s)$$

$$c_{11m} = -\lambda_0^2, \quad c_{22m} = -a^2 \lambda_0^2, \quad c_{33m} = \lambda_0^2, \quad d_{11m} = 1 - \mu - \nu - \kappa^2, \quad d_{12m} = \kappa^2$$

$$d_{13m} = 1 + \nu + \kappa^2, \quad d_{22m} = -\kappa^2 + a^2(1 - \mu - \nu), \quad d_{23m} = -\kappa^2, \quad d_{31m} = -(1 + \nu + \kappa^2) \mu$$

$$d_{32m} = \kappa^2 \mu, \quad d_{33m} = 2(1 + \nu) + \kappa^2 \mu, \quad \mu = m(m+1)$$

В формулах (3.6), (3.7) через f_m, F_m обозначены полиномы Стокса

$$(3.8) \quad f_m(s) = \sum_{k=0}^m f_{mk} s^{-k}, \quad f_{mk} = \frac{(m+k)!}{(m-k)! k! 2^k}, \quad F_m(s) = \sum_{k=0}^m f_{mk} (s+k+1) s^{-k}$$

Решив систему уравнений (3.7), имеем

$$(3.9) \quad u_{0m}^L = G_m A_m, \quad v_{0m}^L = G_m B_m, \quad w_{0m}^L = G_m C_m, \quad G_m = (2m+1) \beta_0 g^L(s) / D_m$$

$$A_m = s^2 g_{12m} + g_{10m}, \quad B_m = s^2 g_{22m} + g_{20m}, \quad C_m = s^4 g_{34m} + s^2 g_{32m} + g_{30m},$$

$$D_m = E_m F_m(s) - \gamma_0 s^2 C_m f_m(s), \quad g_{12m} = c_{22m} d_{13m}, \quad g_{10m} = -d_{12m} d_{23m} + d_{22m} d_{13m}$$

$$g_{22m} = c_{11m} d_{23m}, \quad g_{20m} = d_{11m} d_{23m} - d_{12m} d_{13m}, \quad g_{34m} = -c_{11m} c_{22m}$$

$$g_{32m} = -c_{11m} d_{22m} - c_{22m} d_{11m}, \quad g_{30m} = -d_{11m} d_{22m} + d_{12m}^2$$

$$E_m = s^6 l_{6m} + s^4 l_{4m} + s^2 l_{2m} + l_{0m}, \quad l_{6m} = -c_{33m} g_{34m}, \quad l_{4m} = -d_{33m} g_{34m} - c_{33m} g_{32m}$$

$$l_{2m} = -d_{33m} g_{32m} - c_{33m} g_{30m} - c_{22m} d_{13m} d_{31m} - c_{11m} d_{23m} d_{32m}$$

$$l_{0m} = -d_{33m} g_{30m} + d_{13m} (d_{12m} d_{32m} - d_{22m} d_{31m}) - d_{23m} (d_{11m} d_{32m} - d_{12m} d_{31m})$$

Используя изображения краевых условий, получим

$$(3.10) \quad p_{0m}^L = (2m+1) \exp(s) \left[s \exp(-s) \frac{\partial i_m(s)}{\partial s} + s^2 \gamma_0 C_m D_m^{-1} \right] / F_m(s)$$

Здесь i_m — сферическая функция Бесселя

$$i_m(s) = {}_1/2 s^{-1} [\exp(s) v_m(s) - (-1)^m \exp(-s) f_m(s)]$$

$$\frac{\partial i_m(s)}{\partial s} = \frac{1}{2} s^{-2} [\exp(s) V_m(s) + (-1)^m \exp(-s) F_m(s)]$$

$$v_m(s) = \sum_{k=0}^m f_{mk} (-1)^k s^k, \quad V_m(s) = \sum_{k=0}^m f_{mk} (-1)^k (s-k-1) s^{-k}$$

Подставляя (3.10) в (3.6), получаем

$$(3.11) \quad p_{s_0}^L = g^L(s) r^{-1} \exp[-s(r-1)] \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \chi_m^L(sr) \varphi_{0m}^L(s) P_m(\cos \alpha)$$

$$\chi_m^L(sr) = f_m(sr) / F_m(s), \quad \varphi_{0m}^L(s) = s \exp(-s) \partial i_m(s) / \partial s + s^2 \gamma_0 C_m / D_m$$

2. *Первое приближение.* Применив к задаче (2.5) интегральное преобразование Лапласа, получаем изображающую задачу

$$(3.12) \quad \sum_{j=1}^3 N_{ij_0} u_{j_1}^L = \delta_{i3} \beta_0 q_i^L - \sum_{j=1}^3 N_{ij_1} u_{j_0}^L \quad (i=1,2,3)$$

$$(\nabla_0^2 - s^2) p_{s_1}^L = 0, \quad p_{s_1}^L \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

$$q_1^L = - \left[y \left(2 + \frac{\partial}{\partial r} \right) (p_{i_0}^L + p_{s_0}^L) + (p_{i_1}^L + p_{s_1}^L) \right] \Big|_{r=1}$$

$$u_{s_1}^L = -s^{-2} \frac{\beta_0}{\gamma_0} \left[y \frac{\partial^2}{\partial r^2} (p_{i_0}^L + p_{s_0}^L) - y' \frac{\partial}{\partial \alpha} (p_{i_0}^L + p_{s_0}^L) + \frac{\partial}{\partial r} (p_{i_1}^L + p_{s_1}^L) \right] \Big|_{r=1}$$

Операторы N_{ij_0} , N_{ij_1} (3.12) получаются из соответствующих операторов L_{ij_0} , L_{ij_1} (2.4), (2.6) заменой символов $\partial^2 / \partial t^2$ на s^2 .

Как и в нулевом приближении, применим метод разделения переменных и представим решение задачи (3.12) в виде

$$(3.13) \quad u_{i_1}^L = \sum_{m=0}^{\infty} u_{1m}^L \frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial \alpha}, \quad u_{s_1}^L = \sum_{m=0}^{\infty} v_{1m}^L \frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial \alpha}$$

$$u_{s_1}^L = \sum_{m=0}^{\infty} w_{1m}^L P_m(\cos \alpha), \quad p_{s_1}^L = g^L(s) r^{-1} \exp(-sr) \sum_{m=0}^{\infty} p_{1m}^L f_m(sr) P_m(\cos \alpha)$$

Разложения (3.6), (3.13) подставим в систему уравнений (3.12), учитывая при этом (3.9) и используя формулу (3.4). Над известными величинами $u_{s_0}^L$, v_{0m}^L , w_{0m}^L выполним преобразования, соответствующие операторам N_{ij_1} . Полученные функции разложим в ряды по полиномам Лежандра и производным от них. В результате имеем алгебраическую систему урав-

НЕНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ $u_{1m}^L, v_{1m}^L, w_{1m}^L$

$$(3.14) \quad \begin{aligned} a_{11m}u_{1m}^L + a_{12m}v_{1m}^L + a_{13m}w_{1m}^L &= \beta_0 g^L(s) \beta_{1m}^L \\ a_{21m}u_{1m}^L + a_{22m}v_{1m}^L + a_{23m}w_{1m}^L &= \beta_0 g^L(s) \beta_{2m}^L \\ a_{31m}u_{1m}^L + a_{32m}v_{1m}^L + (a_{33m} + a_{34m})w_{1m}^L &= \beta_0 g^L(s) (\beta_{3m}^L + \gamma_{3m}^L) \end{aligned}$$

Коэффициенты в левой части системы уравнений (3.14) тождественно равны коэффициентам системы уравнений (3.7), а правые части определены следующими формулами:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \beta_{1m}^L &= (2m+1) [2m(m+1)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (A_n \beta_{11mn} + B_n \beta_{12mn} + C_n \beta_{13mn}) D_n^{-1} \\ \beta_{2m}^L &= (2m+1) [2m(m+1)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (A_n \beta_{21mn} + B_n \beta_{22mn} + C_n \beta_{23mn}) D_n^{-1} \\ \beta_{3m}^L &= \frac{1}{2} (2m+1) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (A_n \beta_{31mn} + B_n \beta_{32mn} + C_n \beta_{33mn}) D_n^{-1} \\ \gamma_{3m}^L &= \exp(-s) (2m+1) \left\{ s y_0 - s^2 y_0 \frac{f_m(s)}{F_m(s)} \frac{\partial i_m(s)}{\partial s} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} [M_n^L(s) \alpha_{mn} + N_n^L(s) \beta_{mn} + Q_n^L(s) \gamma_{mn}] \right\} \\ M_n^L(s) &= \frac{1}{2} (2n+1) \left\{ 2i_n(s) + s \frac{\partial i_n(s)}{\partial s} + s^2 \frac{\partial^2 i_n(s)}{\partial s^2} + \right. \\ &\quad \left. + p_0 n^L \left[2f_n(s) - (s+3)F_n(s) + s \frac{\partial F_n(s)}{\partial s} \right] \right\} \\ N_n^L(s) &= -1/2 s (2n+1) i_n(s), \quad Q_n^L(s) = 1/2 p_0 n^L f_n(s) \\ \alpha_{mn} &= \int_0^{\pi} y \sin \alpha P_m(\cos \alpha) P_n(\cos \alpha) d\alpha, \quad \beta_{mn} = \int_0^{\pi} y \sin^2 \alpha P_m(\cos \alpha) P_n(\cos \alpha) d\alpha \\ \gamma_{mn} &= \int_0^{\pi} y \sin \alpha \frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial \alpha} P_n(\cos \alpha) d\alpha \\ \beta_{11mn}^L &= - \int_0^{\pi} N_{111} \sin^3 \alpha \frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial(\cos \alpha)} \frac{\partial P_n(\cos \alpha)}{\partial(\cos \alpha)} d\alpha \\ \beta_{12mn}^L &= - \int_0^{\pi} N_{121} \sin^3 \alpha \frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial(\cos \alpha)} \frac{\partial P_n(\cos \alpha)}{\partial(\cos \alpha)} d\alpha \\ \beta_{13mn}^L &= \int_0^{\pi} [v y' \operatorname{ctg} \alpha + (1+\kappa^2) y''] \sin^3 \alpha \frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial(\cos \alpha)} \frac{\partial P_n(\cos \alpha)}{\partial(\cos \alpha)} d\alpha - \\ &\quad - \int_0^{\pi} [y'(1-\operatorname{ctg}^2 \alpha) + y'' \operatorname{ctg} \alpha + y'''] \sin^2 \alpha \frac{\partial P_m(\cos \alpha)}{\partial(\cos \alpha)} P_n(\cos \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Решив систему уравнений (3.14), найдем неизвестные $u_{1m}^L, v_{1m}^L, w_{1m}^L$ и вычислим p_{1m}^L . Итак, имеем

$$(3.16) \quad p_{1m}^L = \exp(s) [s\varphi_{1m}^L / F_m(s) + \psi_{1m}^L / D_m(s)]$$

$$\varphi_{1m}^L = -y_0(2m+1)s \exp(-s) \frac{\partial i_m(s)}{\partial s} - \gamma_0 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) C_k D_k^{-1}$$

$$\psi_{1m}^L = \gamma_0 [\beta_{1m}^L R_{1m} + \beta_{2m}^L R_{2m} + (\beta_{3m}^L + \gamma_{3m}^L) R_{3m}]$$

$$R_{1m} = -s^2 c_{22m} d_{31m} + d_{12m} d_{32m} - d_{31m} d_{22m}, \quad R_{2m} = -s^2 c_{11m} d_{32m} - d_{11m} d_{32m} + d_{12m} d_{31m}$$

$$R_{3m} = s^4 c_{11m} c_{22m} + s^2 (c_{11m} d_{22m} + c_{22m} d_{11m}) + d_{11m} d_{22m} - d_{12m}^2$$

Подставив (3.16) в (3.13), получаем

$$(3.17) \quad p_{s1}^L = g^L(s) r^{-1} \exp[-s(r-1)] \sum_{m=0}^{\infty} [s\Phi_{1m}^L(s) + \Psi_{1m}^L(s)] P_m(\cos \alpha)$$

$$\Phi_{1m}^L(s) = \chi_m^L(sr) \varphi_{1m}^L(s), \quad \Psi_{1m}^L(s) = \eta_m^L(sr) \psi_{1m}^L(s),$$

$$\eta_m^L(sr) = f_m(sr) / D_m(s)$$

4. Построение оригинала по изображению выполним раздельно для нулевого и первого приближения.

1. Нулевое приближение описывает дифракцию плоской звуковой волны на оболочке сферической формы¹.

2. Для задачи первого приближения, исходя из (3.17), запишем

$$(4.1) \quad p_{s1}^L = r^{-1} \exp[-s(r-1)] \sum_{m=0}^{\infty} [X_{1m}^L(s) + Y_{1m}^L(s)] P_m(\cos \alpha)$$

$$X_{1m}^L(s) = s g^L(s) \Phi_{1m}^L(s), \quad Y_{1m}^L(s) = g^L(s) \Psi_{1m}^L(s)$$

Используя теоремы о свертке и сдвиге, имеем

$$(4.2) \quad p_{s1}(r, \alpha, t_*) = r^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} [X_{1m}(t_*) + Y_{1m}(t_*)] H(t_*) P_m(\cos \alpha)$$

$$X_{1m} = g(0) \Phi_{1m}(t) + \int_0^t h(\tau) \Phi_{1m}(t-\tau) d\tau, \quad h(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial t}$$

$$\Phi_{1m}(t) = \int_0^t \chi_m(\tau) \varphi_{1m}(t-\tau) d\tau$$

$$Y_{1m}(t) = \int_0^t g(\tau) \Psi_{1m}(t-\tau) d\tau, \quad \Psi_{1m}(t) = \int_0^t \eta_m(\tau) \psi_{1m}(t-\tau) d\tau, \quad t_* = t - r + 1$$

Функция $\eta_m^L(s)$ является мероморфной. Ее оригинал находится на основании теоремы Коши о вычетах в полюсах

$$(4.3) \quad \eta_m(t) = \exp(st) f_m(sr) \Big/ \frac{d}{ds} [s^m D_m(s)] \Big|_{s=s_{mj}}$$

где s_{mj} — корни уравнения $D_m(s) = 0$.

¹ Способ построения оригинала по изображению (3.11) на основе теорем о свертке и сдвиге и теореме Коши о вычетах в полюсах см. в [1].

Полином $D_m(s)$ имеет $(m+7)$ корней, из которых $(m+1)$ корней происходит от полинома Стокса $F_m(s)$, а шесть корней связаны с системой из трех уравнений второго порядка, описывающих движение оболочки. Нахождение корней уравнения (4.4) входит в построение решения в нулевом приближении. Оригинал функции $\varphi_{1m}^L(s)$ (3.17) (с учетом (3.14)) находится по таблицам соответствий и на базе теоремы Коши о вычетах в полюсах.

Аналогичным образом по изображению (3.16) (с учетом (3.15)) находится оригинал функции $\psi_{1m}^L(s)$.

При построении решения не возникает необходимости нахождения корней функций, отличных от $F_m(s)$ и $D_m(s)$. Вычисление оригиналов функций $\varphi_{1m}(t)$ и $\psi_{1m}(t)$ по изображениям составляет однотипную, наиболее трудоемкую часть работы.

5. Описанный способ нахождения оригинала по изображению является точным для каждого члена ряда. Из эффективных способов обращения, применяемых к задачам такого рода, отметим два: численное обращение [2] и сведение к интегральным уравнениям [3]. Вместо вычисления решения в виде бесконечного ряда нередко используют интегральное преобразование Зоммерфельда — Ватсона, переводящее ряд по полиномам Лежандра в интеграл на комплексной плоскости. Этот прием пригоден и для рассматриваемой задачи, но он должен быть применен отдельно для каждого члена ряда по степеням малого параметра.

При формулировке задачи предполагалось, что жидкость описывается скалярным волновым уравнением, а оболочка — уравнениями теории типа Тимошенко. Вопрос о степени точности описания движения жидкости и оболочки в отдельности и общей точности задачи не исследуется. Критерием выбора моделей внешней среды и оболочки служила линейность задачи.

Связанные между собой вопросы о форме меридиана оболочки и быстроте сходимости ряда по степеням малого параметра здесь не рассматриваются.

Поступила 25 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Векслер Н. Д. Дифракция плоской звуковой волны на тонкой упругой сферической оболочке. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3.
2. Беспалова Е. И., Воронникова М. И., Кононенко В. О. О дифракции ударной волны в воде на абсолютно жестком неподвижном цилиндре. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 11.
3. Кубенко В. Д. Смещение в цилиндрической оболочке при действии цилиндрической волны в акустической среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.