

## РЕАКЦИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ДЕЙСТВИЕ ВОЗДУШНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Э. И. ГРИГОЛЮК, В. П. КОЛГАН, Е. Б. КУЗНЕЦОВ

(Москва)

При исследовании взаимодействия ударных волн с упругими конструкциями обычно предполагается, что волновые процессы описываются уравнениями линейной акустики. Акустическая теория дает хорошие результаты, если среда, в которой расположена исследуемая конструкция, является слабо сжимаемой жидкостью.

Согласно [1], акустическая теория применима в воде, если давление на фронте падающей волны не превышает  $2800 \text{ кг/см}^2$  над давлением в невозмущенной среде. Но при этом давлении уже существуют отличия между решениями, полученными на основании акустической и нелинейной теорий. Авторы монографии [2] полагают, что это давление не должно превышать  $1100 \text{ кг/см}^2$ , а в [3] считается, что наиболее реальный предел для акустической теории в воде  $350 \text{ кг/см}^2$ .

Такое различие в величине предельного давления объясняется тем, что при его определении авторы исходят из различных предположений. Если принять во внимание даже наименьший из приведенных пределов давления, видно, что он довольно значителен, и акустическая теория может с успехом применяться при решении задач о взаимодействии нестационарной волны давления с конструкциями, расположенными в воде. Если же окружающей средой является газ, то, чтобы волновые процессы могли описываться уравнениями акустики, максимальное давление на фронте ударной волны по оценке [1] не должно превышать  $1 \text{ кг/см}^2$  над давлением в невозмущенной среде. Как отмечено в [2], это значение давления сильно завышено, и акустическая теория может применяться при перепаде не более  $0.07 \text{ кг/см}^2$ . Следовательно, при решении данного класса задач в воздухе акустическая теория практически непригодна.

Кроме того, известно [4], что при некотором угле падения волны, который называется критическим, начинается нерегулярное отражение, характеризующееся появлением тройной конфигурации Маха. В акустической же теории угол падения волны всегда равен углу отражения и никакой отошедшей волны не образуется.

В предлагаемой работе исследуется поведение трехслойной цилиндрической оболочки под действием ударной волны, распространение которой описывается системой нелинейных уравнений газодинамики. Оказалось, что, несмотря на ряд отмеченных недостатков, присутствующих акустической теории, при исследовании взаимодействия ударной воздушной волны с перепадом давления на фронте  $0.5 \text{ кг/см}^2$  с трехслойной цилиндрической оболочкой на основании акустической и нелинейной теорий, получаются довольно близкие результаты.

1. Рассмотрим плоскую задачу обтекания трехслойной круговой цилиндрической упругой оболочки радиуса  $R$  воздушной ударной волной с постоянными параметрами за фронтом. Начало декартовой системы координат  $(x, y)$  поместим в центр оболочки, ось  $x$  направим по направлению движения волны. Считаем, что в начальный момент времени  $t=0$ , время отсчитывается от момента соприкосновения ударной волны с оболочкой, газ перед волной находится в состоянии покоя:

$$(1.1) \quad p=p_1, \quad \rho=\rho_1, \quad V=V_1=0, \quad \text{при } x \geq -R$$

параметры за ударной волной следующие:

$$(1.2) \quad p=p_2, \quad \rho=\rho_2, \quad V=V_2 \quad (x \leq -R)$$

Параметры с индексами 1 и 2 связаны между собой соотношениями на фронте ударной волны. Предполагается, что деформация упругой оболочки не вносит существенных искажений в нестационарный газодинамический поток, обтекающий цилиндр. Давлением, возникающим из-за деформации и перемещения оболочки, в воздухе можно пренебречь и рас-

смаатриваемую задачу о воздействии нелинейной ударной волны на оболочку разделить на две независимые задачи: определение нагрузок при дифракции ударной волны на неподвижном круговом цилиндре и исследование поведения оболочки при заданных нестационарных внешних нагрузках.

Систему уравнений газодинамики, описывающих движение идеального сжимаемого газа для плоского случая, запишем так:

$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_2) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v_1^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_1 v_2) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial y}(p + \rho v_2^2) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho v_1 \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \right) \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho v_2 \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \right) \right] = 0
 \end{aligned}$$

Здесь первое уравнение — уравнение неразрывности, второе и третье — уравнения движения, четвертое — уравнение сохранения энергии;  $p$ ,  $\rho$  — давление и плотность газа;  $v_1$  и  $v_2$  — составляющие вектора скорости  $\mathbf{V}$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Уравнение состояния идеального газа принимается в виде

$$(1.4) \quad p = (\gamma - 1) e \rho$$

где  $e$  — внутренняя энергия единицы массы газа,  $\gamma$  — показатель адиабаты, для воздуха  $\gamma = 1.4$ . Система уравнений (1.3) может описывать распространение волн как с малыми, так и большими перепадами давлений на фронте, при которых вязкостью, теплопроводностью и излучением газа можно пренебречь.

На поверхности оболочки заданы обычные условия непротекания, т. е. при  $x^2 + y^2 = R^2$  нормальная составляющая вектора скорости потока равна нулю. В силу симметрии задачи будем рассматривать только верхнюю полуплоскость  $y \geq 0$  и считать, что в соотношениях (1.1)–(1.4) все величины отнесены к своим характерным значениям  $p_0 = p_1$ ,  $v_0 = [p_1 / \rho_1]^{1/2}$ ,  $x_0 = y_0 = R$ ,  $t_0 = R / v_0$ .

В рассматриваемой задаче наблюдается сложная нестационарная картина взаимодействия ударной волны с телом, сопровождающаяся появлением новых ударных волн, контактных разрывов и тройной маховской конфигурации. Для решения задачи можно применить методы сквозного счета, основанные, как правило, на использовании исходных уравнений в виде законов сохранения и позволяющие вести расчет сквозь сильные разрывы [5, 6].

Конечноразностный способ повышенного порядка точности, сходный в общих чертах с методом С. К. Годунова для решения нестационарных задач газовой динамики, описан в работе [7]. Точность второго порядка по координатам достигается при помощи линейной интерполяции параметров внутри каждой расчетной ячейки. Достоинством является малое «размазывание» поверхностей сильных разрывов и сохранение монотонного поведения функций вблизи фронтов ударных волн. Этот способ был использован для нахождения величин нестационарных нагрузок, действующих на

поверхность цилиндра при обтекании ударной волной. При решении задачи используется расчетная сетка, состоящая из набора  $n$  лучей, исходящих из центра цилиндра, и  $k$  концентрических окружностей, приближенно аппроксимированных ломаными линиями. Расчеты проводились при размерах сетки  $n \times k = 80 \times 25$ . Полученные численные зависимости величины давления на поверхности тела от времени использовались для расчета динамического поведения бесконечно длинной трехслойной цилиндрической оболочки, радиус срединной поверхности которой равен  $R$ , а толщина —  $h$  при воздействии на нее нелинейной ударной волны.

Исследование поведения оболочки основано на нелинейных уравнениях равновесия трехслойных непологих оболочек [8]. Поведение оболочки зависит от времени  $t$  и угла  $\theta$ , отсчитываемого от точки соприкосновения волны с оболочкой. При составлении уравнений движения учитываются силы инерции в окружном, радиальном направлениях, а также инерция вращения заполнителя.

Пусть  $u$ ,  $w$ ,  $\Psi$  — соответственно окружное перемещение, прогиб и угол сдвига в заполнителе, тогда уравнения движения цилиндрической оболочки в усилиях имеют вид

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial N^\circ}{\partial \theta} + k \frac{\partial M^\circ}{\partial \theta} - \vartheta^\circ N^\circ + \frac{2(1-\nu^2)}{k} \frac{\partial p^* W}{\partial \theta} &= k_3 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \\ k \frac{\partial^2 M^\circ}{\partial \theta^2} - N^\circ - \frac{\partial \vartheta^\circ N^\circ}{\partial \theta} - \frac{2(1-\nu^2)}{k^2} \left[ 1 + k \left( W + \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] &= k_3 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \\ k \left( \frac{\partial H^\circ}{\partial \theta} + k_1 \frac{\partial M^\circ}{\partial \theta} \right) - k_2 Q^\circ &= k_4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} \\ U = \frac{u}{h}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad k = \frac{h}{R}, \quad k_1 = \frac{h_3}{2R}, \quad \vartheta^\circ = k \left( U - \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \\ \tau = \frac{ct}{R}, \quad p^* = \frac{p}{E}, \quad t_i = \frac{h_i}{h} \end{aligned}$$

Здесь  $N^\circ$ ,  $Q^\circ$ ,  $M^\circ$ ,  $H^\circ$ ,  $M^\circ$  — безразмерные удельные суммарные усилия и моменты, выражающиеся через размерные следующим образом:  $N^\circ = BN$ ;  $Q^\circ = Gh_3 Q$ ,  $M^\circ = DM$ ,  $H^\circ = DH$ ,  $M^\circ = DM$  —

$$B = \frac{2R(1-\nu^2)}{Eh^2}, \quad D = \frac{2R(1-\nu^2)}{Eh^3}, \quad k_2 = \frac{2(1-\nu^2)G}{F} t_3.$$

$$k_3 = \frac{2c^2(1-\nu^2)}{E} \sum_{i=1}^3 \rho_i t_i, \quad k_4 = \frac{2c^2(1-\nu^2)}{E} \frac{k_1^2}{k} \left( \rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 + \frac{1}{3} \rho_3 t_3 \right)$$

$c$  — скорость распространения ударной волны,  $p$  — газодинамическое давление, действующее на оболочку,  $\rho_i$ ,  $h_i$  — плотности и толщины слоев,  $i=1$  соответствует внешнему несущему слою,  $i=2$  — внутреннему,  $i=3$  — заполнителю,  $G$  — модуль сдвига материала заполнителя,  $E$ ,  $\nu$  — приведенные модуль упругости и коэффициент Пуассона трехслойной оболочки, выражения для которых даны в работе [8].

Безразмерные усилия, входящие в уравнения (1.5), выражаются через перемещения следующим образом:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} N^\circ &= e + 6/k_1(c_{12} + k_1 c_{14}) \xi + 6c_{13} \chi \\ M^\circ &= c_{13} e / 2 + c_{32} \alpha + c_{34} \xi + c_{33} \chi, \quad H^\circ = c_{12} e / 2 + c_{22} \alpha + c_{24} \xi + c_{23} \chi \\ M^\circ &= c_{14} e / 2 + c_{42} \alpha + c_{44} \xi + c_{43} \chi, \quad Q^\circ = \Psi - k(U - \partial W / \partial \theta) \end{aligned}$$

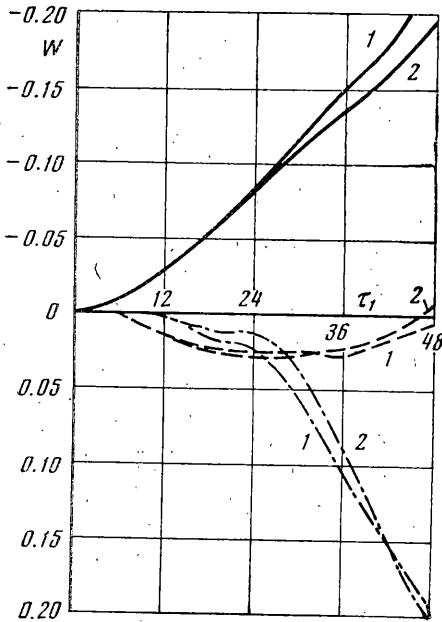
Здесь

$$e = 2 \frac{\partial U}{\partial \theta} + 2W + k \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} + W \right)^2 + \left( U - \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

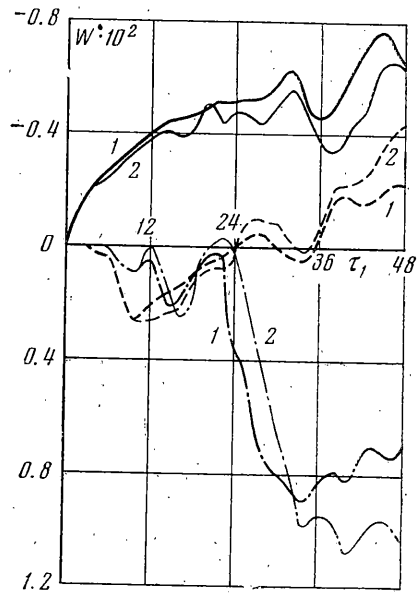
$$\xi = \frac{k_1}{6} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - k \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad \kappa = \frac{k}{6} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\alpha = \frac{k}{6} \left\{ \Psi U - \Psi \frac{\partial W}{\partial \theta} + k \left[ - \left( U - \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 - \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} W + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} W \right] + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} W - \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right\} + \frac{1}{6} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

$c_{ij}$  — коэффициенты, зависящие от структуры слоев трехслойной оболочки и от свойств материалов, из которых изготовлены эти слои (см. [8]).



Фиг. 1



Фиг. 2

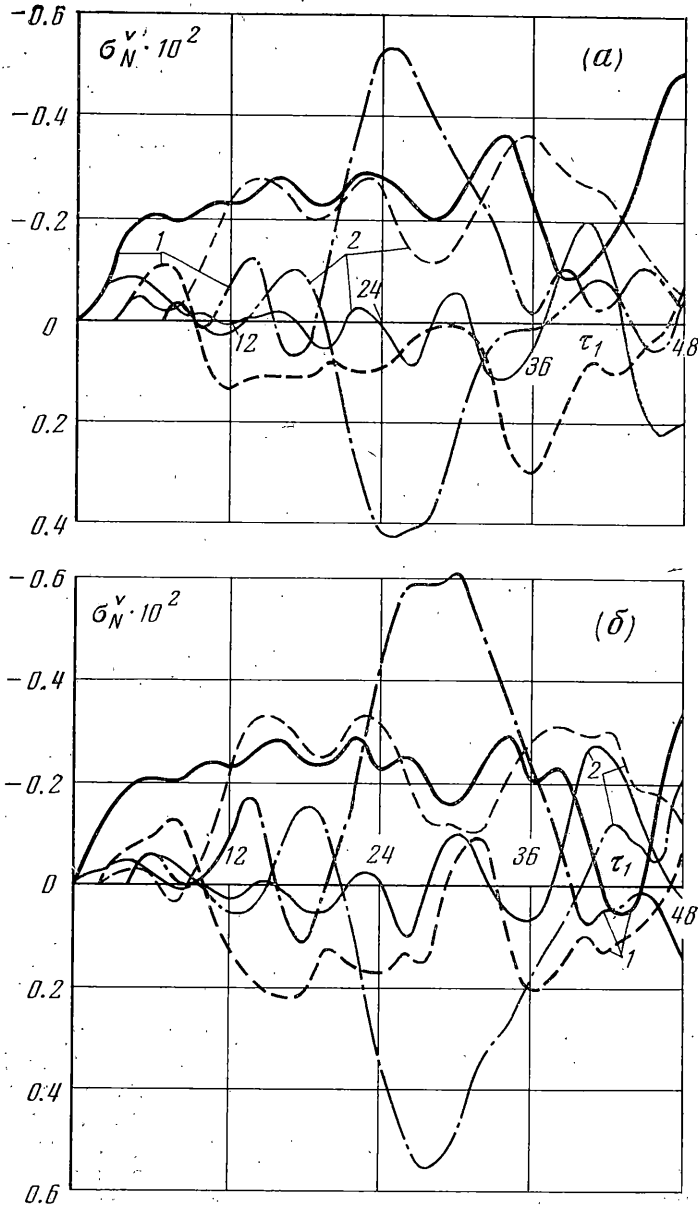
Подставляя в (1.5) выражения (1.6), получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций  $U, W, \Psi$ , которую интегрируем численно на ЭЦВМ при помощи метода конечных разностей и метода Кутты — Мерсона. Вследствие симметрии задачи рассматривалась только половина сечения оболочки, которая разбивалась на  $n=40, 60, 80$  участков. Так как число разбиений практически не влияло на полученные результаты, то при решении задачи для уменьшения времени счета принималось  $n=40$ . Предполагалось, что в начальный момент времени оболочка находится в состоянии покоя, т. е.

$$(1.7) \quad U=W=\Psi=U^*=W^*=\Psi^*=0 \text{ при } \tau=0$$

2. В качестве примера рассматривалось обтекание ударной волной с перепадом давления на фронте  $0.5 \text{ кг/см}^2$  трехслойной цилиндрической оболочки с легким заполнителем, передающим поперечный сдвиг ( $G=2400 \text{ кг/см}^2, \nu_3=0.3, E_3=0$ ), и сталь-

ными несущими слоями ( $E_1=E_2=2.3 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu_1=\nu_2=0.3$ ) симметричной структуры ( $t_1=t_2=0.05$ ,  $t_3=0.9$ ),  $k=0.0464$ .

Результаты расчетов прогибов, скоростей, мембранных и изгибных напряжений, вычисленных в трех характерных точках оболочки  $\theta=0, \pi/2, \pi$ , приведены соответственно на фиг. 1, 2, 3, а, 4, а. Сплошной линией представлены функции, вычисленные в точке  $\theta=0$ , пунктирной – в точке  $\theta=\pi/2$ , штрих-пунктирной – в точке  $\theta=\pi$ .

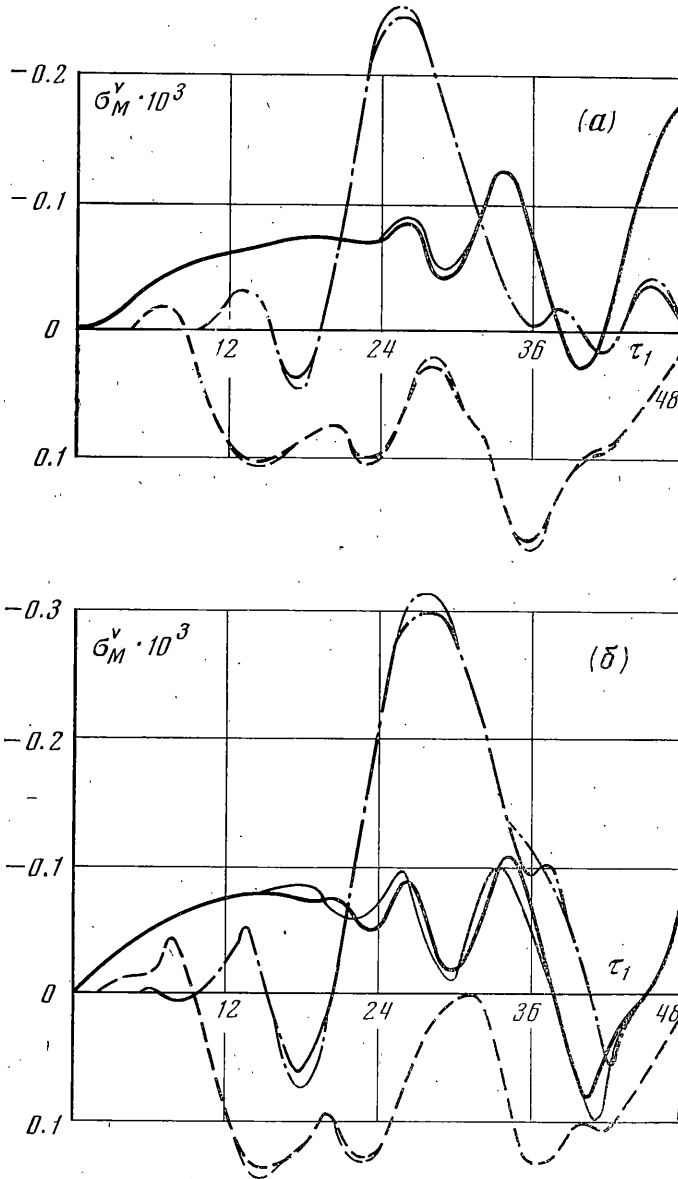


Фиг. 3

На фиг. 1, 2 результаты, относящиеся к данному случаю, помечены цифрой 1. Графики построены в зависимости от безразмерного времени  $\tau_1 = \tau c_0 / c = c_0 t / R$ , где  $c_0$  – скорость распространения звука в материале оболочки ( $c_0 = 5400$  м/сек). Изменение прогибов, скоростей и напряжений по времени имеет волнообразный характер. Это объясняется распространением упругих волн в материале оболочки. На фиг. 2 видно,

что скорость оболочки в точке  $\theta=\pi$  достигает максимального значения в момент прихода ударной волны в эту точку.

Мембранные и изгибные напряжения в наружном и внутреннем слоях (фиг. 3, а, 4, а) представлены в безразмерном виде:  $\sigma_i^v = \sigma_i(1 - \nu_i^2)/E_i k$ . Изгибные напряжения подсчитаны в крайних волокнах, наиболее удаленных от нейтральной линии несущих



Фиг. 4

слоев. Напряжения в наружном несущем слое помечены цифрой 1 и очерчены более толстой линией, чем помеченные цифрой 2 напряжения во внутреннем несущем слое. Присутствие только одной толстой линии означает, что напряжения в слоях практически совпадают. На фиг. 3, а видно, что мембранные напряжения в несущих слоях отличаются значительно, сохраняя в некоторые моменты даже противоположные знаки, в то время как изгибные (фиг. 4, а) практически совпадают и отличаются только в момент прихода в исследуемую точку фронта ударной или упругой волны. Наибольшее значение мембранные и изгибные напряжения имеют в точке  $\theta=\pi$ .

Аналогичный результат получен в работе [3] при исследовании поведения однородной цилиндрической оболочки в жидкости под действием акустической волны давления. Изгибные напряжения в несущих слоях на порядок меньше мембранных, что свидетельствует об эффективном использовании материала в трехслойной оболочке.

На фиг. 1, 2 (кривые 2) и кривые на фиг. 3, 6, 4, 6 соответствуют случаю, когда на цилиндрическую оболочку в воздухе падает акустическая волна давления. Давление дифракции определяется согласно теории «тонкого слоя» [3]: если на оболочку падает волна  $p_2 = p_0 H(\tau - 1 + \cos \theta)$ , где  $H(\dots)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $p_0$  — давление на фронте волны, то полное давление, действующее на оболочку, будет  $p = p_0 \{1 + \cos \theta \exp[-0.5(\tau - 1 + \cos \theta)]\} H(\tau - 1 + \cos \theta)$ .

Из приведенных графиков видно, что прогибы в точках  $\theta = 0, \pi/2, \pi$ , вычисленные на основании обеих теорий, заметно отличаются, начиная с моментов времени  $\tau_1 = 24, 14, 16$ . Лучшее соответствие прогибов имеет место в точке  $\theta = \pi/2$ , где они почти не различаются до  $\tau_1 = 40$ . Из этого следует, что при таких перепадах давлений маховское отражение в окрестности точки  $\theta = \pi/2$  не влияет существенным образом на поведение оболочки. Кривые скоростей и напряжений также совпадают в начальный момент взаимодействия и незначительно отличаются в последующие моменты.

Реакции, вычисленные в точке  $\theta = 0$ , по нелинейной теории всегда больше, чем определенные по акустической теории, а в точках  $\theta = \pi/2, \pi$ , наоборот, результаты, полученные по акустической теории, как правило, более высоки, так как давления, вычисленные по акустической теории в точках  $\theta = 0, \pi$ , получаются меньшими, а в точке  $\theta = \pi/2$  большими, чем вычисленные по нелинейной теории. Отсюда прогибы, скорости и напряжения, вычисленные по газодинамической нелинейной теории в точке  $\theta = 0$ , должны быть большими, в точке  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = \pi$  меньшими.

Из графиков видно, что наибольшие мембранные напряжения при действии акустической волны приблизительно на 8%, а изгибные на 13% больше, чем при нелинейном нагружении. В целом же имеет место хорошее совпадение результатов, полученных на основе обеих теорий. Это подтверждает правомерность применения акустической теории при исследовании поведения оболочек под действием воздушных ударных волн с небольшим перепадом давлений.

Поступила 11 I 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коул Р. Подводные взрывы. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л., «Судостроение», 1967.
3. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л., «Судостроение», 1974.
4. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
5. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2.
6. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
7. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной при построении конечноразностных схем для решения разрывных задач газодинамики. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6.
8. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., «Машиностроение», 1973.