МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1975

УДК 534

К АНАЛИЗУ ВИБРОУДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

В. И. БАБИЦКИЙ

(Москва)

Метод гармонической линеаризации используется для рассмотрения виброударного взаимодействия линейных упругих систем общей структуры в режиме вынужденных колебаний. Получены формулы динамических податливостей соударяющихся элементов, выраженные через аналогичные операторы линейных систем и параметры возбуждения. Оценивается нагружение вибрирующей системы поглощающей средой. Исследованы вопросы устойчивости решений.

1. Рассмотрим две линейные стационарные системы (фигура), контактирующие элементы которых (материальные точки, плоские сечения и т. п.), установленные с зазором Δ (отрицательное Δ соответствует натягу), совершают одномерные движения с соударениями под действием возмущающей силы $F_{1s}(t)$, приложенной к элементу s системы *1*. Полагаем, что обе системы нагружены также постоянными силами P_{ir} ($i=1, 2$; $r=1, 2, \ldots$), действующими на элементы r.

Смещение произвольного элемента x i-ой системы будем описывать функцией $u_{ix}(t)$, отсчитываемой от недеформированного состояния.

Для описания силового взаимодействия соударяющихся элементов, которым припишем нулевой индекс, введем статическую характеристику

$$f=f(v), \qquad v(t)=u_{10}(t)-u_{20}(t) \tag{1.1}$$

Обозначив через $L_{ir}(x, p)$ ($p=\partial/\partial t$) оператор динамической податливости i-ой системы, связывающий перемещения ее элемента x с произвольной силой G_{in} ($n=r, s$), запишем уравнения колебаний элементов систем в виде

$$u_{1x}(t)=\sum_r L_{1r}(x,0)P_{1r}+L_{1s}(x,p)F_{1s}(t)-L_{10}(x,p)f(v) \tag{1.2}$$

$$u_{2x}(t)=\sum_r L_{2r}(x,0)P_{2r}+L_{20}(x,p)f(v) \tag{1.3}$$

Вычитая из (1.2), (1.3), получим при $x=0$ уравнение относительного движения соударяющихся элементов

$$v(t)=L_{1s}(0,p)F_{1s}(t)+L(p)\{P-f[v(t)]\} \tag{1.4}$$

$$L(p)=L_{10}(0,p)+L_{20}(0,p), \qquad P=\sum_r [L_{1r}(0,0)P_{1r}-L_{2r}(0,0)P_{2r}]L^{-1}(0)$$

Фильтрующие свойства оператора $L(p)$ позволяют для отыскания стационарных решений уравнения (1.4) эффективно использовать методы эквивалентной линеаризации (гармонической, статистической и т. п.).

При $F_{1s}(t)=F_{1s}e^{j\omega t}$ $(j=\sqrt{-1})$ приближенное периодическое решение (1.4) отыскиваем в виде

(1.5) $$v(t)\approx m+v^\circ(t), \quad v^\circ(t)=ae^{j(\omega t-\varphi)}, \quad m=\mathrm{const}$$

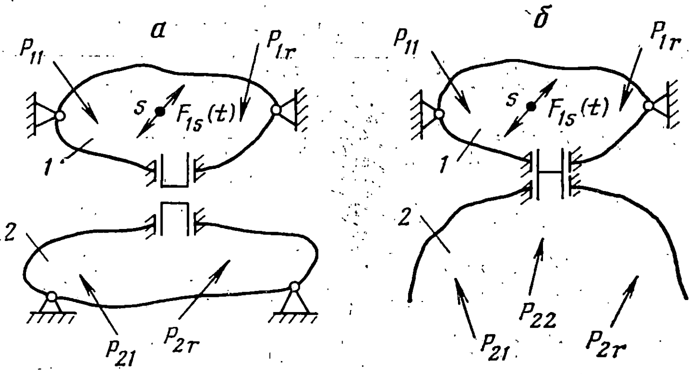
Осуществляя гармоническую линеаризацию функции (1.1), имеем

(1.6) $$f(v)\approx f_0(m,a)+k(m,a)v^\circ$$

Подставляя (1.5), (1.6) в (1.4) и разделяя постоянные и периодические составляющие, найдем

(1.7) $$m=L(0)[P-f_0(m,a)]$$

(1.8) $$[1+kL(p)]v^\circ=L_{1s}(0,p)F_{1s}e^{j\omega t}$$



Преобразуем уравнение (1.8) к эквивалентному однородному, используя равенство

(1.9) $$e^{j\omega t}=e^{j\varphi}e^{j(\omega t-\varphi)}=\left(\cos\varphi+p\frac{\sin\varphi}{\omega}\right)\frac{v^\circ}{a}$$

Подставляя (1.9) в (1.8), получим

(1.10) $$\left[W(p,m,a)-\frac{F_{1s}}{a}\left(\cos\varphi+p\frac{\sin\varphi}{\omega}\right)\right]v^\circ=Q(p,m,a)v^\circ=0$$

(1.11) $$W(p,m,a)=[1+k(m,a)L(p)]L_{1s}^{-1}(0,p)$$

Условием существования периодических решений (1.5) уравнения (1.10) является наличие корней $p=\pm j\omega$ его характеристического уравнения $Q(p,m,a)=0$. Подставляя в последнее $p=j\omega$ и разделяя вещественную и мнимую части, получим

(1.12) $$a=F_{1s}|W(j\omega,m,a)|^{-1}=F_{1s}[U^2(\omega,m,a)+V^2(\omega,m,a)]^{-1/2}$$
$$U=\mathrm{Re}\,W,\quad V=\mathrm{Im}\,W$$

(1.13) $$\sin\varphi=aV(\omega,m,a)F_{1s}^{-1}$$

(1.14) $$\cos\varphi=aU(\omega,m,a)F_{1s}^{-1}$$

Равенство (1.7) позволяет найти зависимость $m(a)$. Подставляя ее в (1.12), получим уравнение для определения a. Величины m, a через (1.13), (1.14) определяют фазу φ, а при помощи (1.2), (1.3) — параметры периодического движения остальных элементов системы. Приближенное периодическое решение (1.2), (1.3) ищем в виде

(1.15) $u_{ix} \approx m_{ix} + u_{1x}^\circ(t), \qquad u_{ix}^\circ(t) = a_{ix} e^{j(\omega t - \varphi_{ix})}$

Подставляя (1.15), (1.6) в (1.2), (1.3) и разделяя постоянные и центрированные компоненты, получим с учетом (1.8)

(1.16)
$$u_{ix}^\circ = W_{ix}^{-1}(j\omega, m, a) F_{1s} e^{j\omega t}$$
$$m_{1x} = \sum_r L_{1r}(x, 0) P_{1r} - L_{10}(x, 0) f_0(m, a)$$
$$m_{2x} = \sum_r L_{2r}(x, 0) P_{2r} + L_{20}(x, 0) f_0(m, a).$$

(1.17)
$$W_{1x}(j\omega, m, a) = \frac{1 + k(m, a) L(j\omega)}{L_{1s}(x, j\omega)[1 + k(m, a) L(j\omega)] - k(m, a) L_{10}(x, j\omega) L_{1s}(0, j\omega)}$$
$$W_{2x}(j\omega, m, a) = \frac{1 + k(m, a) L(j\omega)}{k(m, a) L_{20}(x, j\omega) L_{1s}(0, j\omega)}$$

Из (1.16) находим амплитуды и фазы периодических составляющих

(1.18)
$$a_{ix} = F_{1s} |W_{ix}(j\omega, m, a)|^{-1}, \qquad \sin\varphi_{ix} = a_{ix} V_{ix}(\omega, m, a) F_{1s}^{-1}$$
$$\cos\varphi_{ix} = a_{ix} U_{ix}(\omega, m, a) F_{1s}^{-1}, \qquad U_{ix} = \mathrm{Re}\, W_{ix}, \qquad V_{ix} = \mathrm{Im}\, W_{ix}.$$

Для исследования устойчивости полученных решений может быть использован подход, описанный в [1]. Полагаем, что в окрестности установившегося решения (1.5) колебания имеют вид

(1.19) $v(t) = m^*(t) + a^*(t) \exp j[\omega t - \varphi^*(t)]$

где $m^*(t)$, $a^*(t)$, $\varphi^*(t)$ — медленно меняющиеся функции времени. Диссипативные свойства системы учитываются функцией $V(\omega, m, a)$, поэтому равенство (1.13) можно рассматривать как приведенное условие баланса энергии диссипативных и возмущающих сил на исследуемом стационарном движении. Используя его, сформулируем условие устойчивости этого движения по отношению к малым отклонениям амплитуды в виде

(1.20)
$$\left[\frac{\partial\, \mathrm{Im}\, Q(j\omega, m^*, a^*)}{\partial a^*}\right]_{a^*=a} > 0$$

Неравенство (1.20) означает, что при отклонении амплитуды $a^*(t)$ от значения $a = \mathrm{const}$ баланс энергии нарушается таким образом, чтобы скомпенсировать это отклонение.

Вводя в (1.20) три неизвестных функции вместо одной, свяжем их двумя условиями, положив, что $m^*(t)$ и $a^*(t)$ связаны равенством (1.7), а $\varphi^*(t)$ и $a^*(t)$ — равенством (1.14). С учетом этих связей критерий (1.20) принимает вид

(1.21)
$$\frac{\partial}{\partial a^*}\left\{V(\omega, m^*, a^*) - \left[\frac{F_{1s}^2}{a^{*2}} - U^2(\omega, m^*, a^*)\right]^{1/2}\right\}_{a^*=a} > 0$$

Дифференцируя (1.21), получим после преобразований

(1.22)
$$\left[U\left(U + a^* \frac{\partial U}{\partial a^*}\right) + V\left(V + a^* \frac{\partial V}{\partial a^*}\right)\right]_{a^*=a} > 0$$

2. Удобным способом описания контактного взаимодействия соударяющихся элементов является представление $f(v)$ в виде

(2.1) $$f(v)=k_0(v-\Delta)\eta(v-\Delta)$$

где $\eta(v)$ — функция единичного скачка, с последующим переходом к пределу при $k_0\to\infty$ [1]. Отражая основной эффект взаимодействия, такой подход лишает задачу известной неопределенности [2] и дает простые расчетные соотношения.

Коэффициенты гармонической линеаризации функции (2.1) имеют вид [3]

(2.2) $$f_0=-ak_0\{{}^1/_2\alpha-\pi^{-1}[\alpha\arcsin\alpha+(1-\alpha^2)^{1/2}]\}$$

$$k=k_0\{{}^1/_2-\pi^{-1}[\arcsin\alpha+\alpha(1-\alpha^2)^{1/2}]\},\qquad \alpha=(\Delta-m)/a,\qquad |\alpha|\leqslant 1$$

При $k_0\to\infty$ величина $\alpha\to 1$. Для осуществления предельного перехода исключим из (2.2) k_0, поделив первое соотношение на второе. Переходя в отношении к пределу при $\alpha\to 1$ и раскрывая неопределенность, имеем

(2.3) $$f_0k^{-1}=a/2$$

Используя (1.7), (2.3) и условие $\alpha=1$, найдем

(2.4) $$m=\Delta-a$$

(2.5) $$f_0=P+(a-\Delta)L^{-1}(0)$$

(2.6) $$k=2L^{-1}(0)\{1+[PL(0)-\Delta]a^{-1}\}$$

Выражение (2.6) позволяет решать уравнение (1.12) независимо, а затем с помощью (1.13), (1.14), (2.4), (2.5) определять остальные параметры относительного движения. В [4] описаны иные способы гармонической линеаризации силовых характеристик ударного взаимодействия.

Характер нагружения системы при виброударном взаимодействии удобно оценивать по изменению динамической податливости ее элементов. Найдем такие оценки для соударяющихся элементов. Из (1.18) с учетом (1.17), имеем

(2.7)
$$\frac{a_{10}}{F_{1s}}=\left|L_{1s}(0,j\omega)\frac{1+kL_{20}(0,j\omega)}{1+kL(j\omega)}\right|,\qquad \frac{a_{20}}{F_{1s}}=\left|L_{1s}(0,j\omega)\frac{kL_{20}(0,j\omega)}{1+kL(j\omega)}\right|$$

Из (2.6) следует, что при $a\gg PL(0)-\Delta$ величина $k\to 2/L(0)$. Подставляя это значение k в (2.7), получаем отношения для резонансного случая

Для рассмотрения общего случая решим сначала уравнение (1.12), пренебрегая для упрощения выкладок диссипацией энергии в системе. Подставляя (1.11), (2.6) в (1.12) и обозначая с учетом принятого допущения

(2.8) $$L_{1s}(0,j\omega)=\mu_{1s}(\omega),\qquad L(j\omega)=\mu(\omega)=\mu_{10}(\omega)+\mu_{20}(\omega);$$
$$2\mu(\omega)/\mu(0)=\lambda(\omega)$$

имеем после преобразований

(2.9) $$a=\frac{\pm F_{1s}\mu_{1s}(\omega)+\lambda(\omega)[\Delta-P\mu(0)]}{1+\lambda(\omega)}$$

причем

(2.10) $$U=\frac{1+\lambda(\omega)\{1+[P\mu(0)-\Delta]a^{-1}\}}{\mu_{1s}(\omega)},\qquad V\equiv 0$$

В силу положительности a, согласно (2.9), при

(2.11) $$F_{1s}|\mu_{1s}(\omega)|>|\lambda(\omega)[\Delta-P\mu(0)]|$$

выполняется условие единственности существования режима, определяемого из соотношений

(2.12) $$\pm F_{1s}\mu_{1s}(\omega)>0 \text{ при } 1+\lambda(\omega)>0,\qquad \pm F_{1s}\mu_{1s}(\omega)<0 \text{ при } 1+\lambda(\omega)<0$$

При противоположном знаке неравенства (2.11) режимы существуют парами и только в области, где

$$\frac{\lambda(\omega)[\Delta-P\mu(0)]}{1+\lambda(\omega)}>0$$

т. е. $\lambda(\omega)[\Delta-P\mu(0)]>0$ при $1+\lambda(\omega)>0$; $\lambda(\omega)[\Delta-P\mu(0)]<0$ при $1+\lambda(\omega)<0$.

Подставляя (2.10) в (1.22), получим с учетом (2.9) условия устойчивости, совпадающие с (2.12). Таким образом, в областях существования единственного режима последний всегда устойчив, а из пары режимов устойчив только один, удовлетворяющий условиям (2.12).

Подставляя (2.6), (2.8), (2.9) в (2.7) после преобразований окончательно получим

$$\frac{a_{10}}{F_{1s}|\mu_{1s}(\omega)|}=\left|\frac{1+2\mu^{-1}(0)\{\pm\mu_{10}(\omega)[\Delta-P\mu(0)]F_{1s}^{-1}\mu_{1s}^{-1}(\omega)+\mu_{20}(\omega)\}}{1+\lambda(\omega)}\right|$$

$$\frac{a_{20}}{F_{1s}|\mu_{1s}(\omega)|}=\left|\frac{2\mu_{20}(\omega)\mu^{-1}(0)\{1\pm[P\mu(0)-\Delta]F_{1s}^{-1}\mu_{1s}^{-1}(\omega)\}}{1+\lambda(\omega)}\right|$$

Рассмотрим теперь случай, когда система *2* (фигура) не закреплена и прижата к системе *1* постоянными силами. Тогда $L^{-1}(0)=0$ и, согласно (2.6), имеем

(2.13) $$k=2P/a$$

Пренебрегая диссипативными свойствами систем и полагая, что система *2* полубесконечна, имеем

(2.14) $$L_{1s}(0,j\omega)=\mu_{1s}(\omega),\qquad L_{10}(0,j\omega)=\mu_{10}(\omega),\qquad L_{20}(0,j\omega)=j\mu_{20}(\omega)$$

Подставляя (1.11), (2.13), (2.14) в (1.12), получим

(2.15) $$a=\pm F_{1s}\mu_{1s}(\omega)\{[1+2Pa^{-1}\mu_{10}(\omega)]^2+4P^2a^{-2}\mu_{20}^2(\omega)\}^{-1/2}$$

при этом

(2.16) $$U=\frac{1+2Pa^{-1}\mu_{10}(\omega)}{\mu_{1s}(\omega)},\qquad V=\frac{2P\mu_{20}(\omega)}{a\mu_{1s}(\omega)}$$

Решая (2.15) относительно a, найдем

(2.17) $$a=\pm F_{1s}\mu_{1s}(\omega)\left\{1-\left[\frac{2P\mu_{20}(\omega)}{F_{1s}\mu_{1s}(\omega)}\right]^2\right\}^{1/2}-2P\mu_{10}(\omega)$$

Согласно (2.17) виброударные режимы существуют при условии

$$0 \leqslant |2P\mu_{20}(\omega)| \leqslant F_{1s}|\mu_{1s}(\omega)| \tag{2.18}$$

причем, если

$$F_{1s}|\mu_{1s}(\omega)| > |2P[\mu_{10}^2(\omega)+\mu_{20}^2(\omega)]^{1/2}| \tag{2.19}$$

то существует единственный режим, соответствующий при $\mu_{1s}(\omega)>0$ знаку плюс в (2.17), а при $\mu_{1s}(\omega)<0$ — знаку минус. Если условие (2.19) не выполняется, то режимы существуют парами и только при $\mu_{10}(\omega)<0$.

Подставляя (2.16), (2.17) в (1.22), получим после преобразований критерий устойчивости в виде

$$\pm F_{1s}\mu_{1s}(\omega)>0 \tag{2.20}$$

т. е. единственный режим, удовлетворяющий условиям существования, всегда устойчив, а при существовании пары режимов устойчив только один, отвечающий неравенству (2.20).

Из (2.7) с помощью выражений (2.13), (2.14), (2.17) получим после преобразований следующие формулы:

$$\frac{a_{10}}{F_{1s}|\mu_{1s}(\omega)|} = \left\{1+\left[\frac{2P\mu_{10}(\omega)}{F_{1s}\mu_{1s}(\omega)}\right]^2 \mp \frac{4P\mu_{10}(\omega)}{F_{1s}\mu_{1s}(\omega)}\sqrt{1+\left[\frac{2P\mu_{20}(\omega)}{F_{1s}\mu_{1s}(\omega)}\right]^2}\right\}^{1/2} \tag{2.21}$$

$$a_{20}=|2P\mu_{20}(\omega)| \tag{2.22}$$

В области существования виброударных режимов, определяемой неравенствами (2.18), величина (2.21) изменяется в следующих границах:

$$\frac{a_{10}}{F_{1s}|\mu_{1s}(\omega)|} \in \left\{1 \mp \frac{2P\mu_{10}(\omega)}{F_{1s}\mu_{1s}(\omega)},\ \left[1+\left(\frac{2P\mu_{10}(\omega)}{F_{1s}\mu_{1s}(\omega)}\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

Колебания системы *2* (фигура) согласно (2.22), не зависят от величины гармонического возбуждения и определяются только начальным прижатием.

Рассматривая в выведенных соотношениях $F_{1s}\mu_{1s}(\omega)$ как скалярное произведение соответствующих векторов, получим формулы для случая многомерного гармонического возбуждения.

Автор благодарит М. З. Коловского за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 21 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асташев В. К., Бабицкий В. И.* Резонансные колебания вязкоупругого стержня с ограничителем. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
2. *Кильчевский Н. А.* Теория соударений твердых тел. Киев, «Наукова думка», 1969.
3. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
4. *Бабицкий В. И., Коловский М. З.* К теории виброударных систем. Машиноведение, 1970, № 1.