

ВЫПУЧИВАНИЕ СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ. БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ

В. И. МАЛЫЙ

(Москва)

Линеаризованная по прогибу теория [1], основанная на методе продолжения переменного коэффициента уравнений движения в невозмущенную область [2, 3], позволяет довольно просто описать выпучивание длинного упругого стержня при продольном ударе массивным телом. Однако она справедлива лишь при малых прогибах и поэтому не дает завершенной картины процесса выпучивания. Можно ожидать, что нелинейные эффекты при больших прогибах приведут к существенному снижению темпа выпучивания, некоторым отклонениям формы выпучивания от предсказываемой в линеаризованной теории, а также к падению продольного усилия в выпучивающемся стержне. В данной работе для количественного исследования этих эффектов на основе нелинейной системы уравнений движения предложен асимптотический метод линеаризации на неустановившейся стадии выпучивания.

В нелинейных задачах динамической устойчивости метод конечных разностей использовался неоднократно [4-11] и позволил получить немало полезной информации о процессе выпучивания стержней и оболочек. Однако теоретический анализ этой информации затрудняется двумя обстоятельствами.

1. В основном рассматривались такие соотношения параметров стержня и скорости удара, при которых за время выпучивания продольная волна много раз пробегае вдоль стержня в прямом и обратном направлениях. Выпучивание в этом случае трудно анализировать, так как такой вид нагружения является промежуточным между ударным нагружением, когда волновой характер распространения продольной нагрузки вдоль стержня является существенным, и так называемым быстрым [12] (или динамическим [13]) нагружением, когда в результате многократного пробега продольной волны вдоль стержня примерно устанавливается квазистатическое распределение продольных усилий.

Шаг сеточной схемы по координате необходимо выбирать на порядок меньше длины полуволны формы выпучивания, т. е. он определяется скоростью удара. В этом случае необходимо иметь около 10^3 узлов сеточной схемы по координате, чтобы считать типичный случай выпучивания стержня при ударном нагружении без отражения продольной волны от противоположного торца, представленный, например, на кинограмме в работе [14] (длина полуволны 7.5 см, длина стержня 6.5 м). Если стержень будет настолько короче, что за время выпучивания продольная волна пробегае его длину 5-10 раз, то достаточно будет числа координатных узлов порядка 10^2 .

Ниже будет показано, что случай выпучивания при типично ударном нагружении без отражения продольной волны от противоположного конца можно исследовать при числе координатных узлов сеточной схемы порядка 10^2 , если использовать на границе выпучивающейся области для продольных смещений особые краевые условия типа условий излучения.

2. Каждый из возможных заданных вариантов формы начальных прогибов носит искусственный характер, так как реальный прогиб $w_0(x)$ является случайной функцией, а суперпозиция имеющихся решений с целью получения более общей картины невозможна из-за нелинейности уравнений движения.

Трудности, связанные со вторым обстоятельством, не возникают, если использовать при малых прогибах аналитические результаты [1] линеаризованной теории. В этом случае связь формы выпучивания с начальной погибью $w_0(x)$ описывается одним безразмерным числовым коэффициентом A , который нетрудно определить экспериментально. (Точнее говоря, A является линейным функционалом от случайной функции $w_0(x)$). Поэтому экспериментально необходимо определять закон распределения для случайной величины A .) Значения прогибов, даваемые линеаризованной теорией [1], будут использоваться ниже в качестве начальных условий для вычислений методом конечных разностей в нелинейной области.

Рассматриваемая здесь задача обладает еще одной особенностью математического характера: Обычно определяют максимально возможный шаг по времени с учетом

условий устойчивости вычислений по разностной схеме [15, 16]. Ниже показано, что требование устойчивости вычислений неприменимо к разностным аппроксимациям рассматриваемых здесь задач¹. Получены два ограничения на соотношение шагов сетки по координате и по времени из условия сходимости приближенного решения к точному при измельчении шагов сетки.

1. Введем безразмерные переменные: $\eta = x/r$, $\theta = ct/r$, $f = u/r$, $v = w/r$, $r^2 = I/s$, $c^2 = E/\rho$, где x — расстояния от торца стержня, t — время, отсчитываемое от начала удара, w и u — полный прогиб и продольное смещение точек средней линии стержня, I и s — момент инерции и площадь поперечного сечения, E и ρ — модуль Юнга и плотность материала стержня. В случае кругового поперечного сечения радиуса R имеем $r = R/2$.

Не предполагая прогибы малыми, воспользуемся системой уравнений движения [12] стержня с начальной погибью

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dv_0}{d\eta} \right)^2$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dv_0}{d\eta} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{d^4 v_0}{d\eta^4}$$

Здесь начальная погибь $v_0(\eta)$ — случайная функция координаты η .

Для задачи о выпучивании шарнирно опертого полубесконечного стержня при продольном ударе телом большой массы, движущимся с постоянной скоростью V , начальные и краевые условия имеют вид

$$(1.2) \quad f = \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad v = v_0 \quad (\theta = 0)$$

$$(1.3) \quad f = \frac{V}{c} \theta = \varepsilon \theta, \quad v = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\eta = 0)$$

2. Нелинейную задачу (1.1) — (1.3) со статистическими начальными условиями будем решать асимптотическим методом, использующим малость начальной погиби (методом линеаризации на неустановившейся стадии выпучивания).

Введем малый параметр κ и рассмотрим задачу

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\kappa^2}{2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dv_0}{d\eta} \right)^2$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{dv_0}{d\eta} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \kappa \frac{d^4 v_0}{d\eta^4}$$

с начальными условиями

$$(2.2) \quad f = \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad v = \kappa v_0, \quad (\theta = 0)$$

и краевыми условиями (1.3).

Рассмотрим также соответствующую линеаризованную по прогибам задачу

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial \theta^2} = 0$$

¹ Указанное обстоятельство не было замечено Б. А. Гордиенко [10]. Полученный им критерий устойчивости вычислений относится, как нетрудно заметить, к разностной аппроксимации взятого в отдельности одного из трех уравнений движения стержня с учетом поперечного сдвига и инерции вращения.

$$\frac{\partial^4 v_1}{\partial \eta^4} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} = \kappa \frac{d^4 v_0}{d\eta^4}$$

с начальными и краевыми условиями

$$f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = 0, \quad v_1 = \kappa v_0 \quad (\theta=0), \quad f_1 = \varepsilon \theta, \quad v_1 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\eta=0).$$

Ее решение, аналогичное полученному в работе [3], можно представить в виде

$$(2.3) \quad v_1(\eta, \theta, \kappa) = \kappa v_0(\eta) + \kappa \int_0^\theta \frac{dv_0(\chi)}{d\chi} B(\eta, \chi, \theta) d\chi$$

$$B(\eta, \chi, \theta) = \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^\infty k \sin k\eta \cos k\chi \frac{\operatorname{ch} a(\theta - \chi) - 1}{a^2} dk$$

$$a^2 = a^2(k) = k^2(\varepsilon - k^2), \quad f_1(\eta, \theta, \kappa) = \varepsilon(\theta - \eta) h(\theta - \eta).$$

Здесь $h(\theta)$ — единичная функция Хевисайда.

Прогиб v_1 , как следует из (2.3), довольно сложным образом зависит от случайной начальной погиби. Однако вследствие избирательности усиления различных составляющих прогиба при динамическом нагружении стержней и оболочек, на которую впервые указали М. А. Лаврентьев и А. Ю. Ишлинский [17], структура зависимости (2.3) значительно упрощается с ростом времени. Как показано ранее [1], для прогиба в виде (2.3) можно получить равномерное по η асимптотическое представление

$$(2.4) \quad v_1(\eta, \theta, \kappa) = \kappa v_*(\eta, \theta) + o(\theta^{-1/2} e^{1/2\varepsilon\theta}) \quad (\theta \rightarrow \infty, 0 \leq \eta < \infty)$$

$$v_*(\eta, \theta) = A \sqrt{2/\varepsilon\theta} e^{1/2\varepsilon\theta} \sin \sqrt{\varepsilon/2} \eta e^{-\eta^2/8\theta}, \quad A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{dv_0(\chi)}{d\chi} e^{-1/2\varepsilon\chi} \cos \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \chi d\chi$$

Задавшись определенной относительной точностью δ , определим длительность $T_1(\delta)$ неустановившейся стадии выпучивания и длительность $T_2(\kappa, \delta)$ линейной стадии выпучивания так, чтобы соотношения $v_1(\eta, \theta, \kappa) \approx \kappa v_*(\eta, \theta)$, $T_1(\delta) \leq \theta$, $f(\eta, \theta, \kappa) \approx f_1(\eta, \theta, \kappa)$, $v(\eta, \theta, \kappa) \approx v_1(\eta, \theta, \kappa)$, $0 \leq \theta \leq T_2(\kappa, \delta)$ выполнялись с относительной погрешностью $\delta/2$.

Очевидно, что $T_1(\delta)$ не зависит от параметра κ , тогда как $T_2(\kappa, \delta)$ растет монотонно и неограниченно при $\kappa \rightarrow 0$. Поэтому существует такой интервал $0 < \kappa < \kappa_\delta$ малых значений κ , что $T_1(\delta) < T_2(\kappa, \delta)$. Следовательно, рассматривая решение $f(\eta, \theta, \kappa)$, $v(\eta, \theta, \kappa)$ задачи (2.1), (2.2), (1.3) в нелинейной области $\theta_0 \leq \theta$, где $T_1(\delta) \leq \theta_0 \leq T_2(\kappa, \delta)$, при $\kappa < \kappa_\delta$ можно с относительной погрешностью δ использовать асимптотические начальные условия при $\theta = \theta_0$.

$$f(\eta, \theta, \kappa) \approx \varepsilon(\theta - \eta) h(\theta - \eta), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} f(\eta, \theta, \kappa) \approx \varepsilon h(\theta - \eta)$$

$$v(\eta, \theta, \kappa) \approx \kappa v_*(\eta, \theta), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} v(\eta, \theta, \kappa) \approx \kappa \frac{\partial}{\partial \theta} v_*(\eta, \theta)$$

и опустить исследование сложных переходных процессов на стадии малых прогибов $\theta < T_1(\delta)$, описываемых соотношениями (2.3).

По определению, $\kappa_\delta = \kappa_\delta \{v_0(\eta)\}$ является таким функционалом от $v_0(\eta)$, что $\kappa_\delta \{\alpha v_0(\eta)\} = |\alpha|^{-1} \kappa_\delta \{v_0(\eta)\}$, т. е. $\kappa_\delta \{v_0(\eta)\}$ с уменьшением начальной погиби $v_0(\eta)$ растет неограниченно. С другой стороны, κ_δ растет при увеличении δ , так как при этом $T_1(\delta)$ уменьшается, а $T_2(\kappa, \delta)$ растет. Поэтому при достаточно малой начальной погиби и не очень малых δ будет выполняться неравенство $1 < \kappa_\delta \{v_0(\eta)\}$. В этом случае и решение $f(\eta, \theta)$, $v(\eta, \theta)$ исходной задачи (1.1)–(1.3) на стадии больших прогибов $\theta_0 \leq \theta$, где $T_1(\delta) \leq \theta_0 \leq T_2(1, \delta)$, можно определить, задавая при $\theta = \theta_0$ начальные условия

$$(2.5) \quad f(\eta, \theta) \approx \varepsilon(\theta - \eta)h(\theta - \eta), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} f(\eta, \theta) \approx \varepsilon h(\theta - \eta), \quad \theta = \theta_0$$

$$(2.6) \quad v(\eta, \theta) \approx v_*(\eta, \theta), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} v(\eta, \theta) \approx \frac{\partial}{\partial \theta} v_*(\eta, \theta), \quad \theta = \theta_0$$

которые являются следствием линеаризации по прогибам уравнений движения на неустановившейся стадии выпучивания $0 \leq \theta \leq T_1(\delta)$.

Далее будем предполагать начальную погибь $v_0(\eta)$ достаточно малой, чтобы метод линеаризации на неустановившейся стадии давал достаточную точность δ . Учтем также, что после неустановившейся стадии выпучивания можно пренебрегать начальной погибью $v_0(\eta)$ в сравнении с прогибом $v(\eta)$ и заменить при $\theta \geq \theta_0$ уравнения (1.1) уравнениями

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$$

3. Заметим, что для первого из уравнений (1.1) обычными методами трудно получить решение, которое при начальных и граничных условиях (1.2), (1.3) имеет вид

$$(3.1) \quad f(\eta, \theta) = \varepsilon(\theta - \eta)h(\theta - \eta) - \frac{1}{4} \int_0^\theta d\chi \left\{ \left[\frac{\partial v(\eta - \chi, \theta - \chi)}{\partial \eta} \right]^2 - \left[\frac{\partial v_0(\eta - \chi)}{\partial \eta} \right]^2 - \left[\frac{\partial v(\eta + \chi, \theta - \chi)}{\partial \eta} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_0(\eta + \chi)}{\partial \eta} \right]^2 \right\}.$$

Здесь функции $\partial v / \partial \eta$ и $\partial v_0 / \partial \eta$ продолжены четным образом на полуось $\eta < 0$.

Соотношение (3.1) позволяет свести задачу (1.3), (2.5)–(2.8) для полубесконечной области к задаче на некотором конечном интервале $0 \leq \eta \leq L$. Как уже указывалось, при $\theta \geq \theta_0$ можно пренебрегать $v_0(\eta)$ в сравнении с $v(\eta)$. Выберем теперь L так, чтобы для заданного интервала времени с достаточной точностью выполнялось соотношение

$$(3.2) \quad v(\eta, \theta) \approx 0, \quad L \leq \eta$$

Размер выпучивающейся области стержня L можно оценить заранее из соотношений линеаризованной теории (2.4), так как следует ожидать, что нелинейные эффекты приведут к замедлению выпучивания из-за появления разгрузки.

Из условия (3.2) при $L \leq \eta$ получаем

$$4 \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f(\eta, \theta) \approx - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \int_0^\theta d\chi \left[\frac{\partial v(\eta - \chi, \theta - \chi)}{\partial \eta} \right]^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left[\frac{\partial v(\eta - \theta, 0)}{\partial \eta} \right]^2 + \int_0^\theta d\chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\frac{\partial v(\eta - \chi, \theta - \chi)}{\partial \eta} \right]^2 = \\
 &= - \left[\frac{\partial v(\eta, \theta)}{\partial \eta} \right]^2 \approx 0 \quad (L \leq \eta)
 \end{aligned}$$

Поэтому рассматриваемую задачу для полубесконечной области можно свести к задаче для выпучивающейся области $0 \leq \eta \leq L$ с краевыми условиями

$$(3.3) \quad (\partial / \partial \eta + \partial / \partial \theta) f = 0, \quad \eta = L$$

$$(3.4) \quad v = \partial^2 v / \partial \eta^2 = 0, \quad \eta = L$$

Условие (3.3) является условием излучения для продольных волн. Вместо условия (3.4) в силу соотношения (3.2) с равным успехом можно было бы воспользоваться условием $v = \partial v / \partial \eta = 0, \eta = L$.

Уменьшение рассматриваемой области до интервала $0 \leq \eta \leq L$ значительно сокращает объем необходимых вычислений, так как из-за локализации выпучивания у торца [4] вся возмущенная область стержня $0 \leq \eta \leq \theta$ значительно больше выпучивающейся области (в экспериментах Б. М. Малышева [4] их размеры различались на порядок).

4. При численном решении поставленной задачи методом конечных разностей удобно ввести новую функцию

$$(4.1) \quad \Lambda(\eta, \theta) = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2$$

заменить уравнение (2.7) на продифференцированное

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \Lambda$$

краевое условие (3.3) на условие

$$(4.3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = L$$

а начальные условия (2.5) для f на эквивалентные им при малых $v(\eta, \theta_0) = v_*(\eta, \theta_0)$

$$(4.4) \quad \begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \eta} &= -\varepsilon h(\theta_0 - \eta) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_*}{\partial \eta} \right)^2, \quad 0 \leq \eta \leq L, \quad \theta = \theta_0 \\
 \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \eta} &= -\varepsilon \delta(\theta_0 - \eta) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_*}{\partial \eta} \right)^2
 \end{aligned}$$

где $\delta(\theta)$ — δ -функция Дирака.

Используя нечетность по η выражения в фигурных скобках интегрального представления (3.1) для $f(\eta, \theta)$, получим краевое условие на торце

$$(4.5) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \eta = 0, \quad \theta_0 \leq \theta$$

а для прогиба на торце имеем краевое условие

$$(4.6) \quad v = \partial^2 v / \partial \eta^2 = 0, \quad \eta = 0, \quad \theta_0 \leq \theta$$

5. Введем обозначения: $\varepsilon_{n,m} = \partial / \partial \eta f(ns_\eta, \theta_0 + ms_\theta)$, $\Lambda_{n,m} = \Lambda(ns_\eta, \theta_0 + ms_\theta)$, $v_{n,m} = v(ns_\eta, \theta_0 + ms_\theta)$, $\alpha = s_\theta / s_\eta$, $\beta = s_\theta / s_\eta^2$, $N = L / s_\eta$, $v_{n,m}^* = v^*(ns_\eta, \theta_0 + ms_\theta)$ ($n = -2, -1, \dots, N-1$), $v_{N,m}^* = 0$, $v_{N+1,m}^* = -v_{N-1,m}^*$, $v_{N+2,m}^* = -v_{N-2,m}^*$ и условимся считать далее, что $\theta_0 > L$. Тогда конечно-разностные аппроксимации второго порядка точности соотношений (2.6), (2.8), (3.4), (4.1), (4.1) — (4.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_{n,m} &= \varepsilon_{n,m} + \frac{1}{8s_\eta^2} (v_{n+1,m} - v_{n-1,m})^2 \\ v_{n,m+1} &= 2v_{n,m} - v_{n,m-1} + \frac{1}{4}\alpha^2 [(\Lambda_{n+1,m} - \Lambda_{n-1,m})(v_{n+1,m} - v_{n-1,m}) + \\ &+ 4\Lambda_{n,m}(v_{n+1,m} - 2v_{n,m} + v_{n-1,m})] - \beta^2 (v_{n+2,m} - 4v_{n+1,m} + 6v_{n,m} - 4v_{n-1,m} + v_{n-2,m}) \\ \varepsilon_{n,m+1} &= 2\varepsilon_{n,m} - \varepsilon_{n,m-1} + \alpha^2 (\Lambda_{n+1,m} - 2\Lambda_{n,m} + \Lambda_{n-1,m}), \quad v_{-2,m} = -v_{2,m} \\ v_{-1,m} &= -v_{1,m}, \quad \varepsilon_{-1,m} = \varepsilon_{1,m}, \quad v_{N+1,m} = -v_{N-1,m}, \quad v_{N+2,m} = -v_{N-2,m} \\ \varepsilon_{N+1,m+1} &= \varepsilon_{N-1,m-1} + (1-\alpha)(\varepsilon_{N+1,m} - \varepsilon_{N-1,m}), \quad v_{n,0} = v_{n,0}^*, \quad v_{n,1} = v_{n,1}^* \\ \varepsilon_{n,1} &= -\varepsilon - \frac{1}{8s_\eta^2} (v_{n+1,1}^* - v_{n-1,1}^*)^2 \\ \varepsilon_{n,0} &= \varepsilon_{n,1} + \frac{1}{16s_\eta^2} [(v_{n+1,2}^* - v_{n-1,2}^*)^2 - (v_{n+1,0}^* - v_{n-1,0}^*)^2] \end{aligned}$$

При выводе аппроксимаций второго порядка точности для начальных условий учитывалось, что из (2.6), (2.8) и (4.4) следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v(\eta, \theta_0) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Lambda(\eta, \theta_0) \frac{\partial v(\eta, \theta_0)}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial^4 v(\eta, \theta_0)}{\partial \eta^4} = \\ &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \left[h(\theta_0 - \eta) \frac{\partial v^*(\eta, \theta_0)}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial^4 v^*(\eta, \theta_0)}{\partial \eta^4} = \frac{\partial^2 v^*(\eta, \theta_0)}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

а из (4.1), (4.2) и (4.4) при принятом условии $\theta_0 > L$ получаем также

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\partial f(\eta, \theta_0)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \Lambda(\eta, \theta_0) = 0$$

6. Обычно определяют максимально возможный шаг по времени с учетом условий устойчивости вычислений по разностной схеме [15, 16]. Требование устойчивости вычислений функции $\partial f / \partial \eta$ из конечно-разностной аппроксимации уравнения (4.2), как известно, приводит к условию

$$(6.1) \quad s_\theta < s_\eta$$

Исследуем теперь свойства конечно-разностной аппроксимации уравнения (2.8). Ограничимся, как это обычно делается [16], анализом «локальной» устойчивости и рассмотрим соответствующее линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$(6.2) \quad \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} - \Lambda \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, \quad \Lambda < 0$$

При граничных условиях (3.4), (4.6) уравнение (6.2) можно решать методом разделения переменных. Тогда

$$(6.3) \quad v(\eta, \theta) = \sum_{q=1}^{\infty} b_q(\theta) \sin k_q \eta, \quad k_q = \frac{\pi}{L} q$$

$$(6.4) \quad b_q(\theta) = b_q' e^{\gamma_q \theta} + b_q'' e^{-\gamma_q \theta}, \quad \gamma_q = k_q \sqrt{|\Lambda| - k_q^2}$$

а коэффициенты b_q' и b_q'' определяются из начальных условий.

Для конечно-разностной аппроксимации уравнения (6.2)

$$v_{n, m+1} - 2v_{n, m} + v_{n, m-1} + \alpha^2 |\Lambda| (v_{n+1, m} - 2v_{n, m} + v_{n-1, m}) + \beta^2 (v_{n+2, m} - 4v_{n+1, m} + 6v_{n, m} - 4v_{n-1, m} + v_{n-2, m}) = 0$$

решение имеет вид

$$(6.5) \quad v_{n, m} = \sum_{q=1}^{N-1} B_{qm} \sin k_q s_{\eta} \eta$$

где B_{qm} удовлетворяет уравнению

$$B_{q, m+1} + B_{q, m-1} - 2B_{q, m} \left(1 + 2\alpha^2 |\Lambda| \sin^2 \frac{k_q s_{\eta}}{2} - 8\beta^2 \sin^4 \frac{k_q s_{\eta}}{2} \right) = 0$$

т. е. имеет вид

$$(6.6) \quad B_{qm} = B_q' \sigma^m + B_q'' \sigma^{-m}$$

Здесь B_q' и B_q'' определяются из начальных условий, а σ — один из корней уравнения

$$\sigma^2 - 2\sigma \left(1 + 2\alpha^2 |\Lambda| \sin^2 \frac{k_q s_{\eta}}{2} - 8\beta^2 \sin^4 \frac{k_q s_{\eta}}{2} \right) + 1 = 0$$

Если

$$(6.7) \quad \left| 1 + 2\alpha^2 |\Lambda| \sin^2 \frac{k_q s_{\eta}}{2} - 8\beta^2 \sin^4 \frac{k_q s_{\eta}}{2} \right| \leq 1$$

то $|\sigma| = 1$, и B_{qm} — ограниченная функция от m . В противном случае $|B_{qm}|$ неограниченно растет. Тогда и ошибка $\delta v_{n, m}$, допущенная при $m = m_1$, будет с ростом m неограниченно возрастать, так как разность точного и возмущенного решений при $m > m_1$ также имеет вид

$$\delta v_{n, m} = \sum_{q=1}^{N-1} \delta B_{qm} \sin k_q s_{\eta} \eta, \quad \delta B_{qm} = \delta B_q' \sigma^m + \delta B_q'' \sigma^{-m}$$

Но условие (6.7) не может выполняться ни при каких α и β , так как функция в левой части неравенства при $k_q = 0$ имеет минимум.

Отсутствие устойчивости вычислений типично для уравнений, описывающих выпучивание механических систем при интенсивном нагружении. Это не недостаток конкретной конечно-разностной аппроксимации, а отражение неустойчивости решений точных дифференциальных уравнений движения. Например, в данном случае, согласно (6.4), функции $b_q(\theta)$ неограниченно растут при $0 < k_q^2 < |\Lambda|$.

7. Исследуем сходимость приближенного решения (6.5) к точному (6.3) при измельчении шагов s_η и s_θ . Представим (6.6) в виде

$$B_{3m} = B_q' e^{ms_\theta \gamma_q^*} + B_q'' e^{-ms_\theta \gamma_q^*}$$

$$\sin \frac{i\gamma_q^* s_\theta}{2} = \sin \frac{k_q s_\eta}{2} \left(4\beta^2 \sin^2 \frac{k_q s_\eta}{2} - \alpha^2 |\Lambda| \right)^{1/2}$$

Задача существенно упростится, если, как и в работах [1-3, 14, 17], при выпучивании принимать во внимание лишь асимптотическое поведение решения при больших временах, определяющееся членами сумм (6.3) и (6.5), для которых $\operatorname{Re} \gamma_q \neq 0$ и $\operatorname{Re} \gamma_q^* \neq 0$.

Для точного решения (6.3), (6.4) существенными будут значения $q \in D$, для которых $0 < k_q < \sqrt{|\Lambda|}$, $q \in D$, а для аппроксимации (6.5) два множества D_1 и D_2 значений q , для которых $(4/s_\eta^2) \sin^2 1/2 k_q s_\eta < |\Lambda|$, $q \in D_1$ или $\sin^2 1/2 k_q s_\eta > p$. Здесь p — положительный корень уравнения $\alpha^2 p [(4/s_\eta^2) p - |\Lambda|] = 1$, $p > 0$.

Это уравнение можно представить в виде: $p(1 + \alpha^2 |\Lambda| - 4\beta^2) = (p-1)(1 + 4\beta^2 p)$, $p > 0$. Поэтому множество D_2 пусто, если выполняется условие $4\beta^2 < 1 + \alpha^2 |\Lambda|$.

С другой стороны, если $q \in D_2$, удобно сделать замену

$$\gamma_q^* = -i \frac{\pi}{s_\theta} + \frac{2}{s_\theta} \varphi_q, \quad q \in D_2$$

где вещественное φ_q определяется уравнением

$$\operatorname{ch} \varphi_q = \sin \frac{k_q s_\eta}{2} \left(4\beta^2 \sin^2 \frac{k_q s_\eta}{2} - \alpha^2 |\Lambda| \right)^{1/2}$$

Поэтому

$$\max_{q \in D_2} \operatorname{Re} \gamma_q^* = \frac{2}{s_\theta} \max_{q \in D_2} \varphi_q = \frac{2}{s_\theta} \operatorname{Arch} (4\beta^2 - \alpha^2 |\Lambda|)^{1/2}$$

Таким образом, если выполняется условие

$$\max_{q \in D_1} \gamma_q^* = \frac{2}{s_\theta} \operatorname{Arsh} \frac{s_\theta |\Lambda|}{4} > \frac{2}{s_\theta} \operatorname{Arch} (4\beta^2 - \alpha^2 |\Lambda|)^{1/2}$$

т. е. если

$$(7.1) \quad 4\beta^2 < 1 + \alpha^2 |\Lambda| + \alpha^4 \Lambda^2 / 16\beta^2$$

то слагаемые аппроксимации (6.5) при $q \in D_2$ экспоненциально малы при больших m в сравнении с главными слагаемыми при $q \in D_1$.

При измельчении шагов s_θ и s_η множество D_1 переходит в множество D и $B_{qm} \rightarrow b_q(m s_\theta)$, $q \in D$. Поэтому, если выполняется условие (7.1), получаем при больших θ асимптотическое соответствие $v(\eta, \theta) \sim \lim v_{n,m}$, где предельные значения $\lim v_{n,m}$ вычисляются при $s_\theta \rightarrow 0$, $s_\eta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ и при условиях $\lim n s_\eta = \eta$ и $\lim m s_\theta = \theta$.

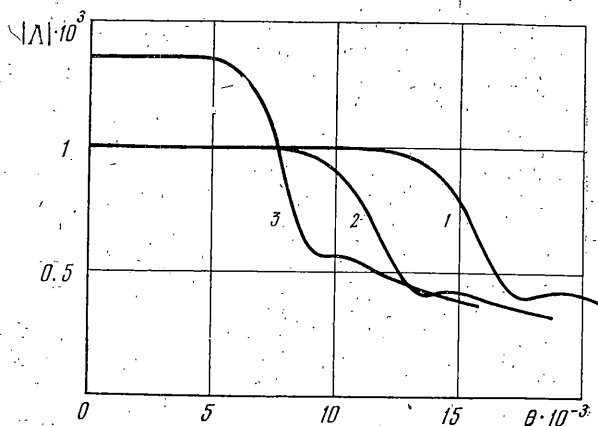
Напомним, что условие (7.1) получено из анализа модельного уравнения (6.2), т. е. является «локальным» условием для аппроксимации нелинейного уравнения (2.8). Так как в процессе выпучивания продольное усилие в стержне падает, необходимо параметр Λ в (6.2) и в (7.1) считать изменяющимся от $-\varepsilon$ до нуля. Поэтому практически удобно использовать более сильное условие

$$(7.2) \quad \beta < 1/2$$

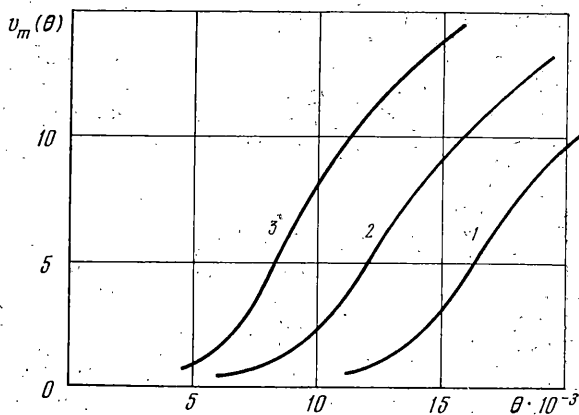
Таким образом, шаг по времени для конечно-разностной аппроксимации уравнений выпучивания будем выбирать с учетом условий (6.1) и (7.2).

8. Задача решалась численно на машине БЭСМ-4. На фиг. 1 и 2 представлены зависимости от времени максимального прогиба $v_m(\theta)$ и продольной деформации сжатия у торца $|\Lambda(0, \theta)|$ для трех вариантов констант: 1) $\varepsilon=0.001, A=0.006$; 2) $\varepsilon=0.001, A=0.04$; 3) $\varepsilon=0.00135, A=0.06$.

Значения деформации $|\Lambda(0, \theta)|$ с точностью до множителя sE описывают изменение во времени силы, с которой стержень сопротивляется удару массивным телом.



Фиг. 1



Фиг. 2

Оказывается, что линейризованная теория [1] хорошо описывает выпучивание, пока $v_m(\theta) < 3$. При более значительных прогибах наблюдается снижение темпа выпучивания и довольно резкое падение деформации $|\Lambda(0, \theta)|$. Время θ_k , в течение которого сохраняется сопротивление стержня удару, хорошо определяется по формуле $Ae^{1/2\varepsilon\theta_k} = 5(1/2\varepsilon\theta_k)^{1/2}$.

Например, получаем значения $\theta_k = 15500; 11400$ и 7750 для вариантов 1, 2 и 3 соответственно. Однако при $\theta > \theta_k$ сопротивление стержня удару не исчезает полностью: оно падает примерно в два раза и в дальнейшем изменяется более медленно.

Отмеченное явление можно качественно понять, обратившись еще раз к модельному уравнению (6.2), которое локально соответствует нелинейному

уравнению (2.8) для прогиба. Его решение имеет вид (6.3), (6.4). Из выражения (6.4) для γ_q следует, что на стадии малых прогибов, пока $\Lambda = -\varepsilon$, наиболее быстрый рост наблюдается у составляющей решения (6.3) с волновым числом $k_q = k_* = (\varepsilon/2)^{1/2}$, из-за чего образующаяся форма выпучивания $v_*(\eta, \theta)$ имеет, как видно из (2.4), длины полуволн $1/2\lambda_* = \pi k_*^{-1} = \pi(2/\varepsilon)^{1/2}$.

Как показывают расчеты на ЭВМ, за время резкого падения продольной деформации $|\Lambda(0, \theta)|$ при $\theta \approx \theta_k$ в начале нелинейной стадии длина полуволн формы выпучивания практически не изменяется. При этом показатель темпа выпучивания для таких полуволн $\gamma_* = k_*(|\Lambda| - k_*^2)^{1/2} = 0.5[\varepsilon(2|\Lambda| - \varepsilon)]^{1/2}$ уменьшается, при $|\Lambda| = \varepsilon/2$ он обращается в нуль, а при дальнейшем уменьшении $|\Lambda|$ становится мнимым. Другими словами, при $|\Lambda| = \varepsilon/2$ неустойчивый характер выпучивания для данной длины полуволн сменяется движением устойчивого, колебательного характера. И действительно, перегибы на кривых $v_m(\theta)$ на фиг. 2 совпадают по времени с падением продольной деформации в два раза на фиг. 1.

Дальнейшее более медленное выпучивание при $\theta > \theta_k$ должно происходить за счет перестройки формы выпучивания к большим длинам полуволн, для которых показатель темпа выпучивания γ_q остается вещественным и при упавшем значении деформации $|\Lambda|$.

Автор благодарит Г. Н. Александрову за помощь в проведении расчетов.

Поступила 10 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Малыш В. И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
2. Малыш В. И., Ефимов А. Б. Потеря устойчивости стержня при продольном ударе. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4.
3. Малыш В. И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
4. Sevin E. On the elastic bending of columns due to dynamic axial forces including effects of axial inertia. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 4.
5. Huffington N. Response of elastic columns to axial pulse loading. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 9.
6. Huffington N. A numerical study of the response characteristics of columns subjected to axial load pulses. Res. Rept. RR-17, Martin Co., Baltimore, Md., 1962.
7. Вольмир А. С., Кильдибеков И. Г. Исследование процесса выпучивания стержней при ударе. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 4.
8. Борисенко В. И., Клокова А. И. Закритическая деформация цилиндрической оболочки при ударе. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 10.
9. Гордиенко Б. А. Выпучивание стержней при ударном нагружении. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
10. Гордиенко Б. А. О машинном решении задач ударного выпучивания упругих систем методом конечных разностей. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
11. Гордиенко Б. А. Ударное выпучивание упругих систем. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4.
12. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
13. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.
14. Малышев Б. М. Устойчивость стержней при ударном сжатии. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
15. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1962.
16. Рунтмайер Р., Морган К. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.
17. Лавренгев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 6.