

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОДКРЕПЛЕНИИ КРАЯ ОБОЛОЧКИ

Е. И. МИХАЙЛОВСКИЙ

(Ленинград)

Рассматриваются вопросы оптимального подкрепления отверстий (вырезов) в оболочках. Сформулированы две задачи оптимального проектирования подкреплений, сводящиеся к минимизации функционала упругой энергии дополнительного (обусловленного наличием отверстия) напряженного состояния при некоторых ограничениях на вектор жесткостей подкрепляющего элемента.

В известных работах, посвященных вопросам оптимизации подкреплений вырезов в оболочках (см., например, [1-4]), рассматриваются в качестве оптимальных эквивалентные подкрепления, т.е. полностью соответствующие по своей упругой работе отсутствующей части оболочки. Однако во многих случаях, когда эквивалентное подкрепление не может быть реализовано, подкрепление оболочки все же целесообразно и существует, естественно, его оптимальный вариант, отвечающий выбранному критерию оптимальности. В данной работе, по-видимому впервые, предлагаются интегральные критерии оптимальности подкрепления вырезов в оболочках.

При решении задач оптимизации удобно использовать полученные ранее деформационные граничные условия подкрепленного края оболочки [5, 6]. Определение, в частности, с помощью этих условий эквивалентного подкрепления сводится к решению алгебраической системы уравнений относительно жесткостей подкрепляющего элемента. Ввиду простой структуры названных уравнений ими рекомендуется пользоваться для подбора подкрепляющего элемента и в тех случаях, когда дополнительное напряженное состояние не устраняется полностью, но удается показать, что связанные с ним максимальные напряжения являются незначительными. Тем самым задача по определению жесткостей эквивалентного (почти эквивалентного) подкрепления оказывается значительно проще задачи прямого расчета подкрепленной оболочки.

Рассмотрены два примера нахождения оптимального вектора жесткостей подкрепляющего элемента непосредственно из граничных условий подкрепленного края оболочки. В первом из них приведены соотношения, которым должно удовлетворять эквивалентное подкрепление эллиптического отверстия в полой оболочке. Во втором — предлагается приближенный способ расчета B -оптимального (основанного на варьировании как жесткостными параметрами подкрепляющего элемента, так и основным напряженным состоянием оболочки в области допускаемых напряжений) подкрепления произвольно нагруженной оболочки вращения.

Обозначения в основном совпадают с принятыми в монографии [7].

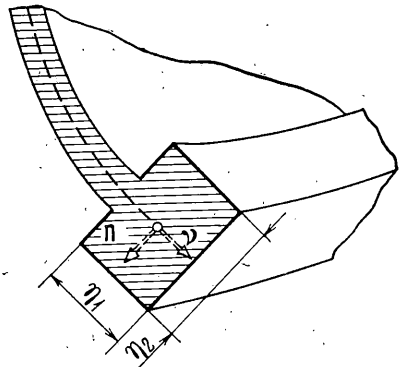
1. Рассмотрим оболочку, ослабленную вырезом (отверстием), край которого, ограниченный замкнутым контуром g , подкреплен тонким стержнем. Пусть при этом полное напряжение состояние в оболочке с отверстием складывается из основного ($^{\circ}$) (того же вида, что имело бы место в соответствующей сплошной оболочке) и дополнительного ($^{+}$), вызванного наличием отверстия. отождествляя контур g с осью подкрепляющего элемента (связанная с чем погрешность не выходит обычно за рамки погрешности технической теории тонких стержней), граничные условия подкрепленного края оболочки можно записать в виде [5]

$$(1.1) \quad b - b^{\circ} = Kx$$

где

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} B_v \\ B_t \\ B_n \\ F_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^e = \begin{pmatrix} B_v^e \\ B_t^e \\ B_n^e \\ F_t^e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{pmatrix} -\kappa_{tt} \\ \kappa_{tv} \\ -\kappa_{tn} \\ \varepsilon_{tt} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_v & 0 & -K_{vn} & 0 \\ 0 & K_t & 0 & 0 \\ -K_{vn} & 0 & K_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_t \end{pmatrix}$$

$K_v = E_0 I_v$, $K_n = E_0 I_n$, $K_{vn} = E_0 I_{vn}$ — жесткости подкрепляющего край оболочку стержня при изгибе, $K_t = G_0 I_d$ — жесткость при кручении, $C_t = E_0 S$ — жесткость стержня при растяжении; κ_{tt} , κ_{tv} , κ_{tn} — изменения кривизн нормального элемента края оболочку, характеризующие его изгиб в своей плоскости (κ_{tt}), скручивание (κ_{tv}) и изгиб из плоскости (κ_{tn}); ε_{tt} — относительное удлинение граничного контура



Фиг. 1

$$\mathbf{B} - \mathbf{B}^e = \mathbf{B}_0 + \int_{s_0}^{s_t} \{ (M_{vv} - M_{vv}^e) \mathbf{t} + (\mathbf{F} - \mathbf{F}^e) \times \mathbf{t} \}' ds'$$

$$F_t - F_t^e = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{F}^e)$$

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}^e = \mathbf{F}_0 + \int_{s_0}^{s_t} (Q_v - Q_v^e)' ds'$$

$$Q_v = Q_{vv} \mathbf{v} + Q_{vt} \mathbf{t} + Q_{vn} \mathbf{n},$$

$$Q_v^e = Q_{vv}^e \mathbf{v} + Q_{vt}^e \mathbf{t} + Q_{vn}^e \mathbf{n}$$

Q_v , M_{vv} — вектор обобщенных (кирхгофовских) усилий и изгибающий момент на граничном контуре оболочку; Q_v^e , M_{vv}^e — вектор приведенной внешней нагрузки и внешний скручивающий момент, действующие на стержень; $\{\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ — правая тройка ортов, связанная с направлениями (соответственно) тангенциальной нормали к контуру, касательной и нормали к срединной поверхности вдоль контура (фиг. 1).

Основываясь на соотношениях (1.1), рассмотрим ряд вопросов оптимального проектирования бортовых элементов, т. е. подбора их жесткостей, отвечающих некоторым критериям оптимальности подкрепления.

Теорема Клапейрона, примененная к дополнительному напряженному состоянию, как к разности полного напряженного состояния в оболочке с подкрепленным краем и основного напряженного состояния в той же оболочке, приводится к равенству

$$(1.2.1) \quad 2V^+ = L_g^+$$

$$(1.2.2) \quad V^+ = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1+\nu}{2} (\varepsilon_1^+ + \varepsilon_2^+)^2 + \frac{1-\nu}{2} (\varepsilon_1^+ - \varepsilon_2^+)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\omega^+}{2} \right)^2 \right\} d\Omega + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1+\nu}{2} (\kappa_1^+ + \kappa_2^+)^2 + \frac{1-\nu}{2} (\kappa_1^+ - \kappa_2^+)^2 + 2(1-\nu) (\tau^+)^2 \right\} d\Omega$$

$$(1.2.3) \quad L_g^+ = - \oint_g (\mathbf{b}^+)' \cdot \boldsymbol{\kappa}^+ ds_t$$

где h — толщина оболочки; Ω — срединная поверхность оболочки с вырезом; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; штрихом здесь и ниже помечены транспонированные вектор-столбцы.

Пусть далее U — множество допустимых значений параметров подкрепляющего элемента (область ограничений, подпространство проектирования [8]). Если на подкрепляющий элемент не накладываются специальные ограничения, связанные с назначением конструкции, то U является областью, в которой справедливы соотношения (1.1) и обеспечена достаточная прочность оболочки и стержня. Непротиворечивый (отвечающий реальному подкрепляющему элементу) набор жесткостных параметров $\{K_v, K_t, K_n, K_{vn}, SC_t\}$ ниже рассматриваем как некоторый пятимерный вектор $\mathbf{u}\{\dots\}$. Тогда область ограничений может быть представлена системой неравенств

$$(1.3) \quad \begin{aligned} h_1(\mathbf{u}) &\equiv |\mathbf{u}| - E_0 \eta^4 \leq 0, & \eta &\leq 1 / \sqrt{R_t^{-2} + \rho_t^2} \\ h_2(\mathbf{u}) &\equiv \max |\sigma^- + \sigma^+| - [\sigma] \leq 0 \\ h_3(\mathbf{u}) &\equiv \max E_0 |\varepsilon_u + \xi_n \boldsymbol{\kappa}_u - \xi_v \boldsymbol{\kappa}_{tn}| - [\sigma] \leq 0 \end{aligned}$$

(ξ_v, ξ_n — координаты точки в поперечном сечении стержня; η — характерный размер поперечного сечения стержня; R_t — радиус нормальной кривизны оболочки вдоль контура g , ρ_t — геодезическая кривизна края).

Из соотношений (1.1) видно, что функционал $L_g^+(\mathbf{u})$ непрерывен на множестве U (т. е. $L_g^+(\mathbf{u}) \in C(U)$), которое является в силу соотношений (1.3) замкнутым ограниченным множеством. Поэтому существует $\inf_{\mathbf{u} \in U} L_g^+(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u} \in U} L_g^+(\mathbf{u})$. Вектор жесткостей $\mathbf{u}(s_t) \in U$, определяющий некоторое подкрепление края оболочки по замкнутому контуру g , естественно считать оптимальным, если $L_g^+(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u} \in U} L_g^+(\mathbf{u})$. Будем различать A - и B -оптимальные подкрепления замкнутых краев оболочек, обеспечивающие соответственно решение следующих задач.

Задача А. Найти вектор $\mathbf{u}^\sim(s_t) \in U$ такой, что

$$L_g^+(\mathbf{u}^\sim) = \min_{\mathbf{u} \in U} \left\{ - \oint_g (\mathbf{b} - \mathbf{b}^0)' (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}^0) ds_t \right\}$$

если \mathbf{b}^0 и $\boldsymbol{\kappa}^0$ — вектор-столбцы граничных величин на контуре g в соответствующей сплошной оболочке.

Задача В. Найти вектор $\mathbf{u}^\sim(s_t) \in U$ такой, что

$$L_g^+(\mathbf{u}^\sim) = \min_{\mathbf{u} \in U} \left\{ - \oint_g (\mathbf{b} - \mathbf{b}^0)' (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}^0) ds_t \right\}$$

если \mathbf{b}^0 и $\boldsymbol{\kappa}^0$ — вектор-столбцы граничных величин основного напряженно-го состояния такого же типа, какой реализовывался бы в сплошной оболочке.

Если при этом достигаемый в задаче А $\min_{\mathbf{u} \in U} L_g^+(\mathbf{u}) = 0$, то из выражения (1.2.2) следует $\varepsilon_1^+ = \varepsilon_2^+ = \omega^+ = 0$, $\boldsymbol{\kappa}_1^+ = \boldsymbol{\kappa}_2^+ = \boldsymbol{\tau}^+ = 0$, т. е. в оболочке с отверстием реализуется то же напряженное состояние, что и в соответствующей сплошной оболочке. Подкрепление $\mathbf{u}^\sim(s_t) \in U$, обеспечивающее выполнение условия $L_g^+(\mathbf{u}^\sim) = 0$, уместно назвать эквивалентным, ибо оно полностью эквивалентно по своей упругой работе отсутствующей части оболочки.

Задача *B* обобщает задачу *A*, отличаясь тем, что в ней предлагается варьировать как жесткости подкрепляющего элемента, так и произвольные функции основного напряженного состояния (не нарушая при этом условия $h_2(\mathbf{u}) \leq 0$). Если удастся подобрать варьируемые параметры так, что $\min L_g^+(\mathbf{u}) = 0$, то в оболочке реализуется напряженное состояние того же типа, что и в соответствующей сплошной оболочке.

Если интеграл уравнений дополнительного напряженного состояния известен $\boldsymbol{\kappa}^+ = \mathbf{C}\mathbf{b}^+$ (где $\mathbf{C} = \|c_{ij}\|$ — «оператор податливости»), то с учетом соотношений (1.1) оптимальное проектирование подкрепляющего элемента сводится к минимизации (при наличии ограничений (1.3)) функционала

$$(1.4) \quad L_g^+(\mathbf{u}) = - \oint_{\Sigma} (\mathbf{b}^+)' \mathbf{C} \mathbf{b}^+ ds_t$$

$$(1.5) \quad \mathbf{b}^+ = (\mathbf{K}\mathbf{C} - \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{b}^e - \mathbf{b}^e - \mathbf{K}\boldsymbol{\kappa}^0)$$

2. Рассмотрим случай, когда в качестве дополнительного напряженного состояния, вызванного наличием отверстия, можно рассматривать простой краевой эффект (^h). В первом приближении (точности которого ниже и придерживаемся) имеют место зависимости

$$(2.1) \quad (\mathbf{b}^h)' = \|0, 0, B_n^h, F_t^h\|, \quad c_{13} = R_t \rho_i c_{33}, \quad c_{14} = R_t \rho_i c_{34}$$

$$c_{23} = - \frac{d(R_t c_{33})}{ds_t} - R_t c_{33} \frac{d(\quad)}{ds_t}, \quad c_{24} = - \frac{d(R_t c_{34})}{ds_t} - R_t c_{34} \frac{d(\quad)}{ds_t}$$

$$c_{33} = - \frac{4\rho^3}{Eh^2 R_t^2} \sqrt{\frac{|R_t|}{h}}, \quad c_{44} = - \frac{2\rho}{ER_t^2} \left(\frac{|R_t|}{h} \right)^{3/2}$$

$$c_{34} = c_{43} = - \frac{2\rho^2}{EhR_t^2} \frac{|R_t|}{h}, \quad \rho = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$$

из которых видно, что первые два уравнения (1.5) не зависят от краевого эффекта, т. е. являются граничными условиями основного напряженного состояния на подкрепленном крае оболочки. В явном виде названные граничные условия были получены в работе [5] и в несколько иных обозначениях могут быть записаны так:

$$(2.2) \quad \psi_1 = \rho_i R_t [c_{34}' (F_t^e - F_t^e) + c_{33}' (B_n^e - B_n^e)] + (B_v^e - B_v^e) / K_v -$$

$$- \rho_i R_t (c_{34}' C_i \varepsilon_{ii}^e - c_{33}' K_n \kappa_{in}^e) - \kappa_{it}^e = 0$$

$$\psi_2 = - \frac{d}{ds_t} [R_t c_{34}' (F_t^e - F_t^e) + R_t c_{33}' (B_n^e - B_n^e)] - (B_t^e - B_t^e) / K_t +$$

$$+ \frac{d}{ds_t} (R_t c_{34}' C_i \varepsilon_{ii}^e - R_t c_{33}' K_n \kappa_{in}^e) + \kappa_{it}^e = 0$$

где

$$c_{34}' = c_{34} \left(1 + \frac{2\rho}{\lambda} \sqrt{\frac{|R_t|}{h}} \right)^{-1}, \quad \lambda = \frac{E|R_t|h}{C_t}$$

$$c_{33}' = c_{33} \left(1 + \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{\frac{|R_t|}{h}} \right) \left(1 + \frac{2\rho}{\lambda} \sqrt{\frac{|R_t|}{h}} \right)^{-1}$$

Функционал (1.4) с учетом соотношений (2.1) можно представить в следующем виде:

$$(2.3) \quad L_g^h = \oint_g \{c_{33}(B_n^h)^2 + 2c_{34}B_n^h F_t^h + c_{44}(F_t^h)^2\} ds_t =$$

$$= \frac{h^2}{2\rho E} \sqrt{\frac{|R_t|}{h}} \oint_g \left\{ \left(\sigma_Q - \text{sign } R_t \rho^2 \frac{\sigma_M}{3} \right)^2 + \left(\rho^2 \frac{\sigma_M}{3} \right)^2 \right\} ds_t$$

(2.4)

$$\sigma_Q = \text{sign } R_t 2\rho \sqrt{\frac{|R_t|}{h}} \frac{1}{h\Delta} [(1 - c_{33}K_n)(F_t^\circ - C_t \varepsilon_{tt}^\circ) + c_{34}C_t(B_n^\circ + K_n \varkappa_{tn}^\circ)]$$

$$\sigma_M = -\frac{6}{h^2 \Delta} [(1 - c_{44}C_t)(B_n^\circ + K_n \varkappa_{tn}^\circ) + c_{34}K_n(F_t^\circ - C_t \varepsilon_{tt}^\circ)]$$

$$R_t^{-1} \Delta = 1 + \frac{2\rho}{\lambda} \sqrt{\frac{|R_t|}{h}} + \frac{\rho^3}{3\mu} \sqrt{\frac{h}{|R_t|}} + \frac{\rho^4}{3\lambda\mu}, \quad \mu = \frac{12K_n}{E|R_t|h^3}$$

При рассмотрении конкретных задач обычно используется метод разделения переменных. Поэтому интеграл, определяющий упругую энергию простого краевого эффекта, легко берется. Например, для оболочки вращения, ограниченной по параллельному кругу $\theta = \theta_0$ [7], имеем

$$L_g^h = \frac{\pi r_0 h^2}{2\rho E} \sqrt{\frac{1}{r_0}} \frac{1}{h \sqrt{\sin \theta_0}} \left\{ 2 \left(\sigma_{Q,0} - \rho^2 \frac{\sigma_{M,0}}{3} \right)^2 + 2 \left(\rho^2 \frac{\sigma_{M,0}}{3} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^n \left[\left(\sigma_{Q,l} - \rho^2 \frac{\sigma_{M,l}}{3} \right)^2 + \left(\rho^2 \frac{\sigma_{M,l}}{3} \right)^2 \right] \right\} \quad (n \leq \sqrt[4]{r_0/h}, \quad r_0 = R_t \sin \theta_0)$$

Задача B -оптимального проектирования сводится к определению вектора \mathbf{u}^\sim и произвольных функций интеграла уравнений основного напряженного состояния $B_1^\sim(s_t)$, $B_2^\sim(s_t)$ из условий

$$L_g^h(\mathbf{u}^\sim, B_1^\sim, B_2^\sim) = \min_{\mathbf{u} \in U} L_g^h(\mathbf{u}, B_1, B_2), \quad \psi_1(\mathbf{u}^\sim, B_1^\sim, B_2^\sim) = \psi_2(\dots) = 0$$

При рассмотрении задачи A -оптимального проектирования соотношения $\psi_1(\mathbf{u}) = \psi_2(\mathbf{u}) = 0$ выполняются тождественно, и соответствующее подкрепление при использовании метода штрафных функций [8] можно находить из условия минимума в подпространстве $\{K_v \geq 0, K_t \geq 0, K_n \geq 0, K_{vn} \geq 0, SC_t \geq 0\}$ функционала

$$\Psi(\mathbf{u}) = L_g^h(\mathbf{u}) + \frac{1}{r_n} \sum_i [\max(h_i(\mathbf{u}), 0)]^2$$

где $r_{n+1} < r_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

При этом в качестве составляющих вектора жесткостей \mathbf{u} следует принять независимые параметры η_i , так как между жесткостями стержня су-

пуществует взаимосвязь, обусловленная геометрией его поперечного сечения. Например, для наиболее употребительного подкрепления в виде стержня прямоугольного поперечного сечения при $K_{v,n}=0$ имеют место соотношения (фиг. 1): $K_v = E\eta_1\eta_2^3/12$, $K_t \approx 3G_0\eta_1^3\eta_2/\pi^2(1+\eta_1^2/\eta_2^2)$, $K_n = E_0\eta_1^3\eta_2/12$, $C_t = E_0\eta_1\eta_2$ ($G_0 = E_0/2(1+\nu_0)$), т. е. при фиксированных упругих постоянных материала кольца жесткости этого стержня определяются лишь двумя геометрическими параметрами η_1 и η_2 ($\mathbf{u} = \mathbf{u}(\eta_1, \eta_2)$).

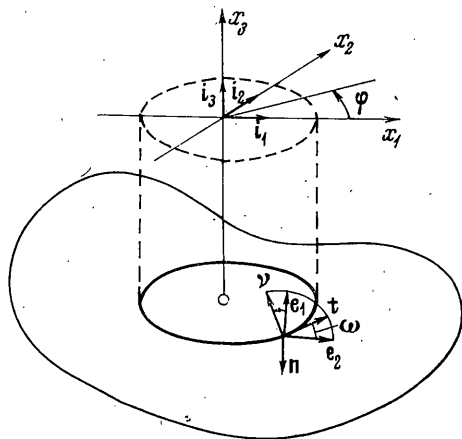
3. Задача эквивалентного подкрепления (когда таковое может быть реализовано) заключается в подборе компонент вектора $\mathbf{u} \in U$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$(3.1) \quad \mathbf{b}^o - \mathbf{b}^e = \mathbf{K}\mathbf{x}^o$$

Решение задачи B -оптимального проектирования, если потребовать выполнения условия $\min L_g^+(\mathbf{u}) = 0$, сводится к определению из системы (3.1) параметров $\{K_v, K_t, K_n, K_{v,n}, C_t, B_1, B_2\}$. Последняя задача, имея большее число степеней свободы, обладает, вообще говоря, большей «разрешающей способностью».

Использование соотношений (3.1) для подбора оптимального подкрепляющего элемента целесообразно и в тех случаях, когда $\min L_g^+(\mathbf{u}) \neq 0$, но невязки

$$(3.2) \quad \|\theta_v^+, \theta_t^+, \theta_n^+, \Delta_t^+\|' = \|\mathbf{b}^o - \mathbf{b}^e - \mathbf{K}\mathbf{x}^o\|$$



Фиг. 2

поддаются оценке, причем вызываемые ими напряжения незначительны. Ниже рассматриваются два примера по подбору жесткостей подкрепляющего элемента непосредственно из соотношений (3.1). Эти примеры в силу их достаточно общего характера могут представлять самостоятельный практический интерес.

Пример 1. Рассмотрим пологую оболочку, ослабленную эллиптическим отверстием. Предполагаем, что в соответствующей сплошной оболочке реализуется безмоментное (*) напряженное состояние. Если $r_0^2/R^2 \ll 1$, где r_0 и R — соответственно большая полуось эллипса и минимальный радиус кривизны срединной поверхности оболочки в районе отверстия, то уравнение контура отверстия можно записать в виде (фиг. 2): $r = r_0 \cos \phi_1 + r_0(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \sin \phi_2 - x_3^2 i_3$, $x_3^o = \text{const} > 0$. Отсюда

$$(3.3) \quad \rho_0 t = dx/r_0 d\phi = -\sin \phi_1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos \phi_2, \quad \rho_0 = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos^2 \phi$$

Строим далее единичные векторы \mathbf{v} и \mathbf{n} так, чтобы система ортов $\{\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ была правой ортогональной тройкой

$$(3.4) \quad \rho_0 \mathbf{v} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos \phi_1 - \sin \phi_2, \quad \mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{t} = -\mathbf{i}_3$$

На срединной поверхности оболочки используем систему координат, связанную с главными направлениями \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . При этом имеют место соотношения (фиг. 2): $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \cos \omega - \mathbf{e}_2 \sin \omega$, $\mathbf{t} = \mathbf{e}_1 \sin \omega + \mathbf{e}_2 \cos \omega$.

Рассмотрим условия эквивалентного подкрепления, которые в данном случае имеют вид $\mathbf{b}^* - \mathbf{b}^e = \mathbf{K}\mathbf{x}^*$.

Вычислим компоненты вектор-столбца $(\mathbf{b}^* - \mathbf{b}^e)$. В силу сделанных выше допущений имеем

$$Q_v^* = Q_{vv} \mathbf{v} + Q_{vt} \mathbf{t} + Q_{vn} \frac{r_0}{R_v} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin^2 \phi \mathbf{n}$$

$$(3.5) \quad Q_{vv}^* = 1/2(T_1^* + T_2^*) + 1/2(T_1^* - T_2^*) \cos 2\omega - S^* \sin 2\omega$$

$$Q_{vt}^* = \frac{1}{2} (T_1^* - T_2^*) \sin 2\omega + S^* \cos 2\omega, \quad \frac{1}{R_v} = \frac{\cos^2 \omega}{R_1} + \frac{\sin^2 \omega}{R_2}$$

С помощью формул (3.3) и (3.4) находим

$$F^* - F^e = r_0 \int (Q_v^* - Q_v^e) \rho_0 d\varphi = -r_0 (J_1 i_1 + J_2 i_2 + J_3 i_3)$$

Здесь

$$J_1 = \int \{ \sqrt{1 - \varepsilon^2} (Q_{vv}^* - Q_{vv}^e) \cos \varphi + (Q_{vt}^* - Q_{vt}^e) \sin \varphi \} d\varphi$$

$$J_2 = \int \{ (Q_{vv}^* - Q_{vv}^e) \sin \varphi - \sqrt{1 - \varepsilon^2} (Q_{vt}^* - Q_{vt}^e) \cos \varphi \} d\varphi$$

$$J_3 = \int \left\{ Q_{vv}^* \frac{r_0}{R_v} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} - Q_{vn}^e \right\} \rho_0 d\varphi$$

Далее, используя (3.5), получаем

$$B^* - B^e = r_0 \int (E^* - E^e) \times t \rho_0 d\varphi = -r_0^2 (J_4 i_1 + J_5 i_2 + J_6 i_3)$$

где

$$J_4 = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \int J_3 \cos \varphi d\varphi, \quad J_5 = \int J_3 \sin \varphi d\varphi$$

$$J_6 = \int (J_2 \sin \varphi + \sqrt{1 - \varepsilon^2} J_1 \cos \varphi) d\varphi$$

Окончательно условия эквивалентного подкрепления эллиптического отверстия в полой оболочке можно записать в виде

$$(3.6) \quad \rho_0 (-K_v \varkappa_{tt}^* + K_{vn} \varkappa_{tn}^*) = r_0^2 (\sqrt{1 - \varepsilon^2} J_4 \cos \varphi + J_5 \sin \varphi)$$

$$\rho_0 (-K_n \varkappa_{tn}^* + K_{vn} \varkappa_{tt}^*) = -r_0^2 \int (J_2 \sin \varphi + \sqrt{1 - \varepsilon^2} J_1 \cos \varphi) d\varphi$$

$$\rho_0 K_t \varkappa_{tv}^* = r_0^2 (J_4 \sin \varphi - \sqrt{1 - \varepsilon^2} J_5 \cos \varphi)$$

$$\rho_0 C_t \varepsilon_{tt}^* = r_0 (J_1 \sin \varphi - \sqrt{1 - \varepsilon^2} J_2 \cos \varphi)$$

где

$$\varkappa_{tt}^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\omega^*}{2} \sin 2\omega + \frac{1}{R_{vt}} \left(\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{2} \sin 2\omega - \frac{\omega^*}{2} \cos 2\omega \right)$$

$$\varkappa_{tv}^* = \left(\frac{\sin^2 \omega}{R_1} - \frac{\cos^2 \omega}{R_2} \right) \frac{\omega^*}{2} + \frac{1}{R_t} \left(\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{2} \sin 2\omega - \frac{\omega^*}{2} \cos 2\omega \right)$$

$$\varkappa_{tn}^* = -\frac{d}{ds_t} \left(\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{2} \sin 2\omega - \frac{\omega^*}{2} \cos 2\omega \right) +$$

$$+ \frac{\sin \omega}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial A_1 \varepsilon_1^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(A_2^2 \frac{\omega^*}{2} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varepsilon_2^* \right\} -$$

$$- \frac{\cos \omega}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial A_2 \varepsilon_2^*}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(A_1^2 \frac{\omega^*}{2} \right) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varepsilon_1^* \right\}$$

$$\varepsilon_{tt}^* = \frac{\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*}{2} + \frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{2} \cos 2\omega + \frac{\omega^*}{2} \sin 2\omega$$

$$\frac{1}{R_t} = \frac{\sin^2 \omega}{R_1} + \frac{\cos^2 \omega}{R_2}, \quad \frac{1}{R_{vt}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin 2\omega$$

Для иллюстрации выписанных выше соотношений рассмотрим пологую сферическую оболочку радиуса R , находящуюся под действием избыточного внутреннего

давления p . Имеем

$$T_1^* = T_2^* = \frac{pR}{2}, \quad S^* = 0, \quad \varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = \frac{1-\nu}{Eh} \frac{pR}{2}, \quad \omega^* = 0$$

$$\frac{1}{R_\nu} = \frac{1}{R_t} = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R_{\nu t}} = 0, \quad Q_{\nu\nu}^* = \frac{pR}{2}, \quad Q_{\nu t}^* = 0$$

$$\kappa_{it}^* = \kappa_{iv}^* = \kappa_{in}^* = 0, \quad \varepsilon_{it}^* = \frac{1-\nu}{Eh} \frac{pR}{2}$$

Предполагая, что отверстие закрыто крышкой, передающей на кольцо только перерезывающую силу, обеспечивающую равновесие оболочки в целом», т. е.

$$Q_{\nu\nu}^e = Q_{\nu t}^e = 0, \quad r_0 \int_0^{2\pi} Q_{\nu n}^e \rho_0 d\varphi = \pi r_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} p$$

имеем

$$(3.7) \quad J_1 = \sqrt{1-\varepsilon^2} Q_{\nu\nu}^* \sin \varphi, \quad J_2 = -Q_{\nu\nu}^* \cos \varphi$$

$$J_3, J_4, J_5 = 0 \{ \varepsilon^2 r_0 Q_{\nu\nu}^* / R \}, \quad J_6 = 1/4 \varepsilon^2 Q_{\nu\nu}^* \cos 2\varphi$$

Здесь для величин $J_3 - J_5$ даны лишь оценки в связи со статической неопределенностью самоуравновешенной части внешней нагрузки $Q_{\nu n}^e$.

Условия эквивалентности (3.6) с учетом формул (3.7) приводятся к следующим соотношениям:

$$(3.8) \quad \frac{E_0 S}{E h r_0} = \frac{1}{1-\nu} \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$\theta_{\nu^+}, \theta_t^+ = 0 \{ \varepsilon^2 r_0^2 Q_{\nu\nu}^* / R \}, \quad \theta_n^+ = 1/4 \varepsilon^2 r_0^2 Q_{\nu\nu}^* \cos 2\varphi$$

Таким образом, эквивалентное подкрепление эллиптического отверстия (в отличие от кругового $\varepsilon^2 = 0$) в пологой сферической оболочке, находящейся под действием избыточного внутреннего давления, вообще говоря, не может быть выполнено. Однако, как показывают элементарные оценки, максимальные изгибные напряжения, обусловленные невязками $\theta_{\nu^+}, \theta_t^+, \theta_n^+$, имеют порядок величины $\varepsilon^2 r_0^2 \sigma^* (Rh)^{-1}$ ($\sigma^* = pR/2h$) и поэтому в большинстве реальных случаев их можно не учитывать.

Пример 2. Рассмотрим случай B -оптимального подкрепления оболочки вращения при условии, что $L_g^+(u^V) = 0$. Пусть оболочка вращения ограничена по параллельному кругу $\theta = \theta_0 = \text{const}$ и находится под действием некоторой нагрузки, допускающей расчленение напряженного состояния на безмоментное и простой краевой эффект. Условия B -оптимального подкрепления при $L_g^+(u^V) = 0$ можно записать в виде

$$(3.9) \quad K_z(\varphi) \kappa_z^*(\varphi) = B_z^*(\varphi), \quad K_\varphi(\varphi) \kappa_\varphi^*(\varphi) = B_\varphi^*(\varphi)$$

$$(3.10) \quad K_\rho(\varphi) \kappa_\rho^*(\varphi) = B_\rho^*(\varphi), \quad C_\varphi(\varphi) \varepsilon_\varphi^*(\varphi) = F_\varphi^*(\varphi)$$

$$(K_z = E_0 J_z, \quad K_\varphi = G_0 J_d, \quad K_\rho = E_0 J_\rho, \quad K_{\rho z} = 0, \quad C_\varphi = E_0 S, \quad Q_\nu^e = 0, \quad M_{\nu\nu}^e = 0)$$

Точное удовлетворение условиям (3.9), (3.10) (если это вообще возможно представляет значительные трудности из-за неприменимости здесь метода разделения переменных для интегрирования уравнений безмоментной теории. Вместо условий (3.9), (3.10) можно использовать упрощенные соотношения, приводящие не к полному снятию краевого эффекта, а к его существенному ослаблению. Рассмотрим, например, методику расчета подкрепляющего элемента (кругового кольца переменной жесткости), основанную на замене в соотношениях (3.9) искомым функций $K_z(\varphi)$ и $K_\varphi(\varphi)$ их усредненными по контуру значениями

$$K_{z0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_z(\varphi) d\varphi, \quad K_{\varphi 0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\varphi(\varphi) d\varphi$$

Иными словами, с целью упрощения расчетов, связанных с проектированием подкрепляющего элемента, предлагается использовать вместо условий (3.9) следующие:

$$(3.11) \quad \bar{K}_{z0} \kappa_z^*(\varphi) = B_z^*(\varphi), \quad K_{\varphi 0} \kappa_\varphi^*(\varphi) = B_\varphi^*(\varphi)$$

Использование условий (3.11) вместо (3.9) приводит к появлению невязок: $\theta_{z,h} = [K_z(\varphi) - K_{z0}] \kappa_{z,h}^*$, $\theta_{\varphi,h} = [K_{\varphi}(\varphi) - K_{\varphi 0}] \kappa_{\varphi,h}^*$. Учитывая соотношения $\kappa_{z,h}^* \sim \kappa_{\varphi,h}^* \sim p/Eh$ и формулы (2.1), (2.4), нетрудно получить следующие оценки для напряжений краевого эффекта, вызываемых этими невязками: σ_Q , $\sigma_M < (1 - K_{i0}/K_i(\varphi)) \sigma^*$.

При сделанном допущении задача B -оптимального проектирования сводится к подбору двух постоянных безмоментного решения и двух жесткостных параметров кольца, удовлетворяющих системе уравнений

$$(3.12) \quad k(k^2 - 1) K_{z0} \kappa_{z,h}^* = r_0^2 (Q_{\varphi,h}^* - k Q_{\rho,h}^*)$$

$$k(k^2 - 1) K_{\varphi 0} \kappa_{\varphi,h}^* = r_0 (k^2 M_{1,h}^* - r_0 Q_{z,h}^*)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, n; n \leq \sqrt{r_0/h})$$

$$(3.13) \quad K_{\rho}(\varphi) \sum_{h=0}^n \kappa_{\rho,h}^* \cos k\varphi = - \sum_{h=0}^n \frac{r_0}{k^2 - 1} (M_{1,h}^* + r_0 Q_{z,h}^*) \cos k\varphi$$

$$C_{\varphi}(\varphi) \sum_{h=0}^n \varepsilon_{\varphi,h}^* \cos k\varphi = \sum_{h=0}^n \frac{r_0}{k^2 - 1} (Q_{\rho,h}^* - k Q_{\varphi,h}^*) \cos k\varphi$$

Для вычисления искомого жесткостей подкрепления может быть применен способ последовательных приближений. В качестве нулевого приближения удобно использовать при этом осесимметричное напряженное состояние ($n=0$). Из уравнений

$$(3.12) \text{ при } k=0 \text{ имеем } Q_{z,0}^* = 0, \text{ а соотношения (3.13) принимают вид } K_{\rho}^{(0)} \vartheta_{\rho,0}^* = 0,$$

$$C_{\varphi}^{(0)} \varepsilon_{\varphi,0}^* = r_0 Q_{\rho,0}^*.$$

Отсюда следует, что первое уравнение (3.13) не может быть выполнено за счет выбора $K_{\rho}^{(0)}$. Иными словами, подбором жесткости кольца в данном случае ($n=0$) нельзя полностью устранить невязку $\theta_{\rho,h}$. Оценим напряжения краевого эффекта при выполнении лишь одного из условий (3.13). Полагая в (3.2) $\Delta_i^k = 0$, $\theta_{\rho,h} = \theta_{\nu,h} \cos \theta_0 + \theta_{\pi,h} \sin \theta_0 = E_0 I_{\rho} \vartheta_{\rho,0}^*$, и учитывая оценки $\sigma^* \sim pr_0/h$, $\vartheta_{\rho,0}^* \sim pr_0/Eh$, получим с учетом соотношений (2.1), (2.4) σ_Q , $\sigma_M \sim \sqrt{h/r_0} E \vartheta_{\rho,0}^* \sim \sqrt{h/r_0} \sigma^*$.

Таким образом, напряжения краевого эффекта, вызываемые невязкой $\theta_{\rho,h}$ в рассматриваемом (геккелеровском) приближении, учитывать не следует. Единственное условие B -оптимальности (в данном случае и A -оптимальности) подкрепления имеет вид

$$(3.14) \quad E_0 S \equiv C_{\varphi}^{(0)} = -E h r_0 \cos \theta_0 T_{1,0}^* / (T_{2,0}^* - \nu T_{1,0}^*)$$

Это соотношение обычно используется при проектировании куполов, работающих по безмоментной теории [9]. Условие эквивалентности подкрепления оболочки вращения в случае осесимметричной деформации (3.14) можно найти непосредственно из формул (50) [10], если положить в них $\sigma_h = \sigma_{M_0} = 0$.

Для получения первого приближения в общем случае нагружения оболочки вращения следует подобрать материал кольца и форму его поперечного сечения такими, чтобы выполнялось (когда это возможно) условие (3.14). Затем подсчитать для выбранного кольца величины $K_{z0}^{(0)}$, $K_{\varphi 0}^{(0)}$ и при этих значениях жесткостей использовать систему (3.12) для определения произвольных постоянных безмоментной части решения. Вычисленные таким образом постоянные подставляются в соотношения (3.13), откуда находятся жесткости $K_{\rho}^{(1)}(\varphi)$ и $C_{\varphi}^{(1)}(\varphi)$, используемые для уточнения ранее полученных постоянных и т. д. Процесс вычисления продолжается до тех пор, пока (в рамках первого приближения) наблюдается изменение величин $K_{z0}^{(i)}$, $K_{\varphi 0}^{(i)}$.

Отметим, что хотя задача определения оптимального набора жесткостей непосредственно из соотношений (3.1) во многих случаях не имеет реше-

ния (в отличие от задачи по отысканию минимума функционала $L_g^+(\mathbf{u})$), использование этих соотношений является удобным для выбора исходной точки итерационного процесса по решению A - или B -оптимальной задачи.

И, наконец, в случае необходимости учета эффекта несовпадения граничного контура g с осью подкрепляющего стержня уравнение (1.1) следует брать в виде [6]

$$\mathbf{b} - \mathbf{b}^e + \mathbf{d}_0 = \mathbf{K}(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{d}_\kappa)$$

Здесь

$$\mathbf{d}_0 = \left\| \mathbf{v} \cdot \int_{s_0}^{s_1} (\delta \times \mathbf{Q}_v)_i' \cdot \mathbf{t}' ds_i', \quad \mathbf{t} \cdot \int_{s_0}^{s_1} (\delta \times \mathbf{Q}_v)_i' \cdot \mathbf{t}' ds_i', \quad \mathbf{n} \cdot \int_{s_0}^{s_1} (\delta \times \mathbf{Q}_v)_i' \cdot \mathbf{t}' ds_i', 0 \right\|'$$

где $\delta = \delta_v \mathbf{v} + \delta_n \mathbf{n}$ — вектор, соединяющий точки контура g с осью стержня, $\boldsymbol{\kappa}_i = -\kappa_{it} \mathbf{v} + \kappa_{it} \mathbf{t} - \kappa_{in} \mathbf{n}$ — вектор искривления нормального элемента края.

Поступила 17 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И., Кваша А. Н. Конструкция та разруханки люків які не включати концентрації напружень в сферичних оболонках. Прикл. механ., 1959, т. 5, вш. 4.
2. Кваша А. Н. К вопросу уменьшения концентрации напряжений около подкрепленных отверстий в пластинках. Сб. работ физ.-матем. ф-та Днепропетр. гос. ун-та, 1959, т. 73, вып. 10.
3. Малков В. П. Расчет подкреплений центральных круговых вырезов в оболочках вращения. Уч. зап. Горьковск. ун-та, вып. 89, Сер. механ. Методы решения задач упругости и пластичности. Горький, 1969.
4. Малков В. П., Морозов В. Д. Исследование работы оптимального подкрепления в зоне кругового выреза в полой сферической оболочке. Уч. зап. Горьковск. ун-та, вып. 134, Сер. механ. Методы решения задач теории упругости и пластичности, Горький, 1971.
5. Михайловский Е. И., Черных К. Ф. Расчленение граничных условий в линейной теории оболочек (случай подкрепленного края). В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969.
6. Михайловский Е. И. Расчленение граничных условий на подкрепленном краю оболочки. В сб.: Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1968, № 7.
7. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек, ч. 1. Изд-во ЛГУ, 1962.
8. Ниордсон Ф. И., Педерсон П. Обзор исследований по оптимальному проектированию конструкций. Механика. Сб. перев., № 2. М., «Мир», 1973.
9. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
10. Прочность, устойчивость, колебания (справочник под общ. ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко), т. 2, гл. I. М., «Машиностроение», 1969.