

**ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ
ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА**

Н. М. БОРОДАЧЕВ

(Киев)

Рассматривается статическая температурная контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость при наличии в последней источников тепла. Более подробно изучен случай, соответствующий штампу с плоским основанием и точечному источнику тепла. Получены формулы для определения нормального напряжения на площадке контакта и угла поворота штампа.

Плоские статические контактные задачи теории упругости достаточно полно изложены в монографиях [1-3]. Плоские контактные задачи термоупругости (при отсутствии источников тепла) рассматривались в работах [4-7]. Влияние источников тепла, распределенных по области контакта и образующихся в результате трения при относительном скольжении цилиндров, изучено в [8].

1. Воспользуемся прямоугольной системой координат x, y . Пусть нагретый штамп под действием силы P вдавливается в упругое изотропное тело, занимающее полуплоскость $y \geq 0$. Внутри упругого тела имеются источники тепла. Считаем, что силы трения на площадке контакта между штампом и упругой полуплоскостью не возникают, а нагрузка на полуплоскость вне штампа отсутствует. Ограничимся рассмотрением случая плоской деформации.

Воспользуемся термоупругим потенциалом перемещений $\Phi(x, y)$, который, как известно [9], удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad \Delta \Phi = mT, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad m = \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu}$$

где T — изменение температуры, α — коэффициент линейного расширения от температуры, ν — коэффициент Пуассона.

Перемещения и напряжения выражаются через функцию Φ следующим образом:

$$(1.2) \quad u^{(2)} = \Phi_{x'}, \quad v^{(2)} = \Phi_{y'}, \quad \sigma_x^{(2)} = -2\mu \Phi''_{yy}, \quad \sigma_y^{(2)} = -2\mu \Phi''_{xx}, \quad \tau_{xy}^{(2)} = 2\mu \Phi''_{xy}$$

где μ — модуль сдвига. При помощи решения (1.2) нельзя (как правило) удовлетворить всем граничным условиям (в данном случае при $y=0$). Поэтому к решению (1.2) необходимо добавить решение плоской задачи теории упругости ($u^{(1)}, v^{(1)}, \sigma_x^{(1)}$ и т. п.), соответствующее $T=0$, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям при $y=0$. В качестве такого решения возьмем [10]

$$(1.3) \quad u^{(1)}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} 2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^*(\xi)}{|\xi|} e^{-y/|\xi| - i x \xi} [2(1-\nu) + y|\xi|] d\xi$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{-y/|\xi| - i x \xi} (1 + y|\xi|) d\xi$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, y) = -\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} y \xi p^*(\xi) e^{-y|\xi| - i x \xi} d\xi, \quad p^*(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i \xi x} dx$$

Формулы для $u^{(1)}$ и $\sigma_x^{(1)}$ в дальнейшем не понадобятся, поэтому их не приводим. Очевидно, что решение (1.3) удовлетворяет следующим условиям при $y=0$:

$$(1.4) \quad \sigma_y^{(1)}(x, 0) = -p(x), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0$$

Окончательные перемещения и напряжения можно вычислить по формулам вида

$$(1.5) \quad v = v^{(1)} + v^{(2)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}$$

Подобные формулы имеют место и для остальных компонентов вектора перемещения и тензора напряжений.

Для решения контактной задачи будут нужны функции v и σ_y при $y=0$. Используя (1.2) — (1.5), находим

$$(1.6) \quad v(x, 0) = \Phi_y'(x, 0) + \frac{1-v}{(2\pi)^{1/2} \mu} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{-1} p^*(\xi) e^{-i x \xi} d\xi$$

$$\sigma_y(x, 0) = -2\mu \Phi_{xx}(x, 0) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{-i x \xi} d\xi$$

Так как силы трения на площадке контакта не возникают, а нагрузка на границе полуплоскости вне штампа отсутствует, то

$$(1.7) \quad \tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) + \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0$$

2. В формулы (1.6) входят производные от функции Φ , которая является решением уравнения (1.1). Учитывая (1.4) и (1.7), приходим к выводу, что функция Φ должна удовлетворять граничному условию

$$(2.1) \quad \Phi_{xy}''(x, 0) = 0$$

Решение уравнения (1.1) запишем в виде

$$(2.2) \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

Здесь $\Phi_1(x, y)$ — решение уравнения

$$(2.3) \quad \Delta \Phi = 0$$

а $\Phi_2(x, y)$ — частное решение уравнения (1.1).

Удовлетворяя условию (2.1), находим

$$(2.4) \quad \Phi_y'(x, 0) = \Phi_{2y}'(x, 0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(x_0 - x) \Phi_{2xy}''(x_0, 0) dx_0$$

$$\Phi_{xx}''(x, 0) = \Phi_{2xx}''(x, 0) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x_0 - x} \Phi_{2xy}''(x_0, 0) dx_0$$

Интеграл во второй формуле (2.4) понимается в смысле главного значения.

Функцию Φ_2 можно взять в виде

$$(2.5) \quad \Phi_2(x, y) = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} dy_0 \int_{-\infty}^{\infty} T(x_0, y_0) \ln(RR_0) dx_0$$

$$R = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{1/2}, \quad R_0 = [(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2]^{1/2}$$

Нетрудно убедиться в том, что это выражение для Φ_2 удовлетворяет уравнению (1.1). Дифференцируя функцию Φ_2 , находим

$$(2.6) \quad \Phi_{2y}'(x, 0) = 0, \quad \Phi_{2xy}''(x, 0) = 0,$$

$$\Phi_{2xx}''(x, 0) = \frac{m}{\pi} \int_0^{\infty} dy_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0^2 - (x-x_0)^2}{[(x-x_0)^2 + y_0^2]^2} T(x_0, y_0) dx_0$$

На основании формул (2.4), (2.6) имеем

$$(2.7) \quad \Phi_y'(x, 0) = 0, \quad \Phi_{xx}''(x, 0) = \Phi_{2xx}''(x, 0)$$

Используя теорему о свертках для преобразования Фурье, последней формуле (2.6) можно придать вид

$$(2.8) \quad \Phi_{2xx}''(x, 0) = \frac{m}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| e^{-ix\xi} d\xi \int_0^{\infty} T^*(\xi, y_0) e^{-|\xi|y_0} dy_0$$

где $T^*(\xi, y)$ — трансформанта Фурье функции $T(x, y)$.

Принимая во внимание (2.7), (2.8) и (1.6), будем иметь

$$(2.9) \quad v(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1-\nu}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{-1} p^*(\xi) e^{-ix\xi} d\xi,$$

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} [p^*(\xi) + g^*(\xi)] e^{-ix\xi} d\xi$$

$$(2.10) \quad g^*(\xi) = 2\mu m |\xi| \int_0^{\infty} T^*(\xi, y) e^{-|\xi|y} dy$$

3. Чтобы определить функцию $g^*(\xi)$ по формуле (2.10), необходимо знать распределение температуры $T(x, y)$. Функция T удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(3.1) \quad \Delta T = -\lambda^{-1} w(x, y)$$

и некоторым граничным условиям при $y=0$. Здесь λ — коэффициент теплопроводности; $w(x, y)$ — удельная мощность источников тепла, имеющихсся внутри тела. Рассмотрим случай, когда при $y=0$ задана функция $T(x, 0)$.

В этом случае положим

$$(3.2) \quad T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y)$$

где $T_1(x, y)$ — решение уравнения

$$(3.3) \quad \Delta T = 0$$

удовлетворяющее условию

$$(3.4) \quad T_1|_{y=0} = T(x, 0)$$

$T_2(x, y)$ — частное решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условию

$$(3.5) \quad T_2|_{y=0} = 0$$

Для нахождения функции T_1 применим преобразование Фурье. В результате получим

$$(3.6) \quad T_1(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) e^{-(ix\xi + y|\xi|)} d\xi$$

$$(3.7) \quad B(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, 0) e^{i\xi x} dx$$

Из этих формул следует, что

$$(3.8) \quad T_1^*(\xi, y) = B(\xi) e^{-|\xi|y}$$

Для определения функции T_2 применим метод, основанный на использовании функции Грина и способа изображений [11].

В результате найдем

$$(3.9) \quad T_2(x, y) = -\frac{1}{4\pi\lambda} \int_0^{\infty} dy_0 \int_{-\infty}^{\infty} w(x_0, y_0) \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2} dx_0$$

Воспользовавшись теоремой о свертках для преобразования Фурье, можно показать, что

$$(3.10) \quad T_2^*(\xi, y) = \frac{1}{2\lambda|\xi|} \int_0^{\infty} w^*(\xi, y_0) [e^{-|y-y_0||\xi|} - e^{-(y+y_0)|\xi|}] dy_0$$

где $w^*(\xi, y)$ — трансформанта Фурье функции $w(x, y)$.

Очевидно, имеем

$$(3.11) \quad T^*(\xi, y) = T_1^*(\xi, y) + T_2^*(\xi, y)$$

Подставляя в (2.10) выражения (3.8), (3.10), (3.11) и выполняя интегрирование, будем иметь

$$(3.12) \quad g^*(\xi) = \mu m [B(\xi) + W(\xi)]$$

$$(3.13) \quad W(\xi) = \lambda^{-1} \int_0^{\infty} w^*(\xi, y) y e^{-|\xi|y} dy$$

Вторую формулу (2.9), очевидно, можно записать и в таком виде:

$$(3.14) \quad \sigma_y(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y^*(\xi, 0) e^{-ix\xi} d\xi$$

где $\sigma_y^*(\xi, 0)$ — трансформанта Фурье функции $\sigma_y(x, 0)$. Сравнивая (2.9) и (3.14) приходим к выводу, что

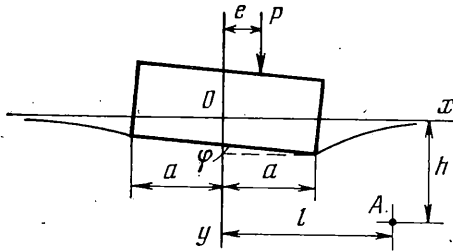
$$(3.15) \quad \sigma_y^*(\xi, 0) = -[p^*(\xi) + g^*(\xi)]$$

Учитывая (3.12) и (3.15), первую формулу (2.9) представим в таком виде:

$$(3.16)$$

$$v(x, 0) = -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1-v}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{-1} \{ \sigma_y^*(\xi, 0) + \mu m [B(\xi) + W(\xi)] \} e^{-ix\xi} d\xi$$

Здесь функции $B(\xi)$ и $W(\xi)$ определяются соответственно выражениями (3.7) и (3.13). По формуле (3.16) можно определить вертикальные перемещения границы упругой изотропной полуплоскости при условии что на границе ($y=0$) заданы нормальные напряжения $\sigma_y(x, 0)$, температура $T(x, 0)$, касательные напряжения $\tau_{xy}(x, 0)=0$, а также известны внутренние источники тепла.



Фиг. 1.

4. Формулу (3.16) применим к решению температурной контактной задачи теории упругости. Рассмотрим нагретый штамп с плоским основанием (фиг. 1), расположенный на границе упругой изотропной полуплоскости. На штамп

действует внецентренно приложенная сила P . Граничные условия при $y=0$ имеют вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} v(x, 0) &= b_0 + \varphi x & \text{при } |x| \leq a \\ \sigma_y(x, 0) &= 0 & \text{при } |x| > a, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 & \text{при } -\infty < x < \infty \\ T(x, 0) &= T(x) & \text{при } |x| < a, \quad T(x, 0) = 0 & \text{при } |x| > a \end{aligned}$$

В упругом теле (занимающем полуплоскость $y \geq 0$) имеются внутренние источники тепла, удельная мощность которых $w(x, y)$. Предполагается, что штамп не отрывается от упругой полуплоскости.

Применяя теорему о свертках к интегралу, входящему в (3.16), будем иметь

$$(4.2) \quad v(x, 0) + \text{const} = v_w(x) + \frac{1-\nu}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x-t| [\sigma_y(t, 0) + \mu m T(t, 0)] dt$$

$$(4.3) \quad v_w(x) = \frac{(1-\nu)m}{2\pi\lambda} \int_0^{\infty} y dy \int_{-\infty}^{\infty} w(t, y) \ln[(x-t)^2 + y^2] dt$$

Формула (4.2) справедлива при выполнении третьего условия (4.1). Удовлетворяя остальным условиям (4.1) приходим к интегральному уравнению первого рода

$$(4.4) \quad \int_{-a}^a \ln|x-t| [\sigma_y(t, 0) + \mu m T(t)] dt = V(x), \quad |x| < a$$

$$(4.5) \quad V(x) = \frac{\pi\mu}{1-\nu} [b + \varphi x - v_w(x)]$$

Решение уравнения (4.4), как известно [2], имеет вид

$$(4.6) \quad \sigma_y(x, 0) + \mu m T(x) =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2(\alpha^2 - x^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{\ln(2/a)} \int_{-a}^a \frac{V(t) dt}{(\alpha^2 - t^2)^{1/2}} - \int \frac{V'(t) (\alpha^2 - t^2)^{1/2}}{t-x} dt \right], \quad |x| < a$$

здесь последний интеграл понимается в смысле главного значения.

Формулу (4.6) перепишем в виде

$$(4.7) \quad \sigma_y(x, 0) = -\mu m T(x) - \frac{c+f(x)}{\pi^2 (a^2-x^2)^{1/2}}, \quad |x| < a$$

$$(4.8) \quad c = \frac{1}{\ln(2/a)} \int_{-a}^a \frac{V(t) dt}{(a^2-t^2)^{1/2}}, \quad f(x) = - \int_{-a}^a \frac{V'(t) (a^2-t^2)^{1/2}}{t-x} dt$$

Из уравнений равновесия штампа следует, что

$$(4.9) \quad P = - \int_{-a}^a \sigma_y(x, 0) dx, \quad M = - \int_{-a}^a \sigma_y(x, 0) x dx$$

Используя эти соотношения найдем две неизвестные постоянные c и φ . Величины P и M известны ($M=Pe$). Подставляя выражение для $\sigma_y(x, 0)$ из (4.7) в (4.9) и учитывая (4.8), находим

$$(4.10) \quad c = \pi(P-P_T), \quad \varphi = \frac{2(1-\nu)}{\pi a^2 \mu} [M - (M_T + M_w)]$$

$$(4.11) \quad P_T = \mu m \int_{-a}^a T(x) dx, \quad M_T = \mu m \int_{-a}^a T(x) x dx,$$

$$M_w = - \frac{\mu}{1-\nu} \int_{-a}^a v_w'(t) (a^2-t^2)^{1/2} dt$$

Вторая формула (4.10) определяет угол поворота (наклона) штампа. Если положить $M_T=0$ (штамп не нагретый) и $M_w=0$ (внутренние источники тепла отсутствуют), то получим известный результат [3].

С учетом соотношений (4.10), формула для определения напряжений на площадке контакта (4.7) принимает вид

$$(4.12) \quad \sigma_y(x, 0) = - \frac{P-P_T}{\pi (a^2-x^2)^{1/2}} - \frac{2(M-M_T-M_w)x}{\pi a^2 (a^2-x^2)^{1/2}} - \mu m T(x) - \frac{f_1(x)}{\pi (a^2-x^2)^{1/2}} \quad \text{при } |x| < a$$

$$(4.13) \quad f_1(x) = \frac{\mu}{1-\nu} \int_{-a}^a \frac{v_w'(t) (a^2-t^2)^{1/2}}{t-x} dt$$

Формула (4.12) справедлива при условии, что под штампом не возникает растягивающих нормальных напряжений σ_y , т. е. при условии, что штамп не отрывается от упругой полуплоскости. В общем случае условие применимости формулы (4.12) имеет довольно громоздкий вид и поэтому его не приводим. В частных случаях оно значительно упрощается (см., например, [4]).

Величины P_T и M_T , входящие в (4.12), при известной функции $T(x)$ сравнительно просто могут быть найдены из соотношений (4.11). Величины M_w и функция $f_1(x)$, учитывающие влияние внутренних источников тепла, могут быть найдены, используя (4.11) и (4.13), но при вычислении интегралов, входящих в эти формулы, приходится преодолевать некоторые трудности. Методику вычисления M_w и $f_1(x)$ покажем на примере.

5. Рассмотрим случай, когда внутри упругого тела (занимающего полуплоскость) имеется источник тепла мощностью w_0 , расположенный в точке с координатами $x=l$, $y=h$ (фиг. 1).

В этом случае

$$(5.1) \quad w(x, y) = w_0 \delta(x-l) \delta(y-h)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Подставляя выражение для $w(x, y)$ из (5.1) в (4.3) и выполняя интегрирование, находим

$$(5.2) \quad v_w(x) = \frac{(1-\nu) m h w_0}{2\pi\lambda} \ln[(x-l)^2 + h^2]$$

На основании (4.11) и (5.2), имеем

$$(5.3) \quad M_w = -\frac{\mu m h w_0}{\pi\lambda} \int_{-a}^a \frac{(t-l)(a^2-t^2)^{1/2}}{(t-l)^2+h^2} dt$$

Известно [12], что

$$(5.4) \quad \frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k$$

где $U_k(x)$ — полиномы Чебышева 2-го рода. Используя (5.4), формуле (5.3) можно придать такой вид:

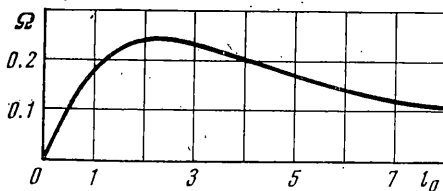
$$(5.5) \quad M_w = \mu m \lambda^{-1} a^2 w_0 \Omega, \quad \Omega = h_0 \sum_{k=0}^{\infty} (l_0 \beta_k - \beta_{k+1}) r_0^{-(k+2)} U_k\left(\frac{l_0}{r_0}\right)$$

Здесь

$$(5.6) \quad \beta_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ нечетном} \\ \frac{1}{k+2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots k} & \text{при } k \text{ четном } (k \geq 0) \end{cases}$$

$$l_0 = l/a, \quad h_0 = h/a, \quad r_0 = (l_0^2 + h_0^2)^{1/2}$$

На фиг. 2 приведен график изменения безразмерной величины Ω в зависимости от l_0 применительно к случаю, когда $h_0=2$. Вычисления произведены по формуле (5.5) с использованием таблиц значений полиномов Чебышева [13].



Фиг. 2

Переходим к нахождению функции $f_1(x)$. Подставляя выражение $v_w(x)$ из (5.2) в (4.13), будем иметь

$$(5.7) \quad f_1(x) = \frac{\mu m h w_0}{\pi\lambda} \times \int_{-a}^a \frac{(t-l)(a^2-t^2)^{1/2}}{(t-x)[(t-l)^2+h^2]} dt, \quad |x| < a$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения. Для вычисления интеграла (5.7) можно использовать различные методы, в том числе способ, предложенный в работе [14]. Однако в данном случае, весьма удобным оказывается метод, основанный на применении производящей функции для полиномов Чебышева 2-го рода (5.4).

Используя формулу (5.4), выражению (5.7) можно придать вид (5.8)

$$f_1(x) = \mu t \lambda^{-1} a w_0 \bar{h}_0 \sum_{k=0}^{\infty} r_0^{-(k+2)} U_k \left(\frac{l_0}{r_0} \right) \left[B_{k+1} \left(\frac{x}{a} \right) - l_0 B_k \left(\frac{x}{a} \right) \right], \quad |x| < a$$

$$(5.9) \quad B_k(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t^k (1-t^2)^{1/2}}{t-y} dt, \quad (-1 < y < 1)$$

Интеграл в (5.9) понимается в смысле главного значения. Явные выражения для некоторых функций $B_k(y)$ таковы: $B_0(y) = -y$, $B_1(y) = -1/2(1-2y^2)$, $B_2(y) = 1/2y(1-2y^2)$, $B_3(y) = 1/8(1+4y^2-8y^4)$, $B_4(y) = 1/8y(1+4y^2-8y^4)$.

Последующие функции $B_k(y)$, в случае необходимости, могут быть найдены с помощью рекуррентного соотношения $B_k(y) = \beta_{k-1} + yB_{k-1}(y)$, где коэффициенты β_k определяются формулой (5.6).

Таким образом, получено решение плоской термоупругой контактной задачи при наличии внутренних источников тепла. Угол поворота штампа определяется формулой (4.10). Перемещение штампа в данном случае может быть определено лишь с точностью до аддитивной постоянной. Объяснение этому явлению содержится, например, в монографии [15]. Формула (4.12) дает распределение нормальных напряжений на площадке контакта.

Поступила 5 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
4. Бородачев Н. М. Плоская задача термоупругости о вдавлении штампа. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 4.
5. Бородачев Н. М. О вдавлении нагретого штампа в упругую полуплоскость. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 1.
6. Савин Г. Н., Грилицкий Д. В. Контактная задача термоупругости для анизотропной полуплоскости. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 5.
7. Александров В. М., Бабешко В. А., Белоконов А. В. и др. Расчет термоупругих контактных давлений в подшипнике с полимерным покрытием. В сб.: Контактные задачи и их инженерные приложения. М., Н.-и. ин-т машиновед., 1969.
8. Коровчинский М. В. Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкосновения. В сб.: Контактная прочность машиностроительных материалов. М., «Наука», 1964.
9. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М., Физматгиз, 1958.
10. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
11. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
13. Таблицы полиномов Чебышева $S_n(x)$ и $C_n(x)$. М., ВЦ АН СССР, 1963.
14. Пыхтеев Г. Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
15. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.