МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1975

УДК 531.01

ИМПУЛЬСНАЯ ПОГОНЯ ЗА ПРОТИВНИКОМ С ОГРАНИЧЕННОЙ ЭНЕРГЕТИКОЙ

Г. К. ПОЖАРИЦКИЙ

(Москва)

Две точки $m_{1,2}$ (первый и второй игроки) [1, 2] движутся в пространстве под действием одних только управляющих сил $f_1=m_1 u$, $f_2=-m_2 v$, произвольных по направлению. Первый игрок ограничен по импульсу

$$\mu-\int_0^t |u|\,dt \geqslant 0$$

[3, 4], а модуль управления v стеснен условием

$$\nu-\int_0^t \varphi(|v|)\,dt \geqslant 0, \qquad \varphi(|v|)>0$$

Последнее ограничение по аналогии со случаем $\varphi(|v|)=v^2$ назовем ограничением энергетики. Функция $\varphi(|v|)$ предполагается возрастающей от нуля с непрерывной производной, также возрастающей от нуля (предположение (а)).

Первый (второй) игрок минимизирует (максимизирует) время попадания на множество окончания $M_1[x_2=r_1-r_2,\ y_2=r_1^{\cdot}-r_2^{\cdot}]$, где r_1, r_2 – радиус-векторы игроков в неподвижной системе отсчета, а x_2, y_2 – произвольные трехмерные векторы.

Пространство $w[x=|r_1-r_2-x_2|,\ y=r_1^{\cdot}-r_2^{\cdot},\ \mu,\ \nu]$ разделено на две области C_1, C_2. В первой построен минимаксный синтез, а во второй уклонение второго игрока от множества M_1.

Доказательства, близко повторяющие [4], изложены конспективно.

1. В переменных

$$\begin{gathered}
x_1=r_1-r_2-x_2, \quad y_1=r_1^{\cdot}-r_2^{\cdot}, \quad j_\alpha=x_1/x, \quad x=|x_1|, \quad y_\alpha=(y_1x_1)/x \\
y_{2,\alpha}=(y_2x_1)/x, \quad y_{1,\alpha}=y_\alpha j_\alpha, \quad y_{1,\beta}=y_1-y_{1,\alpha}, \quad y_\beta=|y_{1,\beta}| \\
j_\beta=y_{1,\beta}/y_\beta, \quad y_{2,\beta}=(y_2{}^{\cdot}{}_\beta), \quad y_{2,\gamma}=(y_2 j_\gamma)
\end{gathered}$$

уравнения движения позиции $w[x,\ y_\alpha,\ y_\beta,\ \mu,\ \nu,\ y_{2,\alpha,\beta,\gamma}]$ при конечных управлениях u имеют[1] вид

$$\begin{gathered}
x^{\cdot}=y_\alpha, \quad y_\alpha^{\cdot}=u_\alpha+v_\alpha+y_\beta^2/x, \quad y_\beta^{\cdot}=u_\beta+v_\beta-y_\alpha y_\beta/x \\
y_{2,\alpha}^{\cdot}=y_{2,\beta}y_\beta/x, \quad y_{2,\beta}^{\cdot}=-y_{2,\alpha}y_\beta/x, \quad y_{2,\gamma}^{\cdot}=0, \quad \mu^{\cdot}=-|u|, \\
\nu^{\cdot}=-\varphi(|v|), \quad \mu\geqslant 0, \quad \nu\geqslant 0
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Импульсное управление $u=\mu_1\delta$ переводит позицию w в результат импульсов

$$w^{(1)}[x,\ y_\alpha^{(1)}=y_\alpha+\mu_{1,\alpha},\ y_\beta^{(1)}=[(y_\beta+\mu_{1,\beta})^2+\mu_{1,\gamma}^2]^{1/2},\quad \mu^{(1)}=\mu-|\mu_1|,\ \nu,\ y_{2,\alpha,\beta,\gamma}]$$

а множество M_1 приобретает [4] вид

$$M_1\equiv M[x=0,\ \mu-|y_2-y_1|\geqslant 0]$$

[1] Уравнения движения в области $[x=0]\cup[y_\beta=0]$ не приводятся, хотя их структура ясна из механического содержания задачи.

При $y_\beta=0$ имеем $y_\beta^{\bullet}=[(y_\beta+v_\beta)^2+(u_\gamma+v_\gamma)^2]^{1/2}$
Нижние индексы указывают на оси подвижного триедра $j_{\alpha,\beta,\gamma}$..

2. Пусть первый игрок реализует импульс $u=\mu_1\delta$

$$\mu_1=(p-y_\alpha)j_\alpha-y_\beta j_\beta, \qquad p<0$$

а затем применяет управление $u=-v$ [3] и ведет траекторию по уравнениям

$$y_\alpha=p<0, \quad y_\beta=0, \quad x(t=-x/p)=0$$

Это движение попадает на M, если запас μ окажется достаточно большим к моменту $t=-x/p$. Второй игрок может реализовать управление v произвольного направления по уравнению

$$\varphi(|v|)t\equiv\varphi(|v|)(-x/p)=\nu>0$$

тогда к моменту $t=-x/p$ позиция попадает на M при выполнении оценки

$$q(w,p)=\mu-l_2(w,p)-l_1(w,p)-n_1(w,p)\geqslant 0$$

где приняты обозначения

$$l_1(w,p)=[y_{2,\beta}^2+(p-y_\alpha)^2]^{1/2}, \qquad l_2(w,p)=[y_\beta^2+(p-y_\alpha)^2]^{1/2}$$
$$n_1(w,p)=-(x/p)\,|v(\lambda(w,p))|, \qquad \lambda(w,p)=-\nu p/x$$
$$\varphi(|v(\lambda)|)\equiv\lambda, \qquad \lambda\geqslant 0$$

Последнее тождество определяет функцию $|v(\lambda)|$. Введем обозначения: $r(w)=\max_p q(w,p\leqslant 0)$; $p_1(w)$ — точка реализации максимума; $p_2(w)$ — наименьший отрицательный нуль функции $q(w,p)$, и область $C_1[r(w)\geqslant\geqslant 0]$.

В ограничении (а) операция $\max_v\min_u p_2^{\bullet}(w,u,v)$ дает

$$v_1=-v_2(w)u_1(w)/|u_1| \qquad v_2=|v(-x/p_2)|$$
$$u_1=\delta[(p_2-y_\alpha)j_\alpha-y_\beta j_\beta], \qquad w\in D_1[C_1\cap[l_2(w,p_2)>0]]$$
$$v_1=-v_2(w)[s(w)j_\alpha+(1-s^2)^{1/2}j_\beta], \qquad w\in D_2[C_1\cap[l_2=0]]$$

где функция $-1\leqslant s(w)\leqslant 1$ определена формулами

$$s(w)=\begin{cases} l_1'(w,p_2)-n_1'(w,p_2) & \text{при} \quad w\in D_2\cap[l_1(w,p_2)>0] \\ -1-n_1'(w,p_2) & \text{при} \quad w\in D_2\cap[l_1=0] \end{cases}$$

Здесь n_1', q' означают $\partial n_1/\partial p$, $\partial q/\partial p$. Продолжим $r(w)$ в область $[x=0]$ по формуле

$$r(w)=\mu-|y_1-y_2|, \qquad w\in[x=0]$$

а в область $C_2[r(w)<0]$ управление v_1 по предыдущим формулам с заменой p_2 на $p_1(w)$. При $x=0$ положим $v_1=0$. Такое управление будет определено, если при любых w существует $p_1(w)$. Нетрудно проверить, что из (а) следует

$$q(w,p\to-\infty,-0)\to-\infty, \qquad w\in[x>0,\ \nu>0]$$

так что $p_1(w)<0$ существует. Труднее гарантировать единственность. Эту единственность с запасом доставляет условие (n_1' — монотонно убывающая функция (с)), которое выполнено для функций вида $\varphi=v^m[m==\text{const}>1]$.

Пусть при любых $w\in[x>0,\ \nu>0]$ функция $p_1(w)$ единственна (в).

Теорема. В условиях (а), (в) непрерывная функция $T^\circ(w\in C_1)=$ $=-x/p_2$ и управления

$$u^\circ=\begin{cases}((p_2-y_\alpha)j_\alpha-y_\beta j_\beta)\delta & \text{при} \quad w\in D_1\\ -v \ \text{при} \ w\in D_2, \ v^\circ=v_1 & \text{при} \quad w\in C_1\end{cases}$$

оптимально решают минимаксную задачу, а управление $v_0=v_1(w\in C_2)$ уклоняет движение от множества M при любых действиях первого игрока.

Для доказательства сначала по свойству (в) устанавливается непрерывность функций p_1, p_2, r при $w\in[x>0]$. Затем проверяются оценки

$$p_2(w^{(1)}\in C_1)-p_2(w\in C_1)\geqslant 0, \quad T^{\circ\bullet}(w\in D_1, u, v_1)>-1$$

которые гарантируют оптимальность при $w\in C_1$ для импульсных u и при $w\in D_1$ для конечных u.

В области D_2 проверяются оценки

$$T^{\circ\bullet}(w, u^\circ, v)=-1, \qquad r^\bullet(w, u, v_1)<0$$
$$r(w^{(1)})<r(w), \quad r^\bullet(w\in C_1\cap[r=0], \ u\neq u^\circ, v_1)<0$$

Нетрудно показать, что область D_2 лежит на границе $r(w)=0$. Первое равенство показывает, что второй игрок при $w\in D_2$ не может повлиять на исход. Вторая, третья и четвертая оценки указывают, что ошибки первого игрока переводят позицию в область C_2, как с области D_2, так и с остальной части границы $r(w)=0$. Этим оканчивается доказательство первой части теоремы.

В области C_2 оценки

$$r(w^{(1)})\leqslant r(w)<0, \qquad r^\bullet(w\in C_2, u, v_1)\leqslant 0$$

указывают, что движение не покидает C_2. С другой стороны, можно показать, что движение по допустимой траектории [4] к множеству M должно обязательно перейти в C_1 не позднее попадания на M.

При $x=0$ положим $u^\circ=(-y_1+y_2)\delta$ в области $[\mu-|y_1-y_2|\geqslant 0, \ x=0]$. В области $M_1[x=0, \ \mu-|y_1-y_2|<0]$ положим $v_1=0$. Эти управления дополняют формально управления в сомнительных позициях $x=0$, а также присоединяют область M_1 $[\mu-|y_1-y_2|<0, \ x=0]$ к области C_2, в которой возможно уклонение от множества M.

Этим завершается доказательство по схеме [4, 5]. Если множество $M[x=0]$ не содержит условий на скорость, то функция $q(w, p)$ теряет второе слагаемое, т. е. его надо заменить нулем. Управления u°, v°, v° и время T° будут строиться по аналогичным формулам и решать минимаксную задачу жесткой встречи при $x_2=0$.

Поступила 4 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* К задаче преследования в случае ограничений на импульсы управляющих сил. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 5.
4. *Пожарицкий Г. К.* Импульсное преследование точки с ограниченной тягой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
5. *Пожарицкий Г. К.* Игровая задача импульсной мягкой встречи двух материальных точек. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.