МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1975

УДК 539.3

ВНУТРЕННЯЯ ОСНОВНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. И. ФАБРИКАНТ

(Ульяновск)

Основная смешанная задача с круговой линией раздела граничных условий для изотропного полупространства рассматривалась в работах [1, 2]. В данной статье получено точное решение аналогичной задачи для трансверсально изотропного полупространства.

1. Рассмотрим смешанную задачу для трансверсально изотропного полупространства $z\geqslant 0$ со следующими условиями на границе:

$$w=w(\rho,\varphi),\quad u_x=u_x(\rho,\varphi),\quad u_y=u_y(\rho,\varphi)\qquad(\rho\leqslant a)$$
$$\sigma_z=\sigma(\rho,\varphi),\quad \tau_{zx}=\tau_{zx}(\rho,\varphi),\quad \tau_{yz}=\tau_{yz}(\rho,\varphi)\qquad(\rho,\varphi)$$

Введем комплексные касательные напряжения $\tau=\tau_{zx}+i\tau_{yz}$ и касательные перемещения $u=u_x+iu_y$. Пусть заданные и искомые функции разложимы в ряд Фурье по угловой координате. Тогда, используя методику работы [3], сведем задачу определения напряжений внутри круга $\rho\leqslant a$ к системе интегральных уравнений

(1.1)

$$\frac{2}{\rho^{n+1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(\rho^2-x^2)}}\int_x^a \frac{G_1x^2\tau_{n+1}(s)+G_2[2n\rho^2-(2n+1)x^2]\bar\tau_{-n+1}(s)}{s^n\sqrt{(s^2-x^2)}}ds-$$
$$-\frac{2}{\rho^{n+1}}\pi H\alpha\int_0^\rho \sigma_n(x)x^{n+1}dx=F_{n+1}(\rho)\qquad(n\geqslant 0)$$

$$\frac{2}{\rho^{n-1}}\int_0^\rho \frac{x^{2n-2}dx}{\sqrt{(\rho^2-x^2)}}\int_x^a \frac{G_1s^2\tau_{-n+1}(s)+G_2[(2n-1)s^2-2nx^2]\bar\tau_{n+1}(s)}{s^n\sqrt{(s^2-x^2)}}ds+$$
$$+2\pi H\alpha\rho^{n-1}\int_\rho^a \sigma_{-n}(x)x^{-n+1}dx=F_{-n+1}(\rho)$$

$$2\pi H\alpha\,\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{-in\varphi}}{\rho^n}\int_0^\rho \tau_{-n+1}(x)x^n\,dx-e^{in\varphi}\rho^n\int_\rho^a\frac{\tau_{n+1}(x)}{x^n}dx\right\}+$$
$$+\frac{4H}{\rho^n}\int_0^\rho\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\int_x^a\frac{\sigma_{-n}(s)e^{-in\varphi}+\sigma_n(s)e^{in\varphi}}{s^{n-1}\sqrt{s^2-x^2}}ds=\mathrm{Re}\{e^{in\varphi}\Phi_n(\rho)\}$$

$$F_{n+1}(\rho)=u_{n+1}(\rho)-2\rho^{n+1}\int_a^\infty\frac{dx}{x^{2n+2}\sqrt{x^2-\rho^2}}\times$$

$$\times \int_a^x \frac{G_1 s^2 \tau_{n+1}(s) + G_2[2nx^2-(2n+1)s^2]\bar\tau_{-n+1}(s)}{\sqrt{x^2-s^2}} s^n\, ds$$

$$F_{-n+1}(\rho) = u_{-n+1}(\rho) - 2\pi H\alpha\rho^{n-1}\int_a^\infty \sigma_{-n}(x)\, x^{-n+1}\, dx -$$

$$-2\rho^{n-1}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-\rho^2}}\int_a^x \frac{G_1 x^2 \tau_{-n+1}(s) + G_2[(2n-1)x^2-2n\rho^2]\bar\tau_{n+1}(s)}{\sqrt{x^2-s^2}} s^n\, ds$$

$$\operatorname{Re}\{\Phi_n(\rho)e^{in\varphi}\} = w_n(\rho)e^{in\varphi} + w_{-n}(\rho)e^{-in\varphi} + 2\pi H\alpha \operatorname{Re}\left\{e^{in\varphi}\rho^n \int_a^\infty \tau_{n+1}(x)\, x^{-n}\, dx\right\} -$$

$$-4H\rho^n \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-\rho^2}}\int_a^x \frac{\sigma_n(s)e^{in\varphi} + \sigma_{-n}(s)e^{-in\varphi}}{\sqrt{x^2-s^2}} s^{n+1}\, ds$$

$$G_1 = \beta + \gamma_1\gamma_2 H, \qquad G_2 = \beta - \gamma_1\gamma_2 H$$

Постоянные α, β, γ_1, γ_2, H определяются упругими характеристиками материала полупространства [3]. Величины u_k, σ_k, τ_k — коэффициенты разложения соответствующих функций в ряд Фурье. По условию задачи комплексные функции F_k и Φ_k известны. Случай осевой симметрии соответствует $n=0$. Осесимметричная задача подробно исследована в работе [4].

2. При решении системы (1.1) будем считать первые два уравнения однородными. Это можно сделать, добавив к величинам τ_{n+1} и τ_{-n+1} некоторые специальные решения, удовлетворяющие правым частям первых двух уравнений. Эти специальные решения определяются по формулам работы [5].

Решение системы (1.1), первые два уравнения которой полагаем приведенными к однородному виду, будем искать в следующей форме:

$$\sigma_n(s) = \bar\sigma_{-n}(s) = \frac{1}{s^n}\int_0^s \frac{t^{2n-1}\, df_n(t)}{\sqrt{s^2-t^2}} \tag{2.1}$$

$$\tau_{-n+1}(s) = -Cs^{n-2}\frac{d}{ds}\int_s^a \frac{t\bar f_n(t)\, dt}{\sqrt{t^2-s^2}} + \frac{\bar D_n s^{n-1}}{\sqrt{a^2-s^2}}$$

$$\tau_{n+1}(s) = Cs^n \frac{d}{ds}\frac{1}{s^{2n}}\int_s^a z^{2n-2}\, dz \frac{d}{dz}\int_z^a \frac{tf_n(t)\, dt}{\sqrt{t^2-z^2}} +$$

$$+D_n s^n \frac{d}{ds}\frac{1}{s^{2n}}\int_s \frac{z^{2n-1}\, dz}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

Здесь $f_n(t)$ — неизвестная пока комплексная функция напряжений, C и D_n — подлежащие определению константы. Подстановка выражений (2.1) в первые два уравнения (1.1) удовлетворяет им тождественно, если выполняются следующие соотношения:

$$C=\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2},\quad D_n=\frac{(2n-1)\alpha}{\gamma_1\gamma_2 a^{2n-1}}\int\limits_0^a t^{2n-2}f_n(t)\,dt \tag{2.2}$$

$$(G_1+G_2)\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n-{}^1/_2)}{2\Gamma(n)}D_n+\frac{2H\alpha}{a^{2n-2}}\int\limits_0^a\frac{x^{2n-2}f_n(x)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\qquad (n\geqslant 1)$$

При подстановке первой формулы (2.1) в третье из уравнений (1.1) возникает необходимость следующего преобразования:

$$\int\limits_x^a\frac{ds}{s^{2n-1}\sqrt{s^2-x^2}}\int\limits_0^s\frac{t^{2n-1}\,df_n(t)}{\sqrt{s^2-t^2}}=\int\limits_0^a\Big[\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-t^2}\,Q_n(x,t)+$$

$$+\psi_n(x,t)\ln\frac{a\sqrt{|t^2-x^2|}}{|t\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{a^2-t^2}|}\Big]t^{2n-1}\,df_n(t)$$

Здесь $Q_n(x, t)$ — полином по отрицательным четным степеням x и t, коэффициенты которого легко определяются [6]

$$\psi_n(x,t)=\frac{1}{\pi t x^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k-{}^1/_2)\,\Gamma(k+{}^1/_2)}{\Gamma(n-k)\,\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{t}\right)^{2k}$$

Умножим обе части третьего из уравнений (1.1) на ρ^n, продифференцируем по ρ, результат разделим на $\rho^{2n-2}\,(r^2-\rho^2)^{1/2}$ и проинтегрируем по ρ в пределах от 0 до r. Описанные процедуры позволяют, используя известные свойства гипергеометрических функций [6], разделить ядро интегрального уравнения на сингулярную и вырожденную части. В итоге получим следующее интегральное уравнение для определения функции напряжений f_n:

$$\sqrt{a^2-r^2}\int\limits_0^a\frac{f_n(t)\,dt}{(t^2-r^2)\sqrt{a^2-t^2}}-\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\int\limits_0^a\frac{f_n(t)\,dt}{t^2-r^2}=\chi_n(r) \tag{2.3}$$

$$\chi_n(r)=\frac{1}{4\pi H r}\int\limits_0^r\frac{d\rho}{\rho^{2n-2}\sqrt{r^2-\rho^2}}\frac{d}{d\rho}[\rho^n\Phi_n(\rho)]-\frac{2}{\pi r}\int\limits_0^r\frac{d\rho}{\rho^{2n-2}\sqrt{r^2-\rho^2}}\frac{d}{d\rho}\times$$

$$\times\int\limits_0^\rho\frac{x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{\rho^2-x^2}}dx\int\limits_0^a\sqrt{a^2-t^2}\,Q_n(x,t)\,t^{2n-1}\,df_n(t)-\frac{2}{\pi^{3/2}r}\int\limits_0^r\frac{d\rho}{\rho^{2n-3}\sqrt{r^2-\rho^2}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\rho\frac{dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}\sqrt{a^2-x^2}}\int\limits_0^a R_n(\rho,x,t)\sqrt{a^2-t^2}\,t^{2n-3}\,df_n(t)$$

$$R_n(\rho,x,t)=\sum_{l=0}^{n-2}\frac{\Gamma(n-l-{}^1/_2)}{\Gamma(n-l)}\left(\frac{\rho}{t}\right)^{2l}F\left(2-n+l,\frac{1}{2};\frac{3}{2}-n+l;\frac{x^2}{t^2}\right)$$

Заметим, что интегралы по x и ρ, соответствующие вырожденной части ядра, вычисляются для любого n в элементарных функциях. Точное решение интегрального уравнения (2.3) дано в работе [4]. Оно имеет вид

$$f_n(t) = -\frac{4\,\mathrm{ch}^2\pi\theta}{\pi^2}t[Y_c(t)X_n^c(t)+Y_s(t)X_n^s(t)]+A_nY_c(t) \tag{2.4}$$

$$Y_{c,s}(t)=\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left[\theta\ln\frac{a+t}{a-t}\right],\qquad \theta=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arth}\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}$$

$$X_n^{c,s}(t)=\int_0^a\frac{\chi_n(r)}{r^2-t^2}\begin{Bmatrix}tY_c(r)\\ rY_s(r)\end{Bmatrix}dr$$

A_n — произвольная постоянная.

Величины постоянных A_n, D_n, а также постоянных, обусловленных вырожденной частью ядра, определяются из системы линейных алгебраических уравнений, к которой присоединяются условия (2.2). Порядок системы увеличивается с ростом n. Таким образом, поставленная задача полностью решена.

3. В качестве примера рассмотрим действие нормальной сосредоточенной силы P на границу полупространства вне сцепленного с ним плоского кругового штампа. Пусть расстояние от точки приложения силы до центра штампа равно b $(b>a)$. К штампу приложена система сил, обеспечивающая его неподвижность. Определим напряжения под штампом.

Краевые условия задачи имеют вид

$$u=w=0\quad(\rho\leqslant a),\qquad \sigma=P\delta(\rho-b)\delta(\varphi-0),\quad \tau=0\quad(\rho>a) \tag{3.1}$$

Используя полученные результаты, будем иметь

$$F_{n+1}=0\quad(n\geqslant0),\qquad F_{-n+1}(\rho)=-PH\alpha\rho^{n-1}/b^n\quad(n\geqslant1) \tag{3.2}$$

$$\Phi_n(\rho)=-\frac{4}{\pi}\frac{HP}{(\rho b)^n}\int_0^\rho\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}\sqrt{b^2+x^2}}$$

Далее приведены результаты вычисления напряжений для отдельных гармоник.

Для $n=0$ получим [4]

$$\sigma_0(\rho)=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\int_0^\rho\frac{f_0(t)\,t\,dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}},\qquad \tau_1(\rho)=-\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^a\frac{f_0(t)\,dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \tag{3.3}$$

$$f_0(t)=\frac{2P\,\mathrm{ch}^2\pi\theta}{\pi^3}\left[tY_c(t)\int_0^a\frac{Y_c(r)\,dr}{\sqrt{b^2-r^2}(r^2-t^2)}+Y_s(t)\int_0^a\frac{rY_s(r)\,dr}{\sqrt{b^2-r^2}(r^2-t^2)}\right]$$

Для $n=1$ будем иметь

$$\sigma_1(\rho)=\frac{1}{\rho}\int_0^\rho\frac{t\,df_1(t)}{\sqrt{\rho^2-t^2}}=\frac{d}{d\rho}\int_0^\rho\frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}} \tag{3.4}$$

$$\tau_0(\rho)=-\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^a\frac{tf_1(t)\,dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}+\frac{D_1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

$$\tau_2(\rho)=-\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\rho\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}\int_\rho^a\frac{tf_1(t)\,dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right]-D_1\frac{2a^2-\rho^2}{\rho^2\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

$$f_1(t)=\frac{t}{b}f_0(t)+A_1Y_c(t)$$

$$D_1=-\frac{P\theta}{\pi b\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\pi\theta}{\pi a\theta}Z_s\right)\left(1+\frac{\pi\theta}{\operatorname{th}\pi\theta}\frac{\beta}{\gamma_1\gamma_2H}\right)^{-1}$$

$$A_1=-\frac{P\operatorname{ch}^2\pi\theta}{\pi^3b}\left(\frac{Z_s}{a\theta}-2Z_c\right)+\frac{\operatorname{ch}\pi\theta}{\pi\theta}D_1\sqrt{\gamma_1\gamma_2}$$

$$Z_{c,s}=\int_0^a\frac{1}{\sqrt{b^2-r^2}}\left\{\begin{matrix}Y_c(r)\\ rY_s(r)\end{matrix}\right\}dr$$

Для второй гармоники решение имеет вид

$$\sigma_2(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho\frac{t^3\,df_2(t)}{\sqrt{\rho^2-t^2}}=\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{d\rho}\int_0^\rho\frac{4t^2-3\rho^2}{\sqrt{\rho^2-t^2}}t^2f_2(t)\,dt \tag{3.5}$$

$$\tau_{-1}(\rho)=\frac{d}{d\rho}\left[-\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int_\rho^a\frac{tf_2(t)\,dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}-D_2\sqrt{a^2-\rho^2}\right]$$

$$\tau_3(\rho)=\rho^2\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho^4}\left[\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int_\rho\frac{\rho^2-2t^2}{\sqrt{t^2-\rho^2}}tf_2(t)\,dt+D_2\sqrt{a^2-\rho^2}\,\frac{2a^2+\rho^2}{3}\right]$$

$$f_2(t)=-\frac{4\operatorname{ch}^2\pi\theta}{\pi^2}t[Y_c(t)X_2^c(t)+Y_s(t)X_2^s(t)]+A_2Y_c(t)+$$

$$+\frac{2\operatorname{cth}\pi\theta}{\pi a}\left[\frac{2\theta}{a}Y_c(t)-\frac{Y_s(t)}{t}\right]B_2$$

Постоянная B_2 соответствует вырожденной части ядра

$$B_2=\int_0^a\frac{2t^2-a^2}{\sqrt{a^2-t^2}}f_2(t)\,dt$$

Произвольные постоянные определяются по формулам

$$D_2=\frac{3\alpha}{\gamma_1\gamma_2a^3}\left[L_1+A_2\frac{\pi a^3\theta}{\operatorname{sh}\pi\theta}\frac{1-2\theta^2}{3}-\frac{2a\theta^2\operatorname{ch}\pi\theta}{\operatorname{sh}^2\pi\theta}\frac{1+4\theta^2}{3}B_2\right]$$

$$A_2=\frac{\operatorname{ch}\pi\theta}{2\pi a^2\theta^2}\left[L_3-\frac{4\theta}{\operatorname{sh}\pi\theta}(1+2\theta^2)B_2\right]$$

$$B_2=\left[2\theta^2\left(\frac{P}{2\pi}\frac{a^2}{b^2}+L_2+\frac{3\pi}{4}\frac{\beta}{\gamma_1\gamma_2H}\frac{L_1}{a}\right)+L_3k\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{\theta}{\operatorname{sh}\pi\theta}\left[1+\frac{\beta}{\gamma_1\gamma_2H}\frac{\pi\theta}{\operatorname{th}\pi\theta}(1+\theta^2)\right]\right\}^{-1}$$

$$k=\frac{1}{4}-\theta^2+\frac{\beta}{\gamma_1\gamma_2H}\left(\frac{1}{4}-\frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$L_1=\frac{2\,\mathrm{ch}^2\pi\theta}{\pi\,\mathrm{sh}\,\pi\theta}\int_0^a\left[2a\theta\left(r^2+a^2\frac{1-2\theta^2}{3}\right)Y_c(r)+r(2a^2\theta^2-r^2)\,Y_s(r)\right]\chi_2(r)\,dr$$

$$L_2=\frac{4\,\mathrm{ch}\,\pi\theta}{\pi}\int_0^a\left\{\left[a^2\left(\frac{1}{4}-\theta^2\right)+\frac{r^2}{2}\right]Y_c(r)+a\theta rY_s(r)\right\}\chi_2(r)\,dr$$

$$L_3=\frac{4\,\mathrm{ch}\,\pi\theta}{\pi}\int_0^a[(r^2-2a^2\theta^2)\,Y_c(r)+2a\theta rY_s(r)]\chi_2(r)\,dr$$

$$\chi_2(r)=-\frac{P}{2\pi b^2}\left[\frac{1}{\sqrt{b^2-r^2}}+\frac{1}{b+\sqrt{b^2-r^2}}\right]$$

Система сил, приложенных к штампу и обеспечивающих его неподвижность, статически эквивалентна нормальной силе N, касательной силе T, направленной противоположно оси Ox и опрокидывающему относительно оси Oy моменту M. Все эти величины весьма просто выражаются через введенные функции напряжений

$$T=2\pi\int_0^a\tau_0(\rho)\,\rho\,d\rho=2\pi\left[\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int_0^a f_1(t)\,dt+D_1a\right]$$

$$N=2\pi\int_0^a\sigma_0(\rho)\,\rho\,d\rho=2\pi\int_0^a\frac{tf_0(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

$$M=-\int_0^a\int_0^{2\pi}[\sigma_1(\rho)e^{i\varphi}+\sigma_{-1}(\rho)e^{-i\varphi}]\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi=2\pi\int_0^a\frac{a^2-2t^2}{\sqrt{a^2-t^2}}f_1(t)\,dt$$

После упрощений получим

$$T=4\pi D_1a,\qquad N=-\frac{2P}{\pi}\,\mathrm{ch}\,\pi\theta\int_0^a\frac{Y_c(r)\,dr}{\sqrt{b^2-r^2}} \tag{3.6}$$

$$M=\frac{4P}{\pi b}\,\mathrm{ch}\,\pi\theta\int_0^a\frac{r^2Y_c(r)\,dr}{\sqrt{b^2-r^2}}+4\pi a^2\theta\sqrt{\gamma_1\gamma_2}\,D_1$$

Если же на штамп никакие силы не действуют, то он получит касательное, нормальное и угловое перемещения, величины которых определятся путем сопоставления формул (3.6) с результатами работ [3, 4]. Касательное и нормальное напряжения под центром штампа полностью определяются величинами τ_0 и σ_0, так как все остальные гармоники обращаются в нуль при $\rho=0$.

После некоторых упрощений можно получить

$$\tau(0)=\frac{P}{2\pi b^2}\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\left[1-\frac{2}{\pi}\,b\,\mathrm{cth}\,\pi\theta\int_0^a\frac{Y_s(x)\,dx}{x\sqrt{b^2-x^2}}\right]+\frac{D_1}{a}+\frac{\pi\theta A_1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}$$

$$\sigma(0)=\frac{P\,\mathrm{ch}^2\pi\theta}{\pi^2ab}\left[-\frac{\pi\theta}{\mathrm{sh}\,\pi\theta}+\int\limits_0^a\frac{aY_c(x)+2\theta xY_s(x)}{(b+\sqrt{b^2-x^2})\sqrt{b^2-x^2}}dx\right]$$

В случае $\alpha\to0$ получаются результаты, аналогичные известным

$$\tau_n=0,\qquad \sigma_n(\rho)=-\frac{P}{\pi^2}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-\rho^2}(b^2-\rho^2)}\left(\frac{\rho}{b}\right)^n$$

Для изотропного тела последние уравнения имеют место при коэффициенте Пуассона, равном $^1/_2$.

Поступила 10 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моссаковский В. И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.– Л., Изд-во АН СССР, 1963.
3. *Фабрикант В. И.* Действие сдвигающей силы и опрокидывающего момента на цилиндрический штамп, сцепленный с трансверсально изотропным полупространством. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
4. *Фабрикант В. И.* Осесимметричная задача о штампе, сцепленном с трансверсально изотропным полупространством. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6.
5. *Фабрикант В. И.* Об одной неосесимметричной смешанной задаче для трансверсально изотропного полупространства. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 3.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.