

МЕТОД «ВОЗМУЩЕНИЯ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ»
В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Ю. Н. НЕМИШ

(Киев)

Предложенный в работе [1] вариант метода «возмущения формы границы» позволил решить единым методом широкие классы граничных задач механики сплошных сред для неканонических областей [2]. Однако те математические осложнения, которые возникают при разложении соответствующих функций в ряды по малому параметру, характеризующему отклонение рассматриваемого контура от кругового, не позволяли для произвольного достаточно гладкого контура найти необходимые дифференциальные операторы выше второго приближения.

Указанные трудности удалось преодолеть в предлагаемой статье, где построены дифференциальные операторы для произвольного приближения, особо не ограничивая при этом вид отображающей функции. Это позволяет решать краевые задачи механики сплошных сред для неканонических областей с требуемой для инженерной практики точностью.

Рассматриваются классы пространственных краевых задач механики деформируемых тел, ограниченных некруговыми цилиндрическими или близкими к сферическим поверхностями, которые допускают решение предлагаемым способом.

Эффективность метода иллюстрируется на задаче Ляме для полого эллипсоида вращения, допускающей точное решение.

1. Математические основы метода возмущения формы границы. Рассмотрим в некоторой плоскости трехмерного евклидова пространства произвольный достаточно гладкий контур Γ , которому соответствует функция

$$(1.1) \quad r_0^{-1} \omega(\xi) = \xi + \varepsilon f(\xi) = v r^{i\theta}, \quad (\xi = \rho e^{i\varphi}, |\varepsilon| \ll 1)$$

конформно отображающая внешность $|\xi| \geq 1$ (внутренность $|\xi| \leq 1$) единичной окружности $\rho=1$ на внешность (внутренность) кривой Γ . При этом функция $f(\xi)$ и малый параметр ε характеризуют форму контура Γ , а постоянная r_0 (в общем случае комплексная) определяет его абсолютные размеры и ориентацию по отношению к выбранной системе координат. Для однозначности конформного отображения необходимо, чтобы корни уравнения $1 + \varepsilon f'(\xi) = 0$ лежали внутри окружности единичного радиуса ($\rho=1$) в плоскости ξ .

В трехмерном пространстве контур Γ характеризует класс некруговых цилиндрических поверхностей с направляющей Γ (фиг. 1), или же класс близких к сферическим поверхностей, образованных вращением кривой Γ вокруг оси симметрии oz (фиг. 2).

На основании соотношений (1.1) легко записать связь между безразмерными (отнесенными к величине r_0) декартовыми x, y, z , цилиндрическими r, θ, z , сферическими r, θ, α и криволинейными ортогональными ρ, γ, ξ или ρ, γ, φ координатами. Принятые здесь обозначения систем координат дают возможность вести математическое описание метода одновременно для двух классов поверхностей. Следовательно, координаты r, θ (цилиндрические или сферические), согласно (1.1), можно представить в виде рядов по степеням малого параметра ε

$$r(\rho, \gamma, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n r}{\partial \varepsilon^n} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad \theta(\rho, \gamma, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \theta}{\partial \varepsilon^n} \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\frac{\partial^n r}{\partial \varepsilon^n} \Big|_{\varepsilon=0} = -n! \rho \sum_{\substack{k=1 \\ (k+m=n)}}^{\leq n} \sum_{m=0}^k \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} A_{k,m}$$

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial \varepsilon^n} \Big|_{\varepsilon=0} = (n-1)! \operatorname{Im} \left[\frac{f(\xi)}{\xi} \right] \sum_{\substack{k=0 \\ (k+m=n)}}^{\leq n-1} \sum_{m=0}^k A_{k,m}$$

$$A_{k,m} = (-1)^k \frac{k!}{m!(k-m)!} \left[\frac{f(\xi)}{\xi} + \overline{\frac{f(\xi)}{\xi}} \right]^{k-m} \left[\frac{f(\xi)}{\xi} \overline{\frac{f(\xi)}{\xi}} \right]^m$$

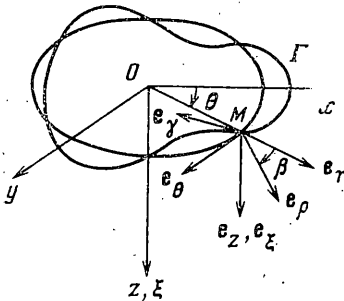
(0! = 0!! = (-1)!! = 1)

Пусть произвольная непрерывная функция $F[r(\rho, \gamma, \varepsilon), \theta(\rho, \gamma, \varepsilon)]$ допускает представление степенным рядом Маклорена

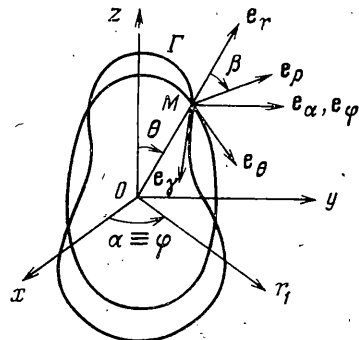
$$(1.2) \quad F(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{1}{n!} L^{(n)} F(\rho, \gamma)$$

$$L^{(n)} F(\rho, \gamma) = \frac{\partial^n F(r, \theta)}{\partial \varepsilon^n} \Big|_{\varepsilon=0} = R_n|_{\varepsilon=0} F(\rho, \gamma)$$

Здесь $F(\rho, \gamma)$ — произвольная непрерывная функция, получающаяся из $F(r, \theta)$ формальной заменой переменных r, θ соответственно на ρ, γ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Дифференциальные операторы R_n определяются по рекуррентной формуле $R_n = \partial R_{n-1} / \partial \varepsilon + R_1 R_{n-1}$ ($n \geq 1$) и расшифровываются на основании равенств

$$R_0 \equiv 1, \quad R_1 = D_1, \quad D_n = \frac{\partial D_{n-1}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon^n} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon^n} \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

Следовательно, каждый оператор $L^{(n)}$, входящий в соотношение (1.2), представляет собой некоторую комбинацию дифференциальных операторов D_1, D_2, \dots, D_n , например, $L^{(3)} = (D_1^3 + 3D_1 D_2 + D_3)_{\varepsilon=0}$.

Многие геометрические объекты, а также целый ряд физических свойств сплошных сред характеризуются в основном тензорными, вектор-

ными и скалярными величинами. В связи с этим рассмотрим формулы преобразования компонентов некоторого симметричного тензора второго ранга τ , вектора v и скалярной функции T при переходе от ортогональных координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ к новым осям $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$.

$$(1.3) \quad \tau_{i'j'} = \sum_{k=1}^3 \sum_{s=1}^3 \lambda_{i'k} \lambda_{j's} \tau_{ks}, \quad v_{j'} = \sum_{k=1}^3 \lambda_{j'k} v_k, \quad T' = T$$

где $\lambda_{j'k} = \cos(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_k)$ — направляющие косинусы.

Фигурирующие здесь системы координат приведем в следующее соответствие: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \sim r, \theta, z$ (фиг. 1) или r, θ, α (фиг. 2) и $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3' \sim \rho, \gamma, \xi$ или ρ, γ, φ . Тогда новая система координат $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ образуется из старой $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ поворотом около орта $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\xi$ (или вокруг орта $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\varphi$) на угол β между радиальным направлением и нормалью в точке M к контуру Γ . В этом случае $\lambda_{j'k} = \lambda_{j'k}(\beta)$ и соотношения (1.3) будут содержать тригонометрические функции одинарного или двойного угла β . Следовательно, необходимо представить в виде рядов по степеням параметра ε экспоненты.

$$(1.4) \quad e^{i\beta} = \frac{\xi \omega'(\xi) \overline{\omega(\xi)}}{|\xi| |\omega'(\xi)| |\overline{\omega(\xi)}|} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j Q_j(\xi), \quad e^{n i \beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j q_j(\xi)$$

Однако отыскание коэффициентов $Q_j(\xi)$ для произвольной отображающей функции (1.1) представляет собой достаточно трудоемкий процесс. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные их выражения

$$Q_j(\xi) = \sum_{k=0}^j \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n \sum_{s=0}^m N_{k,n,m,s}(\xi)$$

($k+n+m+s=j$)

$$N_{k,n,m,s} = \Omega_{k,n,m,s} + \left(f' + \frac{\bar{f}}{\xi} \right) \Omega_{k,n,m,s-1} + f' \frac{\bar{f}}{\xi} \Omega_{k,n,m,s-2}$$

$$\Omega_{k,n,m,s} = (-1)^k \frac{k!(2k-1)!!}{(k-n)!(n-m)!(m-s)!s!(2k)!!} \times$$

$$\times (a+c)^{k-n} (b+ac+d)^{n-m} (bc+ad)^{m-s} (bd)^s$$

$$a = f'(\xi) + \overline{f'(\xi)}, \quad b = f'(\xi) \overline{f'(\xi)}, \quad c = \frac{f(\xi)}{\xi} + \frac{\overline{f(\xi)}}{\xi}, \quad d = \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{\overline{f(\xi)}}{\xi}$$

Коэффициенты $q_j(\xi)$ определяются через $Q_j(\xi)$ из рекуррентных формул

$$q_0 = Q_0^n, \quad q_j = \frac{1}{j Q_0} \sum_{k=1}^j (kn-j+k) Q_k q_{j-k} \quad (j \geq 1)$$

Замечание. При решении некоторых краевых задач механики деформируемых сред используются производные по нормали n и касательной s , которые в рассматриваемом случае будут

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{W(\xi, \varepsilon)}{r_0} \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{W(\xi, \varepsilon)}{r_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

$$W(\xi, \varepsilon) = (1 + \varepsilon a + \varepsilon^2 b)^{-1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j W_j(\xi)$$

$$W_j(\xi) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k+m=j)}}^{\leq j} \sum_{m=0}^k (-1)^k \frac{k!(2k-1)!!}{m!(k-m)!(2k)!!} a^{k-m} b^m$$

Левые части соотношений (1.3) и направляющие косинусы представим в виде

$$(1.5) \quad \{\tau_{i'j'}, \nu_{j'}, T', \lambda_{j'h}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \{\tau_{i'j'}^{(n)}, \nu_{j'}^{(n)}, T'^{(n)}, \lambda_{j'h}^{(n)}\}$$

а величины τ_{hs} , ν_h , T , как сложные функции от криволинейных ортогональных координат и параметра ε , — согласно разложениям (1.2), (1.5), т. е.

$$(1.6) \quad \{\tau_{hs}, \nu_h, T\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{m+n} \frac{1}{n!} L^{(n)} \{\tau_{hs}^{(m)}, \nu_h^{(m)}, T^{(m)}\}$$

Из формулы (1.3) на основании функциональных рядов (1.4)–(1.6) для определения компонентов n -го приближения получаем следующие рекуррентные соотношения:

для компонентов тензора второго ранга

$$(1.7) \quad \begin{pmatrix} \tau_{1'1'}^{(n)} \\ \tau_{2'2'}^{(n)} \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^n \left[\Lambda_1^{(n-m)} \begin{pmatrix} \tau_{11}^{(m)} \\ \tau_{22}^{(m)} \end{pmatrix} \pm \Lambda_2^{(n-m)} (\tau_{22}^{(m)} - \tau_{11}^{(m)}) \pm \Lambda_3^{(n-m)} \tau_{12}^{(m)} \right]$$

$$\tau_{1'2'}^{(n)} = \sum_{m=0}^n \left[\Lambda_4^{(n-m)} \tau_{12}^{(m)} + \frac{1}{2} \Lambda_3^{(n-m)} (\tau_{22}^{(m)} - \tau_{11}^{(m)}) \right]$$

для составляющих вектора

$$(1.8) \quad \begin{pmatrix} \nu_{1'}^{(n)} \\ \nu_{2'}^{(n)} \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^n \left[\Lambda_5^{(n-m)} \begin{pmatrix} \nu_1^{(m)} \\ \nu_2^{(m)} \end{pmatrix} \pm \Lambda_6^{(n-m)} \begin{pmatrix} \nu_2^{(m)} \\ \nu_1^{(m)} \end{pmatrix} \right]$$

для скалярной функции

$$(1.9) \quad T'^{(n)} = \sum_{m=0}^n \Lambda_1^{(n-m)} T^{(m)}$$

для производных от скалярной функции

$$(1.10) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \rho} T \right)^{(n)} = \sum_{m=0}^n \left[\Lambda_5^{(n-m)} \frac{\partial}{\partial \rho} + \Lambda_6^{(n-m)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] T^{(m)}$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} T \right)^{(n)} = \sum_{m=0}^n \left[\Lambda_5^{(n-m)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} - \Lambda_6^{(n-m)} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] T^{(m)}$$

Здесь $\Lambda_f^{(m)}$ — дифференциальные операторы

$$(1.11) \quad \Lambda_1^{(n)} = \frac{1}{n!} L^{(n)}, \quad \Lambda_2^{(n)} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} q_k \frac{L^{(n-k)}}{(n-k)!}$$

$$\Lambda_3^{(n)} = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} q_k \frac{L^{(n-k)}}{(n-k)!}, \quad \Lambda_4^{(n)} = \Lambda_1^{(n)} - 2\Lambda_2^{(n)}$$

$$\Lambda_5^{(n)} = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} Q_k \frac{L^{(n-k)}}{(n-k)!}, \quad \Lambda_6^{(n)} = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im} Q_k \frac{L^{(n-k)}}{(n-k)!}$$

В направлении α_3 , составляющие тензора и вектора при переходе к новым осям α_1' , α_2' , α_3' будут изменяться как скалярная функция (фиг. 1. 2). Следовательно, компоненты $\tau_{1'3'}^{(n)}$, $\tau_{2'3'}^{(n)}$ и $\tau_{3'3'}^{(n)}$, $v_{3'}^{(n)}$ определяются соответственно по формулам (1.8), (1.9).

В правых частях рекуррентных соотношений (1.7)–(1.10), согласно (1.2), (1.6), все величины являются функциями от новых координат

$$(1.12) \quad \tau_{hs}^{(m)} = \tau_{hs}^{(m)}(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'), \quad v_h^{(m)} = v_h^{(m)}(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$$

$$T^{(m)} = T^{(m)}(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$$

т. е. они получены формальной заменой своих координат α_1 , α_2 , α_3 соответственно на α_1' , α_2' , α_3' , а всю ответственность за изменения тензорных, векторных и скалярных величин при переходе к новой криволинейной ортогональной системе координат α_1' , α_2' , α_3' взяли на себя дифференциальные операторы $\Lambda_f^{(m)}$ (1.11).

Замечание. Указанная характеристика изложенного метода играет важную роль при решении краевых задач механики деформируемых сред, так как позволяет использовать известные уравнения и функции в сферических и цилиндрических координатах для непосредственной записи соответствующих уравнений и функций для произвольного приближения в криволинейных ортогональных координатах α_j и тем самым удается избежать математических усложнений, связанных с отысканием частных решений. Так, например, если в системе координат α_j поставленная задача сводится к отысканию функций Φ_s ($s=1, 2, \dots, m$) из системы уравнений

$D_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^{(k,s)} \Phi_s(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ ($k, s=1, 2, \dots, m$); то в конечном итоге для n -го приближения получаем такую же по виду систему уравнений, где формально заменены координаты α_j на α_j' , т. е.

$$(1.13) \quad D_{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'}^{(k,s)} \Phi_s^{(n)}(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = 0 \quad (k, s=1, 2, \dots, m)$$

причем $D_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^{(k,s)}$ и $D_{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'}^{(k,s)}$ — дифференциальные операторы одинаковой аналитической структуры относительно своих переменных соответственно α_j и α_j' .

2. Некоторые классы пространственных задач для деформируемых сред, ограниченных неканоническими поверхностями. Изложенные в п. 1 результаты могут быть без принципиальных изменений применены к решению достаточно широких классов задач статики и динамики механики сплошной среды для неканонических (не допускающих решения краевых задач методом непосредственного разделения переменных) односвязных и многосвязных областей. Для этого достаточно установить соответствие между искомыми физико-механическими характеристиками и приведенными в (1.3) тензорными, векторными или скалярными величинами. К таким классам краевых задач относятся статические и динамические задачи о распределении напряжений около неканонических полостей и включений, задачи о напряженном состоянии толстостенных некруговых цилиндрических или близких к сфериче-

ским оболочек, задачи о концентрации напряжений около криволинейных отверстий в тонких упругих оболочках, плоские динамические задачи классической теории упругости, плоские статические и динамические задачи моментной теории упругости, задачи изгиба пластин с некруговыми отверстиями по различным уточненным теориям и др.

Обзор исследований до 1969 г. по этой проблеме показывает [2], что несмотря на многочисленные работы, с точки зрения математического развития этого варианта метода «возмущения формы границы», не удалось принципиально продвинуться по сравнению с первыми работами, так как для отображающей функции (1.1) построены соответствующие дифференциальные операторы (1.11) не выше второго приближения.

Первыми работами, где рассматриваемый вариант метода возмущения формы границы [1] распространен на пространственные задачи, являются статьи [3, 4]. Впоследствии этот метод получил некоторое развитие в работах [5-8], однако не удавалось построить необходимые дифференциальные операторы в общем виде. С этой точки зрения полученные в п. 1 результаты придают изложенному методу законченный математический вид.

Заметим, что в работах [9, 10] предложен другой вариант метода возмущения формы границы, когда поправки входят как в граничные условия, так и в уравнения равновесия.

Рассмотрим некоторые классы пространственных задач механики деформируемых сред, допускающих решение изложенным методом. Для этого величинам τ_{ij} , ν_j в формулах (1.3) придадим физический смысл и поставим в соответствие: τ_{ij} — компоненты тензора напряжений σ_{ml} или деформаций ϵ_{ml} ($m, l = \rho, \gamma, \xi$ или ρ, γ, φ), ν_j — составляющие вектора перемещений u_m .

Отметим, что информация, связанная с геометрией ограничивающей поверхности и содержащаяся в дифференциальных операторах (1.11), передается на искомые механические характеристики через граничные условия, которые в случае равновесия или установившегося движения тела при заданных усилиях F_{mp} или перемещениях U_m в n -м приближении соответственно будет

$$(2.1) \quad \sigma_{mp}^{(n)}|_{\rho=\text{const}} = F_{mp}^{(n)}, \quad u_m^{(n)}|_{\rho=\text{const}} = U_m^{(n)}$$

Если же рассматриваются тела конечных размеров, ограниченные некруговыми цилиндрическими поверхностями, то к (2.1) необходимо присовокупить соответствующие граничные условия на плоскостях $\xi = \text{const}$.

Краевые задачи механики деформируемых сред обладают некоторыми особенностями в зависимости от выбранной системы координат, что требует их рассмотрения в отдельности.

а) *Деформируемые тела, ограниченные некруговыми цилиндрическими поверхностями.* В случае однородного изотропного упругого тела решение векторного уравнения равновесия, представленное в форме П. Ф. Папковича — Г. Нейбера, имеет вид

$$(2.2) \quad \mathbf{u} = 4(1-\nu)\mathbf{B} - \text{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + B_0)$$

где \mathbf{B} — гармонический вектор, B_0 — гармонический скаляр.

Следовательно, для определения перемещений $u_\rho^{(n)}$, $u_\gamma^{(n)}$, $u_\xi^{(n)}$ согласно (1.12), (1.13) на основании (2.2) получаем

$$(2.3) \quad u_\rho^{(n)} = 4(1-\nu)B_\rho^{(n)} - \frac{\partial \Omega^{(n)}}{\partial \rho}$$

$$u_\gamma^{(n)} = 4(1-\nu)B_\gamma^{(n)} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Omega^{(n)}}{\partial \gamma}, \quad u_\xi^{(n)} = 4(1-\nu)B_\xi^{(n)} - \frac{\partial \Omega^{(n)}}{\partial \xi}$$

$$\Omega^{(n)} = B_0^{(n)} + \rho B_\rho^{(n)} + \xi B_\xi^{(n)}, \quad \begin{pmatrix} B_\rho^{(n)} \\ B_\gamma^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x^{(n)} \\ B_y^{(n)} \end{pmatrix} \cos \gamma \pm \begin{pmatrix} B_y^{(n)} \\ B_x^{(n)} \end{pmatrix} \sin \gamma$$

$(B_0^{(n)}, B_x^{(n)}, B_y^{(n)}, B_\xi^{(n)})$ — трехмерные гармонические функции).

Для трансверсально изотропной среды, используя решения уравнений равновесия в цилиндрических координатах [11], находим

$$\begin{aligned} u_\rho^{(n)} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi_i^{(n)}(\rho, \gamma, \xi_i)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_3^{(n)}(\rho, \gamma, \xi_3)}{\partial \gamma} \\ u_\gamma^{(n)} &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i^{(n)}(\rho, \gamma, \xi_i)}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Phi_3^{(n)}(\rho, \gamma, \xi_3)}{\partial \rho} \\ u_\xi^{(n)} &= \sum_{i=1}^2 k_i \frac{\partial \Phi_i^{(n)}(\rho, \gamma, \xi_i)}{\partial \xi} \quad \left(k_i = k_i(\nu_i), \quad \xi_i = \frac{\xi}{\nu_i} \right) \end{aligned}$$

где $\Phi_i^{(n)}(\rho, \gamma, \xi_i)$ — трехмерные гармонические функции, ν_i — корни соответствующих алгебраических уравнений.

В случае установившегося движения однородных изотропных упругих тел компоненты вектора перемещений в цилиндрических координатах выражаются через три скалярные функции [12]. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} u_\rho^{(n)} &= \frac{\partial \Psi_0^{(n)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_1^{(n)}}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 \Psi_3^{(n)}}{\partial \rho \partial \xi} \\ u_\gamma^{(n)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_0^{(n)}}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Psi_1^{(n)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \gamma \partial \xi} \\ u_\xi^{(n)} &= \frac{\partial \Psi_0^{(n)}}{\partial \xi} + \beta_1^2 \Psi_2^{(n)} + \frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

где функции $\Psi_0^{(n)}, \Psi_1^{(n)}, \Psi_2^{(n)}$ удовлетворяют волновым уравнениям

$$(2.4) \quad \nabla^2 \Psi_0^{(n)} + (r_0 \beta_0)^2 \Psi_0^{(n)} = 0, \quad \nabla^2 \Psi_s^{(n)} + (r_0 \beta_1)^2 \Psi_s^{(n)} = 0$$

(β_0, β_1 — комплексные волновые числа, ∇^2 — оператор Лапласа).

б) *Деформируемые тела, ограниченные близкими к сферическим поверхностями.* В случае изотропного однородного упругого тела выражения для компонентов $u_\rho^{(n)}, u_\gamma^{(n)}, u_\xi^{(n)}$ легко записать на основании векторного представления (2.2) по аналогии с формулами (2.3).

Для трансверсально изотропных тел относительно радиального направления (сферическая изотропия) на основании известных [13] выражений для перемещений в сферических координатах получаем

$$u_\rho^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} k_m \frac{\partial \Phi_m^{(n)}}{\partial \rho}$$

$$u_\gamma^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_{m,\nu}^{(n)}}{\partial \gamma} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\rho \sin \gamma} \frac{\partial \Phi_{m,\lambda}^{(n)}}{\partial \varphi}$$

$$u_\varphi^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\rho \sin \gamma} \frac{\partial \Phi_{m,\nu}^{(n)}}{\partial \varphi} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_{m,\lambda}^{(n)}}{\partial \gamma}$$

$$\Phi_{m,\nu}^{(n)} = \rho^{\nu_m + 1/2} Y_m^{(n)}(\gamma, \varphi), \quad \Phi_{m,\lambda}^{(n)} = \rho^{\lambda_m + 1/2} Y_m^{(n)}(\gamma, \varphi)$$

причем $Y_m^{(n)}(\gamma, \varphi)$ — сферические функции m -го порядка, ν_m, λ_m — корни соответствующих алгебраических уравнений.

Для случая установившихся движений уравнения движения упругого однородного изотропного тела в сферических координатах допускают решение через три скалярные волновые функции [12]. Следовательно

$$u_\rho^{(n)} = \frac{\partial \Psi_0^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho \sin \gamma} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Psi_2^{(n)}$$

$$u_\gamma^{(n)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_0^{(n)}}{\partial \gamma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \gamma} \Psi_2^{(n)} + \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial \Psi_1^{(n)}}{\partial \varphi}$$

$$u_\varphi^{(n)} = \frac{1}{\rho \sin \gamma} \frac{\partial \Psi_0^{(n)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_2^{(n)} - \frac{\partial \Psi_1^{(n)}}{\partial \gamma}$$

где функции $\Psi_0^{(n)}, \Psi_1^{(n)}, \Psi_2^{(n)}$ удовлетворяют волновым уравнениям вида (2.4).

Формулы для компонентов тензора напряжений здесь не приводятся; они могут быть легко получены на основании соответствующих соотношений между напряжениями, деформациями и перемещениями.

Замечание. Возможности изложенного метода не ограничиваются приведенными случаями. Так, например, замена упругих постоянных временными интегральными или дифференциальными операторами на основании известного принципа соответствия дает возможность решать краевые задачи для вязкоупругих тел, ограниченных неканоническими поверхностями. Наконец, применение метода «возмущения формы» границы в сочетании с методом «возмущения упругих свойств», как это предложено в работе [6] для случая физически нелинейных материалов, значительно расширяет класс рассмотренных задач.

3. К вопросу об эффективности метода возмущения формы границы в пространственных задачах теории упругости. В класс поверхности вращения (фиг. 2), близких к сферическим и соответствующих отображающей функции (1.1), входят при $f(\zeta) = \zeta^{-1}$ вытянутые ($\epsilon > 0$) или сжатые ($\epsilon < 0$) эллипсоиды вращения, для которых многие пространственные краевые задачи теории упругости допускают точное решение. Это обстоятельство дает возможность апробировать эффективность изложенного приближенного метода.

С этой целью рассмотрим граничную задачу о напряженном состоянии толстостенной однородной изотропной линейно упругой вытянутой эллипсоидальной оболочки с внутренней $\rho=1$ и внешней $\rho=\rho_0 > 1$ координатными поверхностями, находящейся под внутренним давлением интенсивности p .

На основании изложенного в п. 1, 2 подхода поставленная осесимметричная задача формально сводится к последовательности граничных задач

для толстостенной сферической оболочки с неоднородными граничными условиями

$$(3.1) \quad \sigma_{rr}^{(0)}|_{\rho=1} = -p, \quad \sigma_{rr}^{(0)}|_{\rho=\rho_0} = \sigma_{r\theta}^{(0)}|_{\rho=1, \rho_0} = 0.$$

$$\sigma_{rr}^{(n)}|_{\rho=1, \rho_0} = - \sum_{m=0}^{n-1} [\Lambda_1^{(n-m)} \sigma_{rr}^{(m)} + \Lambda_2^{(n-m)} (\sigma_{\theta\theta}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)}) + \Lambda_3^{(n-m)} \sigma_{r\theta}^{(m)}]_{\rho=1, \rho_0}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(n)}|_{\rho=1, \rho_0} = - \sum_{m=0}^{n-1} \left[\Lambda_4^{(n-m)} \sigma_{r\theta}^{(m)} + \frac{1}{2} \Lambda_3^{(n-m)} (\sigma_{\theta\theta}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)}) \right]_{\rho=1, \rho_0} \quad (n \geq 1)$$

Конкретный вид дифференциальных операторов $\Lambda_i^{(m)}$ получаем на основании формул (1.11), если предварительно определить выражения $Q_j(\xi)$, $q_j(\xi)$ и операторы $L^{(n)}$ для функции $f(\xi) = \xi^{-1}$, например

$$\Lambda_1^{(2)} = \frac{1 + \cos 4\gamma}{4\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\sin 4\gamma}{2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \gamma} \frac{1}{\rho} + \frac{1 - \cos 4\gamma}{4\rho^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$$

Поставленная задача решалась с точностью до слагаемых, содержащих ε^3 , т. е. в граничных условиях (3.1) принималось последовательно $n = 0, 1, 2$. При определении напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ для коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$ эксцентриситета $\varepsilon = 1/9$ и параметра толщины $\rho_0 \geq 1.1$ погрешность приближенных числовых значений составляет 3.6% по сравнению с точными [14]. Заметим, что с увеличением толщины оболочки погрешность изложенного приближенного метода уменьшается и, например, при $\rho_0 \geq 2.0$ не превышает 2%.

Очевидно, что с уменьшением эксцентриситета ε (при тех же других условиях) увеличивается точность изложенного метода. Так, например, при $\varepsilon = 1/11$ максимальная погрешность с учетом нулевого, первого и второго приближений составляет меньше 1,8%. Следует отметить, что хотя в этом случае эллипсоидальная поверхность близка к сферической (отношение полуосей $a/b = (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon) = 6/5$) отклонение точных числовых значений напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ в эллипсоидальной оболочке от соответствующих напряжений в сферической оболочке (т. е. от нулевого приближения для эллипсоидальной), при некоторых значениях ρ_0 и ν может превзойти 50% (за 100% как и выше принимались точные числовые значения напряжений в эллипсоидальной оболочке [14]).

Изложенные результаты свидетельствуют о достаточно быстрой практической сходимости приближенного метода возмущения формы границы и, следовательно, о его применимости не только для решения пространственных задач теории упругости для неограниченных сред с неканоническими полостями или включениями, где сходимость несколько лучше [4], но и для исследования напряженного состояния толстостенных близких к сферическим оболочек вращения, для которых $|\varepsilon| \ll 1$.

Для сравнительного анализа использованы некоторые числовые результаты, полученные Г. В. Купченко и Д. Ф. Лялюком.

Поступила 2 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь О. М. Про приближений метод визначення концентрації напружень біля кривольнійних отворів в оболонках. Прикл. механ., 1962, т. 8, в. 6.
2. Sawin G. N., Guź A. N., Kosmodamianskij A. S. Zagadnienia mechaniki ośrodków ciągłych dla obszarów niekanonicznych. Mechanika teoretyczna i stosowana, 1970; т. 8, з. 1.

3. Гузь О. М. Про один метод розв'язування тривимірних лінійних задач механіки суцільного середовища для неканонічних областей. Доп. АН УРСР, 1970, Сер. А, № 4.
4. Неміш Ю. Н. О приближенном решении пространственных задач теории упругости для трансверсально изотропной среды. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 8.
5. Неміш Ю. М. Про напружений стан товстостінних оболонок обертання. Доп. АН УРСР, 1970, Сер. А, № 6.
6. Неміш Ю. Н. О напряженном состоянии нелинейно-упругих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4.
7. Неміш Ю. Н. Упругое равновесие трехмерных деформируемых тел, ограниченных некруговыми цилиндрическими поверхностями. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 2.
8. Гузь А. Н. О дифракции волн на конечных телах вращения. Прикл. механ. 1973, т. 9, вып. 7.
9. Коваленко А. Д., Карнаузов В. Г. О приближенном методе решения пространственных задач теории упругости и вязкоупругости. Прикл. механ. 1969, т. 5, вып. 8.
10. Коваленко А. Д., Карнаузов В. Г. О приближенном методе расчета напряженного состояния толстостенных оболочек вращения. Прикл. механ. 1970, т. 6, вып. 6.
11. Green A. E., Zerna W. Theoretical Elasticity. Oxford Univ. Press, 1954.
12. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев, «Наукова думка», 1972.
13. Chen W. T. On some problems in spherically isotropic elastic materials. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж. механ., сер. Е, 1966, т. 33, № 3.)
14. Куценко Г. В., Улитко А. Ф. Осесимметричная деформация полого эллипсоида вращения. В сб.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев, «Наукова думка», 1971, вып. 11.