УДК 539.374

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Н. М. МАТЧЕНКО, Л. А. ТОЛОКОННИКОВ

(Тула)

Рассматривается течение жесткопластического ортотропного материала. Оси декартовой системы координат x, y, z совпадают с главными осями анизотропии. Следуя Мизесу [1], условие пластичности принято в виде квадратичной функции относительно компонент напряжений

$$A_{11}\sigma_x^2+A_{22}\sigma_y^2+A_{33}\sigma_z^2+2(A_{12}\sigma_x\sigma_y+A_{23}\sigma_y\sigma_z+ +A_{13}\sigma_z\sigma_x)+6(A_{44}\sigma^2_{xz}+A_{55}\sigma^2_{yz}+A_{66}\sigma^2_{xy})=6 \tag{1}$$

где $A_{11}, \ldots, A_{66}$ – экспериментально определяемые константы.

Испытания механических свойств листового материала [2] свидетельствуют о приемлемости соотношений между коэффициентами пластической податливости вида

$$2A_{12}=-(A_{11}A_{22})^{1/2}, \qquad 2A_{23}=-(A_{22}A_{33})^{1/2}, \qquad 2A_{13}=-(A_{11}A_{33})^{1/2} \tag{2}$$

В случае плоской деформации условие текучести (1) с учетом ограничений (2) принимает вид

$$\begin{gathered}(s_\xi-s_\eta)^2+4m^2s^2_{\xi\eta}=4, \qquad s_\xi=a_{11}\sigma_x, \qquad s_\eta=a_{22}\sigma_y \\ s_{\xi\eta}=(a_{11}a_{22})^{1/2}\sigma_{xy}, \qquad m^2=A_{66}(a_{11}a_{22})^{-1}, \qquad A_{11}=2a_{11}^2, \qquad A_{22}=2a_{22}^2\end{gathered} \tag{3}$$

Условие текучести (3) удовлетворяется посредством введения двух функций, через которые можно выразить обобщенные напряжения

$$s_\xi=p+\cos 2\varphi, \qquad s_\eta=p-\cos 2\varphi, \qquad ms_{\xi\eta}=\sin 2\varphi \tag{4}$$

Компоненты скоростей обобщенных деформаций вычисляются по формулам

$$\varepsilon_\xi=\lambda\cos 2\varphi, \qquad \varepsilon_\eta=-\lambda\cos 2\varphi, \qquad 2\varepsilon_{\xi\eta}=\lambda m\sin 2\varphi, \qquad \lambda\geqslant 0 \tag{5}$$

Присоединяя сюда уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial s_{\xi\eta}}{\partial\eta}=0, \qquad \frac{\partial s_{\xi\eta}}{\partial\xi}+\frac{\partial s_\eta}{\partial\eta}=0$$

и соотношения

$$\varepsilon_\xi=\frac{\partial u_\xi}{\partial\xi}, \qquad \varepsilon_\eta=\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta}, \qquad 2\varepsilon_{\xi\eta}=\frac{\partial u_\eta}{\partial\xi}+\frac{\partial u_\xi}{\partial\eta} \tag{6}$$

где

$$\xi=(a_{11})^{1/2}x, \qquad \eta=(a_{22})^{1/2}y, \qquad u_x=(a_{11})^{1/2}u_\xi, \qquad u_y=(a_{22})^{1/2}u_\eta$$

а u_x, u_y – компоненты скорости перемещений, получаем замкнутую систему уравнений плоской идеально пластической деформации ортотропных материалов.

Внося выражения (4) в уравнения равновесия (6), получим гиперболическую систему дифференциальных уравнений характеристик и соотношения между искомыми функциями p, φ вдоль характеристик, которые имеют вид

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)_{\alpha,\beta}=m\operatorname{tg}2\varphi\pm(1+m^2\operatorname{tg}^2 2\varphi)^{1/2} \\ dp\pm 2(\sin^2 2\varphi+m^{-2}\cos^2 2\varphi)^{1/2}d\varphi=0\end{gathered} \tag{7}$$

Исключая из (5) величину λ и переходя к компонентам скорости обобщенных перемещений u_ξ, u_η, получим уравнения

$$m\operatorname{tg}2\varphi\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial\xi}-\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial u_\eta}{\partial\xi}+\frac{\partial u_\xi}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial u_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta}=0 \tag{8}$$

Легко убедиться, что система (8) является гиперболической и имеет характеристики, определяемые уравнениями (7). Если обозначить через u и v составляющие вектора обобщенной скорости в направлениях α- и β-характеристик, то справедливы соотношения: $du-vd\varphi=0$ вдоль α, $dv+ud\varphi=0$ вдоль β.

Поступила 18 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Качанов.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
2. *А. М. Жуков.* Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 9.

УДК 534:061.3

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР. СЕМИНАРЫ

Семинар по механике систем твердых тел и гироскопов под руководством А. Ю. Ишлинского, Д. М. Климова, Е. А. Девянина.

20 IV 1974. **Ю. М. Урман, Г. Г. Денисов** (Горький) *Применение обобщенных сферических гармоник к анализу эволюционных движений твердого тела.*

Рассматриваются движения твердого тела с закрепленной точкой под действием моментов, имеющих силовую функцию общего вида. Силовая функция, зависящая от трех углов, определяющих положение тела относительно источников поля, разлагается в ряд по обобщенным сферическим функциям (неприводимым представлениям группы вращений), что позволило классифицировать моменты воздействия по гармоникам обобщенных сферических функций и существенно упростить операцию осреднения, необходимую для получения эволюционных движений. В качестве примеров выбраны задачи об эволюционных движениях ротора безопорного гироскопа под действием моментов различных гармоник силовой функции с учетом и без учета вращения Земли.

20 IV 1974. **В. В. Лунев** (Москва) *Задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в параметрах Родрига – Гамильтона.*

Вводятся переменные Агостинелли σ, λ, ν. Находятся выражения проекций угловой скорости твердого тела на подвижные оси и направляющие косинусы вертикали в новых переменных. Рассматривается задача интегрирования динамических уравнений движения твердого тела в новых переменных. Решение доведено до квадратур при некоторых ограничениях на начальные данные в известных случаях Эйлера и Лагранжа. Получено частное решение в случае $A=B$ при некоторых ограничениях на начальные данные. В отдельных случаях новые переменные являются более удобными при анализе задачи.

3 VI 1974. **Д. Б. Дубошинский, Я. Б. Дубошинский, Д. И. Пеннер** (Владимир) *Аргументные колебания.*

Рассмотрены колебательные процессы в системах с одной степенью свободы. Показано, что действие различных сил на колебательную систему может приводить к сдвигу фаз или изменению аргумента между мгновенными значениями координат и ускорения. Определенное воздействие сил на колебательную систему, приводящее к вкладу энергии в колебательный процесс или отбору энергии эквивалентно [1] соответственно запаздыванию или опережению аргумента в дифференциальном уравнении, описывающем движения в такой системе.

Описание колебательных процессов, в которых действие внешних сил приводит к сдвигу фаз между мгновенными значениями координаты и ускорения, дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, является не только методом исследования, но и отражает существо происходящих процессов [2].

[1, 2] Участники семинара не разделили этих суждений.