

Наконец, давление на нижней стороне пластины определяется по формуле (2), а перепад давления на пластине — по формуле (3). В частности, при  $0 < t \leq 2$  перепад давления равен

$$\Delta p = 2 \left\{ h(t-x \cos \alpha) - \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{2 \frac{t-x}{x} \left( \frac{t-x}{2x} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \right]^{-1} \sin \frac{\alpha}{2} \right\} h(t-x) - \\ - \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{2 \frac{t-2 \cos \alpha - 2 + x}{2-x} \left( \frac{t-2 \cos \alpha - 2 + x}{2(2-x)} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \right]^{-1} \cos \frac{\alpha}{2} \right\} h(t-2 \cos \alpha - 2 + x) \Bigg\}$$

Результирующая удельная нагрузка, действующая на пластину, вычисляется как интеграл от  $\Delta p$  от  $x=0$  до  $x=2$ .

Поступила 24 I 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев Е. Ф. Действие на препятствие слабой ударной волны. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3.
2. Сагомонян А. Я., Поручиков В. В. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. Изд-во МГУ, 1970.
3. Fox E. N. The diffraction of sound pulses by an infinity long strip. Proc. Roy. Soc. London, A, Philos. Trans., 1948, vol. 241, No. 828, p. 71—103.
4. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Изд-во иностр. лит., М., 1962.

УДК 539.3

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ОБОЛОЧЕК

Л. И. МАНЕВИЧ, В. И. МОССАКОВСКИЙ, Е. Ф. ПРОКОПАЛО

(Днепропетровск)

Экспериментально показано существование серии локальных закритических форм деформации продольно сжатой цилиндрической оболочки, которым соответствуют последовательно снижающиеся нижние критические нагрузки. Энергетические барьеры, которые необходимо преодолеть для перескока к закритическим формам, резко возрастают с увеличением числа вмятин. Определены области устойчивости каждой из закритических равновесных конфигураций. Наличие внутреннего давления приводит к существенному повышению критических напряжений, соответствующих локальным формам выпучивания.

1. Критические нагрузки продольно сжатой цилиндрической оболочки при лабораторном эксперименте могут быть предсказаны [1—8], если учитываются отклонения поверхности оболочки и торцевых плоскостей от идеальной формы. В этом случае потеря устойчивости происходит при верхнем критическом напряжении, величина которого зависит от внутренних, присущих самой конструкции, возмущений. В реальных условиях эксплуатации часто возникают дополнительные, внешние возмущения (локальные удары, вибрации, пульсации аэродинамического давления), которые в силу известных особенностей закритического поведения сжатой оболочки могут вызвать перескок к новым равновесным конфигурациям при напряжениях, значительно меньших, чем в лабораторном эксперименте.

Теоретические исследования в рассматриваемой области относятся, главным образом, к изучению начальной стадии послекритической деформации и определению нижней критической нагрузки в предположении, что волнообразование распространяется на всю поверхность [9—11]. При этом коэффициенты нижней критической нагрузки имеют весьма малые величины и стремятся к нулю при стремлении к нулю относительной толщины оболочки. Поскольку, однако, соответствующие перемещения и энергетические барьеры очень велики, перескок к таким формам выпучивания представляется сомнительным, и возникает вопрос о существовании ближних равне-

весных конфигураций со сравнительно небольшими энергетическими барьерами [12].

Результаты экспериментов [13, 14] свидетельствуют о том, что наряду с общей формой выпучивания могут иметь место и локальные формы, в частности в виде отдельной вмятины. Но условия существования и устойчивости различных закритических форм сжатой оболочки с учетом возможности образования нескольких связанных вмятин на участке дуги поперечного сечения не изучены ни экспериментально, ни теоретически. Не изучен с этой точки зрения и случай совместного действия осевого сжатия и внутреннего давления, представляющий особый практический интерес.

Отмеченные выше факты обусловили постановку экспериментального исследования, целями которого являются: 1) классификация закритических форм равновесия сжатой цилиндрической оболочки; 2) определение нижних критических нагрузок, соответствующих этим равновесным конфигурациям; 3) определение энергетических барьеров, которые необходимо преодолеть для реализации перескока к различным формам выпучивания и выделение ближних форм выпучивания, которым соответствуют минимальные энергетические барьеры; 4) исследование устойчивости закритических конфигураций и определение несущей способности оболочки после перескока к закритическим формам равновесия; 5) исследование влияния внутреннего давления на закритическое поведение сжатой оболочки. Некоторые результаты работы были использованы в [15].

Проведенное исследование обобщает результаты испытаний 254 цилиндрических оболочек. Материал оболочек — стальная нержавеющая лента марки Х18Н9п. Модуль упругости стали  $E=1.73 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, предел текучести  $\sigma_{0.2}=84$  кг/мм<sup>2</sup>. Радиус оболочек  $R=25$  мм, длина  $L=44$  мм, толщина  $h=0.088$  мм. Изготовление оболочек производилось путем точечной сварки. Граничные условия соответствовали жесткому защемлению, так как торцы оболочек приклеивались к торцовым заглушкам клеем, изготовленным на основе эпоксидной смолы. Испытания проводились на специально спроектированной установке, обеспечивающей постоянство осевой силы в момент выпучивания оболочки и позволяющей реализовать возмущения в виде локального поперечного удара.

2. При исследовании закритического состояния оболочек в случае осевого сжатия была принята следующая методика проведения эксперимента. Испытательная установка крестилась на столе, имеющем горизонтальную ось вращения. Между опорными плитами установки на шаровых опорах размещалась испытуемая оболочка. Стол поворачивался таким образом, чтобы ось оболочки приняла строго горизонтальное положение. Оболочка нагружалась осевой силой заданной величины. Затем по поверхности оболочки наносился удар свободно падающим шариком весом 2 г, который подвешивался при помощи тонкой нити на определенной высоте таким образом, чтобы при пережигании нити удару подвергалось среднее сечение оболочки. Высота шарика над оболочкой измерялась мерной линейкой.

Как показали испытания, при ударе по оболочке, нагруженной осевой силой, в зависимости от величины осевой нагрузки и энергии падающего шарика возможны три исхода.

1. Оболочка сохраняет докритическое равновесное состояние,

2. Происходит потеря устойчивости с одновременным образованием одной или нескольких связанных вмятин (под связанными понимаются вмятины, которые расположены рядом одна за другой по дуге оболочки); такие формы потери устойчивости оболочки условно будем называть локальными закритическими формами равновесия; максимальное количество вмятин равно восьми, при этом они образуют уже замкнутый пояс,

3. Происходит выпучивание оболочки с образованием двух поясов вмятин; условным называть эту форму общей формой потери устойчивости, так как она, как показали испытания, всегда сопровождается потерей несущей способности оболочки.

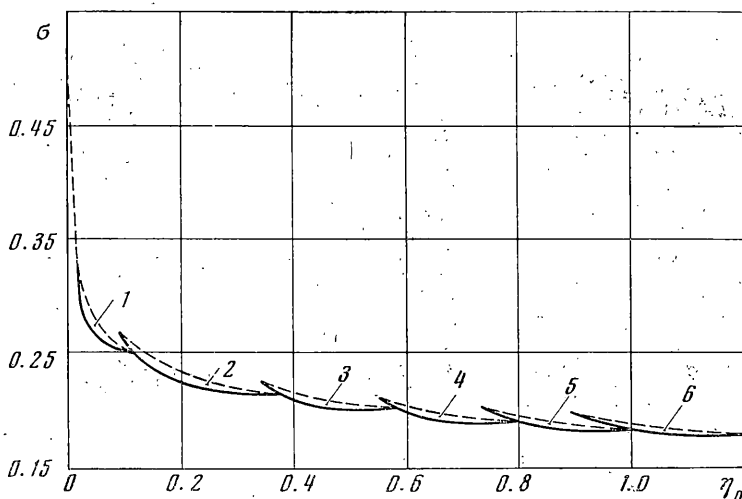
Следующая оболочка нагружалась такой же по величине осевой силой, но при этом, в зависимости от результата испытаний предыдущей оболочки, изменялась высота падения шарика. Таким образом, при одной и той же величине осевой силы, но различных значениях высоты свободного падения шарика испытывались несколько оболочек с целью определения тех минимальных значений энергии падающего груза, которые соответствуют локальной и общей формам выпучивания оболочки.

После определения перечисленных величин, соответствующих заданному уровню осевой нагрузки, изменялась осевая сила и снова проводились аналогичные испытания. При этом поэтапно исследовался весь диапазон значений осевой силы.

Если сжатая оболочка в результате действия внешнего возмущения выпучивалась по одной из локальных форм, то проводилось дальнейшее исследование устойчивости образовавшейся закритической равновесной конфигурации. С этой целью уменьшалась либо увеличивалась осевая нагрузка. В первом случае определялось то ее значение, которое соответствовало моменту выхлопа, т. е. перескоку оболочки из закритической формы в исходную форму равновесия. В случае увеличения осевой силы определялось то ее значение, при котором та или иная локальная форма закритического равновесия оболочки скачком сменялась общей формой выпучивания. Дру-

гими словами, при этом определялась область устойчивости каждой локальной закритической формы равновесия.

Определенные таким образом значения осевой силы будем называть нижней ( $P_{-,n}$ ) и верхней ( $P_{+,n}$ ) критической нагрузками для каждой из локальных закритических форм равновесия. Индекс  $n$  в данном случае изменяется от единицы до восьми и соответствует локальным закритическим формам с одной, двумя и т. д., восемью локальными вмятинами.



Фиг. 1

Результаты испытаний приведены на фиг. 1. Локальные закритические формы выпучивания, наблюдавшиеся при эксперименте, представлены на фотографиях (фиг. 2). На фиг. 1 показаны области реализации закритических форм равновесия. Поскольку количество испытанных оболочек весьма велико, здесь не нанесены результаты испытаний каждой оболочки, а представлены осредненные графические зависимости. По оси абсцисс отложена величина энергии внешнего возмущения, отнесенная к энергии упругой докритической деформации оболочки ( $\eta$ ), по оси ординат — безразмерный параметр осевых сжимающих напряжений —  $\sigma$ . Цифрами 1–6 указаны области реализации локальных закритических форм равновесия с одной, двумя, и т. д. вмятинами, наблюдавшиеся при ударном локальном воздействии на сжатую цилиндрическую оболочку. Эти области снизу граничат с областью устойчивости докритической формы равновесия, а сверху — с областью, в которой имеет место общая форма потери устойчивости оболочки. Ниже представлены значения верхних ( $\sigma_{+,n}$ ) и нижних ( $\sigma_{-,n}$ ) критических напряжений для каждой локальной закритической формы.

$n=1$	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_{-,n}=0.242$	0.195	0.187	0.163	0.177	0.161	0.154	0.145
$\sigma_{+,n}=0.344$	0.283	0.246	0.225	0.219	0.217	0.210	0.210

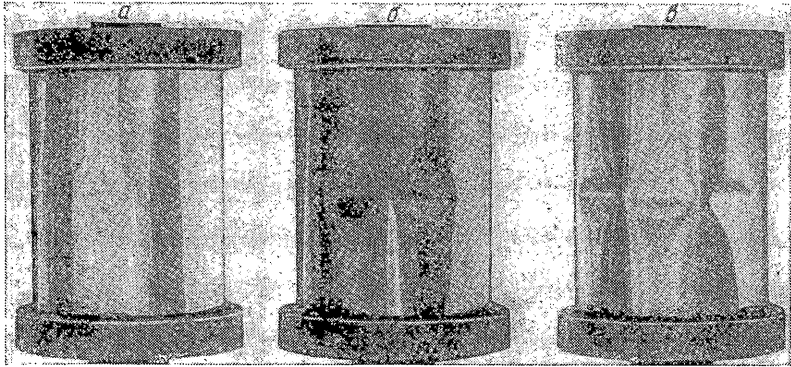
Отметим следующее обстоятельство. Каждая из закритических локальных форм равновесия ограничена минимальным ( $\sigma_{*,n}$ ) и максимальным ( $\sigma_n^*$ ) значениями осевых сжимающих напряжений, определяющих область ее реализации. Это означает, что, например, локальная форма равновесия оболочки с двумя связанными вмятинами (фиг. 2, б) может быть получена при внешнем воздействии типа локального поперечного удара только в том случае, если осевые сжимающие напряжения  $\sigma$  находятся в диапазоне  $\sigma_{*,2} \leq \sigma \leq \sigma_2^*$ . Что касается области устойчивости, которая ограничена значениями верхних  $\sigma_{+,2}=P_{+,2}/2\pi E h^2$  и нижних  $\sigma_{-,2}=P_{-,2}/2\pi E h^2$  критических напряжений, то, как показали испытания, она всегда несколько шире, чем соответствующая область реализации. Весь интервал изменения коэффициента осевых сжимающих напряжений разбивается на участки.

Первый участок  $0.47 = \sigma_0^* \geq \sigma \geq \sigma_{*,0} = 0.34$ . В этом диапазоне исходная равновесная форма при определенных значениях энергии внешнего возмущения (см. фиг. 1) сразу сменяется общей формой потери устойчивости оболочки. Ни одна из локальных закритических форм равновесия здесь не наблюдается.

Значение  $\sigma = 0.47$  соответствует верхнему критическому напряжению для исходной равновесной конфигурации оболочки, полученному при чистом осевом сжатии.

Здесь и далее численные значения коэффициентов критических напряжений, а также значения энергии внешнего возмущения являются средними величинами, вычисленными по результатам испытаний нескольких оболочек.

Относительная величина энергии внешнего возмущения, необходимая для реализации общей формы потери устойчивости, очень мала и изменяется в пределах  $\theta \leq \eta \leq 0.01$ . Для этого интервала изменения параметра  $\sigma$  характерно очень резкое снижение критических нагрузок при незначительном увеличении энергии внешнего воздействия.



Фиг. 2

Второй участок  $0.34 = \sigma_1^* \geq \sigma \geq \sigma_{*,1} = 0.25$ . При указанных значениях осевых сжимающих напряжений в зависимости от величины энергии внешнего возмущения образуется локальная форма потери устойчивости с одной вмятиной либо происходит общая потеря устойчивости оболочки. Интересно отметить, что в некоторой области значений  $\eta$  и  $\sigma$  (принадлежащих рассматриваемому интервалу) возможен переход к форме равновесия с двумя связанными вмятинами. Энергия внешнего возмущения (энергетический барьер), необходимая для выпучивания при  $\sigma_1^* \geq \sigma \geq \sigma_{*,1}$ , относительно невелика и составляет примерно  $2 \div 10\%$  от энергии деформации, накопленной оболочкой в первоначальном равновесном состоянии при соответствующей осевой нагрузке. В работах [13, 14] приводятся результаты исследований закритических форм равновесия с одной локальной вмятиной. Реализация такой формы потери устойчивости сжатой оболочки производилась путем статического приложения поперечных локальных нагрузок. Полученные в [13, 14] значения верхних и нижних критических напряжений достаточно хорошо согласуются с аналогичными результатами данной работы.

Третий участок  $0.26 = \sigma_2^* \geq \sigma \geq \sigma_{*,2} = 0.22$ . Здесь реализуется закритическая форма равновесия с двумя связанными вмятинами. При некоторых значениях  $\sigma$ , принадлежащих этому интервалу, и определенных значениях энергии внешнего возмущения может быть получена общая потеря устойчивости оболочки, а также локальная форма выпучивания с тремя или даже с четырьмя (правда, в очень узкой области) связанными вмятинами.

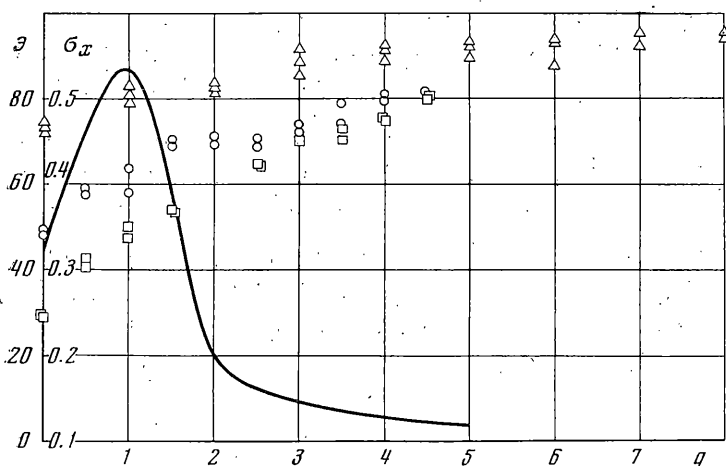
При дальнейшем уменьшении уровня сжимающих напряжений были получены путем однократного удара шариком по поверхности оболочки последовательно закритические формы с тремя, четырьмя, пятью и шестью локальными вмятинами. Формы выпучивания, при которых образуется семь и восемь вмятин (восемь вмятин образуют уже замкнутый пояс), не реализовывались при однократном ударе. В этом случае наносился повторный удар шариком по невыпученной поверхности оболочки. Величина энергии внешнего воздействия в этих случаях не определялась. Изучалась только устойчивость полученных равновесных конфигураций.

С увеличением числа вмятин сравнительно медленно (по сравнению с рассмотренными случаями) падают значения осевых сжимающих напряжений, соответствующие данным формам выпучивания. В то же время существенно возрастают энергетические барьеры, которые необходимо преодолеть для перескока к этим формам. Области реализации закритических форм равновесия с увеличением числа вмятин неуклонно сужаются.

Таким образом, экспериментально показано существование серии локальных закритических форм равновесия сжатой цилиндрической оболочки, и определена в

зависимости от величины осевой нагрузки энергия внешнего локального возмущения, необходимая для перескока оболочки от исходного состояния к той или иной закритической конфигурации.

3. Приведем результаты экспериментального исследования закритической формы равновесия оболочек с одной локальной вмятиной, нагруженных осевой силой и внутренним давлением. Для создания внутреннего давления применялась воздушная система наддува. Величина давления регистрировалась по образцовому манометру. Методика проведения эксперимента, по существу, идентична методике, описанной выше. Отличие заключается в том, что здесь исследовалось закритическое поведение оболочек в некотором диапазоне изменения параметра внутреннего давления при



Фиг. 3

осевых нагрузках, близких к нижней критической для изучаемой формы. При совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления с изменением давления изменяется нижнее критическое напряжение, т. е. величина  $\sigma_{-1}$ . В то же время изменяется и область устойчивости рассматриваемой равновесной конфигурации. Количественное изучение этих зависимостей составило первую задачу экспериментального исследования.

С этой целью был проведен следующий эксперимент. В оболочке создавалось внутреннее давление определенной величины. Затем производилось плавное нагружение осевой силой. В течение всего времени нагружения делались попытки локализовать локальную вмятину на боковой поверхности оболочки при помощи штока (локальное поперечное усилие прикладывалось квазистатически). При этом определялось то наименьшее значение осевой силы, при котором уже возможно появление закритической формы равновесия с одной локальной вмятиной. Затем внутреннее давление несколько увеличивалось (при увеличении внутреннего давления происходил выхлоп оболочки) и снова определялось нижнее критическое значение осевой силы ( $P_{-1}$ ). Для определения верхней границы области устойчивости также использовался квазистатический метод приложения поперечного возмущения. Оболочка нагружалась внутренним давлением и осевой силой, причем величина осевой силы сразу принималась несколько большей, чем значение нижней критической нагрузки. Путем приложения поперечного возмущения образовывалась локальная вмятина, шток отводился и производилось увеличение осевой силы вплоть до момента потери устойчивости оболочки. При этом фиксировалась величина верхней критической нагрузки ( $P_{+1}$ ). Таким образом исследовалась область устойчивости локальной закритической формы равновесия оболочки в некотором диапазоне значений внутреннего давления.

Результаты эксперимента приведены на фиг. 3. Здесь показано, как изменяются значения верхних (показаны кружками) и нижних (квадраты) критических напряжений с изменением величины внутреннего давления. Были проведены также испытания оболочек на совместное действие осевого сжатия и внутреннего давления при отсутствии внешних возмущений. Значения верхних критических напряжений, полученные при этих испытаниях, также представлены на фиг. 3 (треугольники).

После исследования области устойчивости рассматриваемой закритической формы были экспериментально определены при различных значениях внутреннего давления

энергетические барьеры, которые необходимо преодолеть для перескока к закритической равновесной конфигурации при действии внешних возмущений типа локального поперечного удара. На фиг. 3 показана зависимость от внутреннего давления той минимальной энергии внешнего воздействия (размерность  $-Г \cdot см$ ), при которой становится возможной реализация закритической формы равновесия с одной вмятиной.

Анализируя приведенные результаты, можно отметить следующее. С возрастанием внутреннего давления наблюдается достаточно быстрое увеличение нижних критических напряжений (квадраты на фиг. 3), соответствующих закритической форме равновесия с одной локальной вмятиной. При этом верхние критические напряжения (кружочки) для указанной закритической формы растут несколько медленнее. В результате при некотором значении внутреннего давления ( $q=4.5 \text{ кг/см}^2$ ) область устойчивости рассматриваемой закритической формы равновесия, ограниченная значениями  $\sigma_{-1}$  и  $\sigma_{+1}$ , вырождается. При дальнейшем увеличении внутреннего давления наблюдается общая форма потери устойчивости оболочки. Соответствующие осевые сжимающие напряжения составляют примерно 85% от верхнего классического значения критических напряжений для идеальной оболочки и 94% от значений верхних критических напряжений для реальных оболочек, испытанных на осевое сжатие при том же внутреннем давлении, но без внешних возмущений (треугольники).

Анализируя зависимость величины энергии внешнего возмущения от внутреннего давления, можно проследить две тенденции (фиг. 3). Вначале, с ростом давления, происходит резкое увеличение энергетического барьера, которое затем при  $q=1 \text{ кг/см}^2$  сменяется не менее быстрым уменьшением. Этому явлению можно дать следующее объяснение. Внутреннее давление, как известно, уменьшает чувствительность оболочки к возмущениям и поэтому его увеличение приводит вначале к росту энергии внешнего воздействия, необходимой для перескока. Однако при этом осевые сжимающие напряжения, соответствующие области устойчивости закритической равновесной конфигурации, приближаются к верхним критическим напряжениям, полученным при испытаниях таких же оболочек без внешних возмущений. Это обстоятельство способствует резкому снижению энергетического барьера, который необходимо преодолеть при перескоке от исходной формы к закритической равновесной конфигурации.

Поступила 18 VII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hutchinson J. W., Koiter W. T. Postbuckling theory. Appl. Mech. Rev., 1970, vol. 23, No. 12.
2. Кан С. Н. Несущая способность круговых цилиндрических оболочек при сжатии. Тр. IV Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1964.
3. Маневич Л. И., Прокопало Е. Ф. О статистических свойствах несущей способности гладких цилиндрических оболочек. В сб.: Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, 1968.
4. Гейзенблазен Р. Е., Маневич Л. И., Моссаковский В. И., Прокопало Е. Ф. О влиянии начальных возмущений на устойчивость гладких цилиндрических оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 6.
5. Маневич Л. И., Прокопало Е. Ф. О влиянии внутреннего давления на критические осевые напряжения гладкой цилиндрической оболочки. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970.
6. Tenpnyson R. C. A note on the classical buckling load of circular cylindrical shells under axial compression. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 2.
7. Tenpnyson R. C., Muggerridge D. B. Buckling of axisymmetric imperfect circular cylindrical shells under axial compression. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 11.
8. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М., «Наука», 1966.
9. Hoff N. J., Madsen W. A., Mayers J. Postbuckling equilibrium of axially compressed circular cylindrical shells. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 1.
10. Паламарчук В. Г. Процесс выпучивания круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970.
11. Эгоков В. И. Закритические деформации цилиндрических оболочек с учетом геометрического изгибания поверхности. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 2.
12. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
13. Владимиров С. А., Коноз В. И., Моссаковский В. И., Смелый Г. Н. Экспериментальное исследование местной потери устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
14. Тринчер В. К. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек к конечным возмущениям. Науч. тр. Н.-и. ин-та механики МГУ, 1970.
15. Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Прокопало Е. Ф. Исследование закритического поведения цилиндрических оболочек. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 2.