

На фиг. 3 построена зависимость критических нагрузок от относительной толщины оболочки. При этом кривые 1, 4 соответствуют величинам  $10^4 Q$  и  $10^3 Q$  при  $pR=T$ ; кривые 2, 5 —  $10^4 Q$  при  $p=0$ ; кривые 3, 6 —  $10^4 Q$  и  $10^2 Q$  при  $T=0$  соответственно. Как и следовало ожидать, с увеличением толщины оболочки увеличивается и критическая нагрузка.

График зависимости  $Q^*$  от отношения жесткости заполнителя к жесткости оболочки ( $E_s/E=10^{-\mu}$ ,  $E_s/E_1=10^{-\mu}E/E_1$ ,  $E_s/E_2=10^{-\mu}E/E_2$ ,  $\mu=1, 2, \dots$ ) приводится на фиг. 4, где кривые 1, 4 соответствуют  $10 Q^*$  и  $Q^*$  при  $pR=T$ ; кривые 2, 5 —  $10 Q^*$  при  $p=0$ ; кривые 3, 6 —  $0.1 Q^*$  и  $10^{-3} Q^*$  при  $T=0$  соответственно. Здесь следует отметить, что при  $E_s/E < 10^{-3} Q^*$  стремится к значению критической нагрузки для пустой оболочки;  $Q^*$  возрастает с уменьшением  $\mu$  по прямолинейному закону.

Как показали расчеты, учет касательного взаимодействия между оболочкой и заполнителем приводит к понижению критических нагрузок. Однако во всех рассмотренных случаях это понижение не превышает 1%.

## ЛИТЕРАТУРА

Поступила 27, XI 1972

1. Seide P. The stability under axial compression and lateral pressure of circular cylindrical shells with a soft elastic core. J. Aerospace Sci., 1962, vol. 29, No. 7.
2. Brush D. O., Almroth B. O. Buckling of core-stabilized cylinders under axisymmetric external loads. J. Aerospace Sci., 1962, vol. 29, No. 10.
3. Власов В. В., Гужь А. Н. Исследование устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек с заполнителем при осевом сжатии. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 5.
4. Гагаулли М. З., Иванов В. А., Ильгамов М. А. Прочность соосных цилиндрических оболочек с упругим заполнителем. Тр. семинара по теории оболочек. Казань, 1971, вып. 2.
5. Грей Э., Мэтьюс Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Изд-во иностр. лит., 1949.
6. Иванов В. А. Обзор литературы по устойчивости оболочек с упругим заполнителем. Тр. семинара по теории оболочек. Казань, 1971, вып. 2.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. «Наука», 1967, т. 2.

УДК 539.3:534.4

## ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛАСТИНЕ

М. Ш. ИСРАИЛОВ

(Грозный)

Предлагается эффективное решение плоской задачи дифракции акустической волны ступенчатого профиля на жесткой, неподвижной пластине конечной ширины, когда угол падения волны на пластину произволен.

В общей постановке подобная задача рассматривалась в работе [1]. Эффективное решение в случае волны падающей по нормали к пластине дано в [2].

Пусть пластина занимает область  $0 \leq x \leq 2$ ,  $y=0$ , падающая волна достигает ее в момент времени  $t=0$ , и угол между направлением распространения падающей волны и плоскостью пластины, т. е. осью  $x$  (фиг. 1) равен  $\alpha$ . Всегда можно считать  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ . Известно [2, 3], что избыточное давление  $p(x, y, t)$  в жидкости при  $t > 0$ , удовлетворяющее волновому уравнению

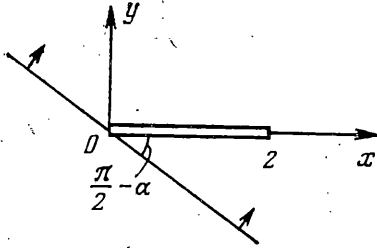
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

можно в области дифракции искать в виде

$$(1) \quad p_+ = P(x, y, t) - p_*(x, y, t), \quad p_- = P(x, -y, t) + p_*(x, -y, t)$$

Здесь  $P(x, y, t)$  — падающая волна давления, имеющая в рассматриваемой задаче вид функции Хевисайда  $P(x, y, t) = h(t - y \sin \alpha - x \cos \alpha)$  и введены обозначения:

$p_+ = p(x, y, t)$  при  $y > 0$ ,  $p_- = p(x, y, t)$  при  $y < 0$ . Все величины считаются безразмерными и связаны с соответствующими размерными величинами следующим образом:  $p = p'/A_0$ ,  $P = P'/A_0$ ,  $x = x'/l$ ,  $y = y'/l$ ,  $t = ct'/l$ , где  $A_0$  — амплитуда давления падающей волны,  $2l$  — ширина пластины,  $c$  — скорость распространения звука в покоящейся жидкости.



Фиг. 1

Из (1) видно, что если давление  $p$  при  $y > 0$  (т.е.  $p_+$ ) найдено, то  $p$  при  $y < 0$  (т.е.  $p_-$ ) легко находится:  $p_- = P(x, y, t) + P(x, -y, t) - p_+$ . В частности

$$(2) \quad p_-(x, 0, t) = 2P(x, 0, t) - p_+(x, 0, t)$$

и, следовательно, перепад давления на пластине

$$(3) \quad \Delta p = p_- - p_+ = 2[P(x, 0, t) - p_+(x, 0, t)] \quad (0 \leq x \leq 2)$$

Таким образом, для полного решения задачи достаточно найти функцию  $p(x, y, t)$  в области  $y > 0$ . Непрерывность функции  $p$  вне пластины совместно с (1) и условие неподвижности жесткой пластины дают для ее нахождения граничные условия на оси  $y = 0$

$$(4) \quad p = 1 \quad \text{при } x < 0, x > 2; \quad \partial p / \partial y = 0, \quad \text{при } 0 \leq x \leq 2$$

Геометрический анализ распространения волновых фронтов в задаче приводит к следующему результату.

Все новые и новые дифракционные волны от концов  $x = 0$  и  $x = 2$  пластины возникают в моменты времени

$$(5) \quad t_- = 0, \quad t_+ = 2 \cos \alpha, \quad t_+ = 2, \quad t_- = 2 + 2 \cos \alpha, \quad t_- = 4, \quad t_+ = 4 + 2 \cos \alpha, \dots$$

т.е. в определенной закономерности. Знаками минус и плюс отмечены соответственно времена возникновения дифракционных волн на левом ( $x = 0$ ) и на правом ( $x = 2$ ) концах пластины.

Встречи этих волн на оси  $y = 0$  происходят в точках с абсциссами  $1 + \cos \alpha, 1 - \cos \alpha, 1 + \cos \alpha, 1 - \cos \alpha, \dots$  в моменты времени  $1 + \cos \alpha, 3 + \cos \alpha, 5 + \cos \alpha, 7 + \cos \alpha, \dots$

Обозначим дифракционные волны, возникающие в моменты времени (5) последовательно через  $p_0, p_1, p_2, \dots$ . Значит, волны с индексами  $M$  (0, 3, 4, 7, 8, 11, 12, ...) образуются на левом, а с индексами  $N$  (1, 2, 5, 6, 9, 10, ...) на правом концах пластины.

Пусть  $\alpha \neq \pi/2$  и  $0 < t \leq 2 \cos \alpha$  (из дальнейшего ясно, как видоизменить рассуждения в случае  $\alpha = \pi/2$ ). На этом интервале времени существует только дополнительное возмущение  $p_0$ , являющееся решением задачи о дифракции ступенчатой волны, набегающей на полубесконечную пластину. Решение этой задачи известно [2] и после некоторых упрощений можно записать

$$(6) \quad p_0 = 1 \pm \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{2} \rho \sin \frac{\alpha}{2} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \left( \frac{1}{2} \rho^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{-1}$$

где  $\rho = (t-r)^{1/2} r^{-1/2}$ ,  $r$  и  $\theta$  — полярные координаты. Знак плюс берется при  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ , а минус — при  $0 \leq \theta < \pi$ .

При  $\theta = 0$  формула (6) дает давление на верхней, «теневого» стороне пластины

$$(7) \quad p_0(x, t) = \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{2} \frac{t-x}{x} \sin \frac{\alpha}{2} \left( \frac{t-x}{2x} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{-1} \right] h(t-x)$$

В момент времени  $t = 2 \cos \alpha$  на правом конце пластины возникнет дифракционная волна  $p_1$ , являющаяся решением задачи дифракции сбегающей с полубесконечной пластины ступенчатой волны. Решение, найденное таким же образом как и (6), равно

$$(8) \quad p_1 = 1 \pm \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{2} \rho_1 \cos \frac{\alpha}{2} \left| \sin \frac{\theta_1}{2} \right| \left( \frac{1}{2} \rho_1^2 - \sin^2 \frac{\theta_1}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{-1}$$

$\rho_1 = (t_1 - r_1)^{1/2} r_1^{-1/2}$ ,  $t_1 = t - 2 \cos \alpha$ , где  $r_1$  и  $\theta_1$  — полярные координаты, связанные с декартовыми  $x_1, y_1$  (фиг. 2). Причем угол  $\theta_1$  откладывается от отрицательного направления оси  $x_1$ . Знаки минус и плюс берутся соответственно для верхней и нижней

полушпоскостью. Ясно, почему формула (8) не дает тривиального решения  $p_1=1$  для случая  $\alpha=0$ , исключаемого в дальнейшем.

Если в (8) положить  $\theta_1=\pi$ , получается давление на верхней стороне пластины

$$(9) \quad p_1(x_1, t_1) = \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{2 \frac{t_1 - x_1}{x_1} \cos \frac{\alpha}{2} \left( \frac{t_1 - x_1}{2x_1} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{-1}} \right] h(t_1 - x_1)$$

В момент времени  $t_2=t-2=0$ , когда дифракционная волна  $p_0$ , возникшая раньше, чем  $p_1$ , достигнет правого конца пластины, на этом конце образуется следующая дифракционная волна, несущая дополнительное возмущение  $p_2(x_1, t_2)$ . Поскольку граничные условия задачи (6) вне пластины уже выполнены за счет  $p_0$  и  $p_1$  (в чем легко убедиться подставляя в формулы (6) и (8) соответственно  $\theta=\pi$  и  $\theta_1=0$ ), для  $p_2$  получаются следующие граничные условия на оси  $y_1=y=0$ :  $p_2(x_1, t_2) = -p_0(2-x, t_2+2)$  при  $x_1 < 0$ ;  $\partial p_2 / \partial y = 0$  при  $x_1 > 0$ .

Когда  $t$  превосходит одно из чисел в (5), начиная с третьего, на том или ином конце пластины образуется новая дифракционная волна, несущая с собой дополнительное возмущение  $p_n$ , удовлетворяющее уравнению ( $n \geq 2$ )

$$(10) \quad \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 p_n}{\partial t_n^2} \quad (y > 0, t_n > 0)$$

со следующими граничными (на оси  $y=0$ ) и начальными условиями:

$$(11) \quad p_n(x, t_n) = -p_{n-2}(2-x, t_n+2) \quad \text{при } x < 0, \quad \partial p_n / \partial y = 0 \quad \text{при } x > 0$$

$$(12) \quad p_n = \partial p_n / \partial t_n = 0 \quad \text{при } t_n = 0$$

$$t_n = \begin{cases} t - n & \text{при } n \text{ четном и нуле} \\ t - (n-1) - 2 \cos \alpha & \text{при } n \text{ нечетном} \end{cases}$$

Для каждого  $n$  ( $n \geq 2$ ) краевая задача (10) – (12) составлена в системе координат, связанной с тем концом пластины, на котором возмущение  $p_n$  возникает, т.е. либо в системе координат  $(x, y)$ , либо в  $(x_1, y_1)$  (фиг. 2). Однако, в целях единства записи, в (10) – (12) для  $p_n$ , возникающих на правом конце вместо переменных  $x_1, y_1$ , использованы  $x, y$ . Следовательно, необходимо в окончательном результате в  $p_n$  с индексами из последовательности  $N$  переменную  $x$  заменить на  $x_1=2-x$ , а  $y=y_1$ .

Задача (10) – (12) решается по методу Винера – Хопфа [4]. Аналогичная задача решена этим методом в [2].

Сначала к системе (10), (11) применяется преобразование Лапласа по  $t_n$  при начальных условиях (12). Тогда она принимает вид

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \lambda^2 \Phi \quad (y > 0)$$

$$(14) \quad \Phi = \Phi_0 \quad \text{при } y=0, x < 0; \quad \partial \Phi / \partial y = 0 \quad \text{при } y=0, x > 0$$

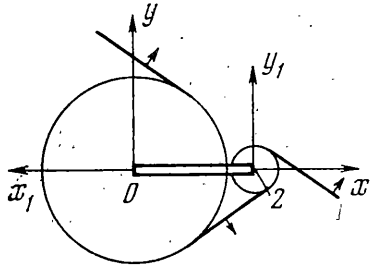
$$\Phi = \int_0^{\infty} p_n(x, t_n) e^{-\lambda t_n} dt_n, \quad \Phi_0 = - \int_0^{\infty} p_{n-2}(2-x, t_n+2) e^{-\lambda t_n} dt_n \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0)$$

Двусторонним преобразованием Лапласа по  $x$  уравнение (13) сводится к уравнению

$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} = (\lambda^2 - s^2) \Psi, \quad \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi e^{-sx} dx, \quad |\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} \lambda$$

имеющему экспоненциально убывающее решение

$$(15) \quad \Psi = A(\lambda, s) \exp[-y(\lambda^2 - s^2)^{1/2}], \quad |\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} \lambda$$



Фиг. 2

Дифференцированием по  $y$ , с использованием граничных условий (14) из (15) получается функциональное уравнение

$$(16) \quad -\frac{1}{\sqrt{\lambda-s}} \Psi_- = \sqrt{\lambda+s} \Psi_+ + \sqrt{\lambda+s} \Psi_0, \quad |\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} \lambda$$

$$(17) \quad \Psi_-(\lambda, s) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0} e^{-sx} dx$$

$$\Psi_+(\lambda, s) = \int_0^{\infty} \Phi|_{y=0} e^{-sx} dx, \quad \Psi_0(\lambda, s) = - \int_{-\infty}^0 \Phi_0 e^{-sx} dx$$

Функции  $\Psi_+$ ,  $\Psi_-$  аналитичны по  $s$  в полуплоскостях  $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} \lambda$  и  $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \lambda$  соответственно.

Факторизацией [4] функционального уравнения (16) (для этого достаточно представить аналитическую по  $s$  в полосе  $|\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} \lambda$  функцию  $(\lambda+s)^{1/2} \Psi_0$  в виде интеграла Коши) в [2] получены уравнения (в которых  $|\operatorname{Re} s| < \gamma < \operatorname{Re} \lambda$ )

$$\sqrt{\lambda+s} \Psi_+ - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{\sqrt{\lambda+z} \Psi_0(\lambda, z)}{z-s} dz = 0, \quad \operatorname{Re} s > -\gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda-s}} \Psi_- + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\sqrt{\lambda+z} \Psi_0(\lambda, z)}{z-s} dz = 0, \quad \operatorname{Re} s < \gamma$$

Из первого уравнения, с использованием (17)

$$(18) \quad \Psi_+ = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{\lambda+s}} \int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{\sqrt{\lambda+z}}{s-z} dz \int_{-\infty}^0 \Phi_0 e^{-zu} du$$

Применение к (18) обратного преобразования Лапласа (сначала по  $s$ , а затем по  $\lambda$ ) дает

$$(19) \quad p_n(x, t_n) = -\frac{\sqrt{x}^{-1/2}(t_n-x)}{\pi} \int_0^{\sqrt{x}^{-1/2}(t_n-x)} p_{n-2}(2+\tau, t_n+2-x-\tau) \frac{d\tau}{(x+\tau)\sqrt{\tau}}$$

Из формулы (19) видно, что на каждом конце пластины поочередно возникают то волны сжатия, то волны разрежения.

Теперь легко выписывается результирующее давление на верхней стороне пластины. Время  $t$  находится в одном из интервалов  $2k < t \leq 2k+2$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ . Тогда, если  $2k < t \leq 2k+2 \cos \alpha$ , то

$$(20) \quad p_+(x, t) = \sum_{n=0}^{2k} p_n^\circ(x, t_n)$$

а если  $2k+2 \cos \alpha < t \leq 2k+2$ , то

$$(21) \quad p_+(x, t) = \sum_{n=0}^{2k+1} p_n^\circ(x, t_n)$$

В формулах (20) и (21)

$$p_n^\circ(x, t_n) = \begin{cases} p_n(x, t_n), & \text{если } n \text{ принадлежит } M \\ p_n(2-x, t_n), & \text{если } n \text{ принадлежит } N \end{cases}$$

давления  $p_0(x, t)$  и  $p_1(x, t_1)$  определены равенствами (7) и (9),  $p_n(x, t_n)$  при  $n \geq 2$  рекуррентными соотношениями (19).

Наконец, давление на нижней стороне пластины определяется по формуле (2), а перепад давления на пластине — по формуле (3). В частности, при  $0 < t \leq 2$  перепад давления равен

$$\Delta p = 2 \left\{ h(t-x \cos \alpha) - \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{2 \frac{t-x}{x} \left( \frac{t-x}{2x} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \right]^{-1} \sin \frac{\alpha}{2} \right\} h(t-x) - \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{2 \frac{t-2 \cos \alpha - 2 + x}{2-x} \left( \frac{t-2 \cos \alpha - 2 + x}{2(2-x)} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \right]^{-1} \cos \frac{\alpha}{2} \right\} h(t-2 \cos \alpha - 2 + x)$$

Результирующая удельная нагрузка, действующая на пластину, вычисляется как интеграл от  $\Delta p$  от  $x=0$  до  $x=2$ .

Поступила 24 I 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев Е. Ф. Действие на препятствие слабой ударной волны. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3.
2. Сагомонян А. Я., Поручиков В. В. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. Изд-во МГУ, 1970.
3. Fox E. N. The diffraction of sound pulses by an infinity long strip. Proc. Roy. Soc. London, A, Philos. Trans., 1948, vol. 241, No. 828, p. 71—103.
4. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Изд-во иностр. лит., М., 1962.

УДК 539.3

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ОБОЛОЧЕК

Л. И. МАНЕВИЧ, В. И. МОССАКОВСКИЙ, Е. Ф. ПРОКОПАЛО

(Днепропетровск)

Экспериментально показано существование серии локальных закритических форм деформации продольно сжатой цилиндрической оболочки, которым соответствуют последовательно снижающиеся нижние критические нагрузки. Энергетические барьеры, которые необходимо преодолеть для перескока к закритическим формам, резко возрастают с увеличением числа вмятин. Определены области устойчивости каждой из закритических равновесных конфигураций. Наличие внутреннего давления приводит к существенному повышению критических напряжений, соответствующих локальным формам выпучивания.

1. Критические нагрузки продольно сжатой цилиндрической оболочки при лабораторном эксперименте могут быть предсказаны [1-8], если учитываются отклонения поверхности оболочки и торцевых плоскостей от идеальной формы. В этом случае потеря устойчивости происходит при верхнем критическом напряжении, величина которого зависит от внутренних, присущих самой конструкции, возмущений. В реальных условиях эксплуатации часто возникают дополнительные, внешние возмущения (локальные удары, вибрации, пульсации аэродинамического давления), которые в силу известных особенностей закритического поведения сжатой оболочки могут вызвать перескок к новым равновесным конфигурациям при напряжениях, значительно меньших, чем в лабораторном эксперименте.

Теоретические исследования в рассматриваемой области относятся, главным образом, к изучению начальной стадии послекритической деформации и определению нижней критической нагрузки в предположении, что волнообразование распространяется на всю поверхность [9-11]. При этом коэффициенты нижней критической нагрузки имеют весьма малые величины и стремятся к нулю при стремлении к нулю относительной толщины оболочки. Поскольку, однако, соответствующие перемещения и энергетические барьеры очень велики, перескок к таким формам выпучивания представляется сомнительным, и возникает вопрос о существовании ближних равне-