

β , τ устанавливается соотношением [3, 6]: $\cos \sqrt{\tau_0} = \beta / (\beta - 1)$ ($\beta \leq 0.5$), которое получено в результате подстановки $p=0$ в уравнение (2). В частности, при $\beta=0$ (случай Эйлера) $\tau_0 = 1/4\pi^2$. Критическая нагрузка совпадает с квазикритической, так как на нижней ветви зависимости $\omega^2(\tau)$ $d\omega^2/d\tau < 0$ и поэтому $\delta < 0$.

На фиг. 3 представлены области устойчивости на плоскости β , τ ($\tau > 0$). При $\eta \neq 0$, $k=0$ область устойчивости находится ниже кривой ABC , причем участок границы AB соответствует статическому, а BC — динамическому типам перехода к неустойчивости. В последнем случае критическая нагрузка определялась графически по найденной в результате численного решения уравнения $F_0(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \beta) = 0$ зависимости $\omega^2(\tau, \beta)$, которая качественно не отличается от обсуждавшейся для $\beta=1$. Кривая $ABDE$ является границей области устойчивости в случае $\eta=0$, $k \neq 0$. При переходе через ABD имеет место статическая неустойчивость, а при переходе через DE — динамическая. При $\eta \neq 0$, $k \neq 0$ точка слияния «статической» и «динамической» ветвей границы области устойчивости находится на отрезке BD , ее положение определяется соотношением между коэффициентами внешнего и внутреннего трения. Динамическая ветвь расположена между DE и BC и может быть найдена графически при любом конкретном значении отношения k/η .

Авторы признательны Е. П. Таноновой за проведенные на ЭЦВМ расчеты.

Поступила 2 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes. Z. angew. Math. und Phys., 1952, Bd 3, Nr 3.
2. Дейнеко К. С., Леонов М. Я. Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня. ПММ, 1955, т. 19, вып. 6.
3. Джанелидзе Г. Ю. Об устойчивости стержня при действии следящей силы. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 192.
4. Вологин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
5. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М., «Мир», 1974.
6. Bolotin V. V., Zhinzher N. I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. Internat. J. Solids and Structures, 1969, vol. 5, No. 9.
7. Жинжер Н. И. О дестабилизирующем влиянии трения на устойчивость неконсервативных упругих систем. Инж. ж. МГТ, 1968, № 3.
8. Жинжер Н. И. Об устойчивости неконсервативных упругих систем при наличии трения. Изв. вузов. Машиностроение, 1968, № 4.

УДК 539.3:543.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СВЯЗАННОЙ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

М. З. ГАТАУЛЛИН, В. А. ИВАНОВ

(Казань)

Рассматривается устойчивость тонкостенной ортотропной цилиндрической оболочки, жестко скрепленной с изотропным упругим наполнителем, при одновременном действии внешнего давления и осевого сжатия. Используя упрощения, связанные с частым волнообразованием, характерным при потере устойчивости таких конструкций [1-3], получены расчетные формулы, значительно уменьшающие объем вычислительных работ.

1. Вид рассматриваемой конструкции, ее параметры и действующие силы приведены на фиг. 1. Начальное напряженное состояние оболочки принимается безмоментным, а в наполнителе осуществляется плоское деформированное состояние. Тот-

да, согласно работе [4], усилия в оболочке N_1° , N_2° можно представить в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} N_1^\circ &= -(pR - \nu_2 T) \omega \\ N_2^\circ &= -(pR - \nu_2 T) [\nu_2 \omega + (1 + \alpha_0)^{-1}] \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем вводятся обозначения $\alpha_0 = 2G_s R / (1 - \nu_s) E_2 h$, $\omega = T / (pR - \nu_2 T)$, G_s , ν_s — модуль сдвига и коэффициент Пуассона заполнителя, E_i , ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона оболочки в направлении оси x ($i=1$) и угла θ ($i=2$).

Уравнения нейтрального равновесия для ортотропной оболочки, записанные относительно компонент перемещений u , v , w (u — осевое перемещение, v — перемещение по углу θ , w — прогиб) с учетом реакции заполнителя, принимаются в форме

$$(1.2) \quad \begin{aligned} R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + R(\nu_2 + \varepsilon_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \nu_2 R \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{R}{b_1} \sigma_{xr}(R) \\ R(\nu_1 + \varepsilon_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + R^2 \varepsilon_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{R}{b_2} \sigma_{r\theta}(R) \\ R\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} + w + c^2 \left[R^4 \kappa \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(2\varepsilon_2 + \nu_1) R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right] - \\ - \frac{N_1^\circ R^2}{b_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{N_2^\circ}{b_2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= - \frac{R}{b_2} \sigma_{rr}(R) \\ c^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \kappa = \frac{b_1}{b_2}, \quad b_i = \frac{E_i h}{R(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad \varepsilon_i = \frac{b}{2b_i}, \quad b = \frac{2Gh}{R} \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

где G — модуль сдвига в оболочке, σ_{xr} , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} — напряжения на поверхности контакта ($r=R$).

Решения уравнений (1.2) выбираются из предположения о шарнирном опирании оболочки

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u &= U_{mn} \sin \lambda_m x \cos n\theta \\ v &= V_{mn} \cos \lambda_m x \sin n\theta, \quad w = W_{mn} \cos \lambda_m x \cos n\theta \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_m = (2m+1)\pi/2L$; m , n — волновые числа; U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} — некоторые постоянные. Для последних, при подстановке (1.3) и (1.4) в (1.2), получается однородная система алгебраических уравнений, условие существования нетривиального решения которой определяет уравнение для нахождения критической нагрузки.

$$(1.4) \quad \frac{pR - \nu_2 T}{b_2 R} = \frac{c^2 [\kappa a_m^4 + 2(2\varepsilon_2 + \nu_1) n^2 a_m^2 + n^4] + (1 - \nu_1 \nu_2) (\varepsilon_1 a_m^4 \Theta_{mn}^{-1} + \alpha_{mn})}{n^2 [\nu_2 \omega + (1 + \alpha_0)^{-1}] + a_m^2 \omega}$$

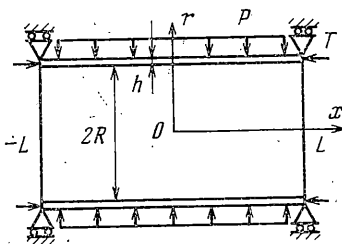
При получении (1.4) был введен коэффициент, характеризующий реакцию заполнителя

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \alpha_{mn} &= \frac{\kappa_2}{(1 - \nu_1 \nu_2) W_{mn}} \{ 2\sigma_{mn} - n \Theta_{mn}^{-1} [(1 - \nu_1 \nu_2 - \nu_2 \varepsilon_2) a_m^2 + \varepsilon_1 n^2] \mu_{mn} - \\ &- a_m \Theta_{mn}^{-1} (\nu_2 \varepsilon_2 a_m^2 - \varepsilon_1 n^2) \tau_{mn} \} \end{aligned}$$

и приняты следующие обозначения:

$$(1.6) \quad \Theta_{mn} = \varepsilon_1 n^4 + (1 - \nu_1 \nu_2 - 2\nu_1 \varepsilon_1) n^2 a_m^2 + \varepsilon_2 a_m^4, \quad a_m = \lambda_m R$$

$$\kappa_i = G_s b_i^{-1}, \quad \tau_{mn} = \frac{R}{\pi L G_s} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \sigma_{xr}(R) \sin \lambda_m x \cos n\theta \, dx \, d\theta$$



Фиг. 1

$$\mu_{mn} = \frac{R}{\pi L G_s} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \sigma_{\theta r}(R) \cos \lambda_m x \sin n\theta \, dx \, d\theta$$

$$\sigma_{mn} = \frac{R}{2\pi L G_s} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}(R) \cos \lambda_m x \cos n\theta \, dx \, d\theta$$

В выражении для $(pR - \nu_2 T) b_2^{-1} R^{-1}$ остается пока неизвестным α_{mn} . Для определения его необходимо решить задачу теории упругости для заполнителя. Интегралы уравнений Ляме в цилиндрических координатах известны [5]. В данном случае для сплошного заполнителя они будут иметь вид

$$(1.7) \quad s_x = [4(1-\nu_s) \psi_{mn}^{(1)}(z_m) + z_m \psi_{mn}^{(1)}(z_m) - \psi_{mn}^{(2)}(z_m)] \sin \lambda_m x \cos n\theta$$

$$s_\theta = -[n z_m^{-1} \psi_{mn}^{(2)}(z_m) + \psi_{mn}^{(3)}(z_m)] \cos \lambda_m x \sin n\theta$$

$$s_r = [-z_m \psi_{mn}^{(1)}(z_m) + \psi_{mn}^{(2)}(z_m) + n z_m^{-1} \psi_{mn}^{(3)}(z_m)] \cos \lambda_m x \cos n\theta$$

$$\psi_{mn}^{(i)}(z_m) = A_{mn}^{(i)} I_n(z_m) I_n^{-1}(a_m), \quad z_m = \lambda_m r$$

где I_n — модифицированная функция Бесселя, $A_{mn}^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) — постоянные интегрирования, s_x, s_θ, s_r — проекции вектора перемещения на оси x, θ, r соответственно. Выражая $\sigma_{rr}, \sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}$ через перемещения s_x, s_θ, s_r (1.7) по закону Гука, интегралы (1.6) и амплитуда прогиба W_{mn} будут равны

$$(1.8) \quad \tau_{mn} = [n^2 + 2a_m^2 + 4(1-\nu_s) \Delta_{mn}] A_{mn}^{(1)} - 2\Delta_{mn} A_{mn}^{(2)} - n A_{mn}^{(3)}$$

$$\mu_{mn} = a_m^{-1} [n a_m^2 A_{mn}^{(1)} + 2n(1-\Delta_{mn}) A_{mn}^{(2)} - (2n^2 + a_m^2 - 2\Delta_{mn}) A_{mn}^{(3)}]$$

$$\sigma_{mn} = a_m^{-1} [-(1-2\nu_s + \Delta_{mn}) a_m^2 A_{mn}^{(1)} + (n^2 + a_m^2 - \Delta_{mn}) A_{mn}^{(2)} - n(1-\Delta_{mn}) A_{mn}^{(3)}]$$

$$w_{mn} = a_m^{-1} [-a_m^2 A_{mn}^{(1)} + \Delta_{mn} A_{mn}^{(2)} + n A_{mn}^{(3)}], \quad \Delta_{mn} = a_m I_n'(a_m) I_n^{-1}(a_m)$$

Для определения связи между постоянными $A_{mn}^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) используется условие непрерывности перемещений в касательной плоскости (условие непрерывности нормальных перемещений уже использовано при введении α_{mn}). Это равносильно выполнению первых двух уравнений системы (1.2), где вместо u, v, w необходимо подставить s_x, s_θ, s_r из (1.7) и вместо $\sigma_{xr}(R), \sigma_{r\theta}(R) - b_1 \kappa_1 \tau_{mn}, b_2 \kappa_2 \mu_{mn}$ из (1.8) соответственно. Из полученной системы находим

$$(1.9) \quad A_{mn}^{(2)} = A_{mn}^{(1)} (C_{mn}^{(3)} C_{mn}^{(4)} - C_{mn}^{(1)} C_{mn}^{(6)}) / (C_{mn}^{(2)} C_{mn}^{(6)} - C_{mn}^{(3)} C_{mn}^{(5)})$$

$$A_{mn}^{(3)} = A_{mn}^{(1)} (C_{mn}^{(1)} C_{mn}^{(5)} - C_{mn}^{(2)} C_{mn}^{(4)}) / (C_{mn}^{(2)} C_{mn}^{(6)} - C_{mn}^{(3)} C_{mn}^{(5)})$$

$$C_{mn}^{(1)} = 4(a_m^2 + \varepsilon_1 n^2) (1-\nu_s) - \nu_2 a_m^2 + \kappa_1 (2a_m^2 + n^2) + [a_m^2 + \varepsilon_1 n^2 + 4(1-\nu_s) \kappa_1] \Delta_{mn}$$

$$C_{mn}^{(2)} = -a_m^2 - n^2 (2\varepsilon_1 + \nu_2) + (\nu_2 - 2\kappa_1) \Delta_{mn}, \quad C_{mn}^{(3)} = n(\nu_2 - \kappa_1) - n(\nu_2 + \varepsilon_1) \Delta_{mn}$$

$$C_{mn}^{(4)} = [4(\nu_1 + \varepsilon_2) (1-\nu_s) - 1 + \kappa_2] n a_m^2 + (\nu_1 + \varepsilon_2) n a_m^2 \Delta_{mn}$$

$$C_{mn}^{(5)} = -n[(\nu_1 + 2\varepsilon_2) a_m^2 + n^2 - 2\kappa_2] + n(1-2\kappa_2) \Delta_{mn}$$

$$C_{mn}^{(6)} = n^2(1-2\kappa_2) - \kappa_2 a_m^2 - (n^2 + \varepsilon_2 a_m^2 - 2\kappa_2) \Delta_{mn}$$

Если не учитывается касательное взаимодействие между оболочкой и заполнителем, связь между постоянными $A_{mn}^{(i)}$ находится из условия $\tau_{mn} = \mu_{mn} = 0$ или непосредственно из (1.9) при $\kappa_1 \rightarrow \infty$ и $\kappa_2 \rightarrow \infty$.

Таким образом, подставляя (1.9) в (1.8), а последние в (1.5), определяют коэффициент, характеризующий реакцию заполнителя. Для нахождения критической нагрузки, при известном α_{mn} , достаточно выражение (1.4) проминимизировать по m и n . Эту минимизацию рационально проводить численно.

2. Для упрощения полученных результатов воспользуемся тем, что потеря устойчивости рассматриваемой конструкции [6] сопровождается частым волнообразованием. Поэтому в дальнейшем будем пренебрегать всеми членами, имеющими порядок единицы по сравнению с $\lambda_{mn} = n^2 + a_m^2$. В этом случае для модифицированной функции Бесселя и ее производной справедливы следующие асимптотические разложения [7]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \text{при } a_m > 0 \text{ и } n > a_m \\ \sqrt{2\pi} I_n(a_m) &\approx \left[1 - \frac{1}{12\sqrt{\lambda_{mn}}} + \frac{1}{288\lambda_{mn}} + \frac{5a_m^2}{24\lambda_{mn}\sqrt{\lambda_{mn}}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{77a_m^2}{288\lambda_{mn}^2} \right] \frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \exp \left[\sqrt{\lambda_{mn}} - n \operatorname{Arsh} \frac{n}{a_m} \right] \\ \sqrt{2\pi} I_n^*(a_m) &\approx \left[1 - \frac{1}{12\sqrt{\lambda_{mn}}} + \frac{1}{288\lambda_{mn}} - \frac{7a_m^2}{24\lambda_{mn}\sqrt{\lambda_{mn}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{79a_m^2}{288\lambda_{mn}^2} \right] \frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \exp \left[\sqrt{\lambda_{mn}} - n \operatorname{Arsh} \frac{n}{a_m} \right] \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \text{при } a_m > 0 \text{ и } n < a_m \\ \sqrt{2\pi} I_n(a_m) &\approx \left[1 + \frac{1}{8\sqrt{\lambda_{mn}}} + \frac{9}{128\lambda_{mn}} - \frac{5n^2}{24\lambda_{mn}\sqrt{\lambda_{mn}}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{77n^2}{192\lambda_{mn}^2} \right] \frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \exp \left[\sqrt{\lambda_{mn}} - n \operatorname{Arsh} \frac{n}{a_m} \right] \\ \sqrt{2\pi} I_n^*(a_m) &\approx \left[1 - \frac{3}{8\sqrt{\lambda_{mn}}} - \frac{15}{128\lambda_{mn}} - \frac{7n^2}{24\lambda_{mn}\sqrt{\lambda_{mn}}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{45}{256\lambda_{mn}\sqrt{\lambda_{mn}}} + \frac{33n^2}{64\lambda_{mn}^2} \right] \frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \exp \left[\sqrt{\lambda_{mn}} - n \operatorname{Arsh} \frac{n}{a_m} \right] \end{aligned}$$

Используя формулы (2.1) или (2.2) при вычислении $A_{mn}^{(2)}$, $A_{mn}^{(3)}$ (1.9), а последние при определении α_{mn} (1.5), после довольно громоздких алгебраических операций получается асимптотическое выражение для коэффициента, характеризующего реакцию заполнителя

$$(2.3) \quad \alpha_{mn} = \frac{a_s \sqrt{\lambda_{mn}}}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[1 + \frac{d_s}{\sqrt{\lambda_{mn}}} + o \left(\frac{1}{\lambda_{mn}} \right) \right]$$

Здесь при жестком закреплении оболочки с заполнителем и $n > a_m$ ($s=1$)

$$(2.4) \quad a_1 = \frac{4(1-\nu_s)\kappa_2}{3-4\nu_s}, \quad d_1 = \frac{(1-2\nu_s)[3-4\nu_s-2(1-2\nu_s)\kappa_2]}{2(1-\nu_s)(3-4\nu_s)}$$

а при $n < a_m$ ($s=2$)

$$a_2 = a_1, \quad d_2 = \frac{(1-2\nu_s)[5-6\nu_s-2\nu_2(3-4\nu_s)+2(1-2\nu_s)\kappa_1]}{2(1-\nu_s)(3-4\nu_s)}$$

В случае отсутствия касательного взаимодействия между оболочкой и заполнителем соответствующие формулы (2.4) примут вид

$$(2.5) \quad a_1 = \frac{\kappa_2}{1-\nu_s}, \quad d_1 = \frac{(1-2\nu_s)}{2(1-\nu_s)}, \quad (n > a_m)$$

$$a_2 = a_1, \quad d_2 = -(1-2\nu_s), \quad (n < a_m)$$

На основании (2.3) выражение для определения критической нагрузки (1.4) будет

$$(2.6) \quad \frac{pR - \nu_2 T}{b_2 R} = A(\xi) \eta + \frac{B(\xi)}{\sqrt{\eta}} + \frac{C(\xi)}{\eta}$$

$$A(\xi) = (1 + \alpha_0) \frac{c^2 [\kappa \xi^2 + 2(2\varepsilon_2 + \nu_1)(1 - \xi)\xi + (1 - \xi)^2]}{\xi [\omega(1 + \alpha_0)(\nu_2 - \nu_2\xi + \xi) + 1 - \xi]}$$

$$B(\xi) = \frac{a_s(1 + \alpha_0)}{\omega(1 + \alpha_0)(\nu_2 - \nu_2\xi + \xi) + 1 - \xi}$$

$$C(\xi) = \frac{(1 - \nu_1\nu_2)\varepsilon_2\xi^2 + d_s[\varepsilon_1(1 - \xi)^2 + (1 - \nu_1\nu_2 - 2\nu_1\varepsilon_1)(1 - \xi)\xi + \varepsilon_2\xi^2]}{\{[\nu_2\omega + (1 + \alpha_0)^{-1}](1 - \xi)\xi^{-1} + \omega\}[\varepsilon_1(1 - \xi)^2 + (1 - \nu_1\nu_2 - 2\nu_1\varepsilon_1)(1 - \xi)\xi + \varepsilon_2\xi^2]}$$

Здесь вместо параметров n и m , определяющих форму волнообразования оболочки при выпучивании, введены новые параметры ξ , η , согласно соотношениям

$$(2.7) \quad (n^2 + a_m^2)\xi = a_m^2, \quad \eta = a_m^2$$

Наименьшее значение правой части выражения (2.6) по отношению к параметру η реализуется при

$$(2.8) \quad \eta = (\alpha^2 + 3\beta)^{1/2} - (2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 3\beta} - \alpha^2)^{1/2}, \quad \alpha = (\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \beta^3})^{1/2} + (\gamma - \sqrt{\gamma^2 + \beta^3})^{1/2}$$

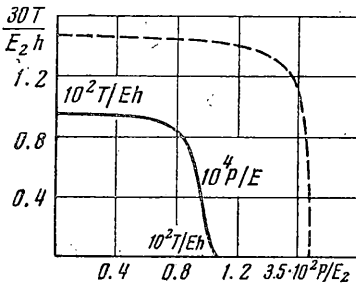
$$(2.9) \quad \beta = \frac{1}{3} \frac{C - (1 - \xi)\xi C^*}{A + (1 - \xi)\xi A^*}, \quad \gamma = \frac{1}{64} \left[\frac{B - 2(1 - \xi)\xi B^*}{A + (1 - \xi)\xi A^*} \right]^2$$

точка в степени означает производную по ξ . Аналитическое определение минимального значения $(pR - \nu_2 T)/b_2 R$ по отношению к параметру ξ не удается. Эту минимизацию необходимо проводить численно при $0 < \xi \leq 1$.

В случае действия на оболочку только внешнего давления ($T=0$) имеем $\omega=0$ и наименьшее значение критической нагрузки будет осуществляться при $m=0$ или $\eta = (\pi R/2L)^2$. Когда же потеря устойчивости вызвана осевым сжатием ($p=0$), то $\omega = -\nu_2^{-1}$ и η будет определяться из (2.8) при $\xi=1$.

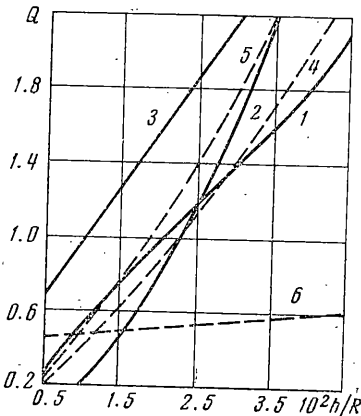
Некоторые результаты расчетов критической нагрузки по формуле (2.6) приведены на фиг. 2-4. При этом сплошные линии соответствуют изотропной оболочке с параметрами $\nu=0.3$, $h/R=0.01$, $L/R=2$, $E_s/E=10^{-3}$, а штриховые — ортотропной оболочке (стеклотекстолит КАСТ-В) с параметрами $\nu_1=0.193$, $\nu_2=0.11$, $h/R=0.01$, $L/R=2$, $G_s/E_1=0.3211 \cdot 10^{-2}$, $G_s/E_2=0.5634 \cdot 10^{-2}$. Кроме того, $\nu_s=0.45$ и введены следующие безразмерные параметры:

$$Q = \frac{(pR - \nu_2 T)(1 - \nu_1 \nu_2)}{RE_2}, \quad Q^* = \frac{pR - \nu_2 T}{b_2 R}$$

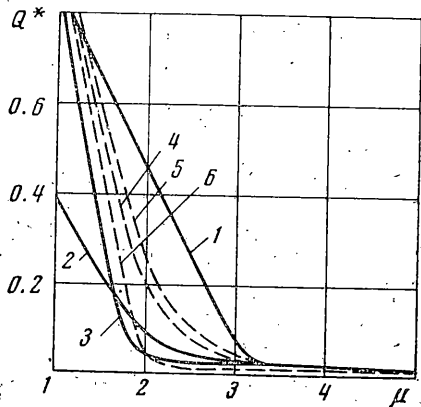


Фиг. 2

Как видно из фиг. 2, где построена зависимость критической осевой силы от внешнего давления, область устойчивости довольно близка к прямоугольнику со сторонами, равными критической нагрузке, полученной в отсутствие внешнего давления, и критической нагрузке, полученной при отсутствии осевой силы. Эта особенность проявляется наиболее полно для ортотропной оболочки.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 построена зависимость критических нагрузок от относительной толщины оболочки. При этом кривые 1, 4 соответствуют величинам $10^4 Q$ и $10^3 Q$ при $pR=T$; кривые 2, 5 — $10^4 Q$ при $p=0$; кривые 3, 6 — $10^4 Q$ и $10^2 Q$ при $T=0$ соответственно. Как и следовало ожидать, с увеличением толщины оболочки увеличивается и критическая нагрузка.

График зависимости Q^* от отношения жесткости заполнителя к жесткости оболочки ($E_s/E=10^{-\mu}$, $E_s/E_1=10^{-\mu}E/E_1$, $E_s/E_2=10^{-\mu}E/E_2$, $\mu=1, 2, \dots$) приводится на фиг. 4, где кривые 1, 4 соответствуют $10 Q^*$ и Q^* при $pR=T$; кривые 2, 5 — $10 Q^*$ при $p=0$; кривые 3, 6 — $0.1 Q^*$ и $10^{-3} Q^*$ при $T=0$ соответственно. Здесь следует отметить, что при $E_s/E < 10^{-3} Q^*$ стремится к значению критической нагрузки для пустой оболочки; Q^* возрастает с уменьшением μ по прямолинейному закону.

Как показали расчеты, учет касательного взаимодействия между оболочкой и заполнителем приводит к понижению критических нагрузок. Однако во всех рассмотренных случаях это понижение не превышает 1%.

ЛИТЕРАТУРА

Поступила 27, XI 1972

1. Seide P. The stability under axial compression and lateral pressure of circular cylindrical shells with a soft elastic core. J. Aerospace Sci., 1962, vol. 29, No. 7.
2. Brush D. O., Almroth B. O. Buckling of core-stabilized cylinders under axisymmetric external loads. J. Aerospace Sci., 1962, vol. 29, No. 10.
3. Власов В. В., Гужь А. Н. Исследование устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек с заполнителем при осевом сжатии. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 5.
4. Гагаулли М. З., Иванов В. А., Ильгамов М. А. Прочность соосных цилиндрических оболочек с упругим заполнителем. Тр. семинара по теории оболочек. Казань, 1971, вып. 2.
5. Грей Э., Мэтьюс Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Изд-во иностр. лит., 1949.
6. Иванов В. А. Обзор литературы по устойчивости оболочек с упругим заполнителем. Тр. семинара по теории оболочек. Казань, 1971, вып. 2.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. «Наука», 1967, т. 2.

УДК 539.3:534.4

ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛАСТИНЕ

М. Ш. ИСРАИЛОВ

(Грозный)

Предлагается эффективное решение плоской задачи дифракции акустической волны ступенчатого профиля на жесткой, неподвижной пластине конечной ширины, когда угол падения волны на пластину произволен.

В общей постановке подобная задача рассматривалась в работе [1]. Эффективное решение в случае волны падающей по нормали к пластине дано в [2].

Пусть пластина занимает область $0 \leq x \leq 2$, $y=0$, падающая волна достигает ее в момент времени $t=0$, и угол между направлением распространения падающей волны и плоскостью пластины, т. е. осью x (фиг. 1) равен α . Всегда можно считать $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Известно [2, 3], что избыточное давление $p(x, y, t)$ в жидкости при $t > 0$, удовлетворяющее волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

можно в области дифракции искать в виде

$$(1) \quad p_+ = P(x, y, t) - p_*(x, y, t), \quad p_- = P(x, -y, t) + p_*(x, -y, t)$$

Здесь $P(x, y, t)$ — падающая волна давления, имеющая в рассматриваемой задаче вид функции Хевисайда $P(x, y, t) = h(t - y \sin \alpha - x \cos \alpha)$ и введены обозначения: