

Здесь $2\gamma_p$ — корни трансцендентного уравнения $\sin 2\gamma_p = 2\gamma_p$; $\operatorname{Re} \gamma_p > 0$. Для $I_{pj}^{(s)}$, $I_{pj}^{(c)}$, I_{kj} справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$I_{pj}^{(s)} = -2 \frac{\cos \gamma_p}{\gamma_p} + 2(2j+1) \frac{\sin \gamma_p}{\gamma_p^2} - \frac{2j(2j+1)}{\gamma_p^2} I_{pj-1}^{(s)}$$

$$I_{pj}^{(c)} = 2 \frac{\sin \gamma_p}{\gamma_p} + 4j \frac{\cos \gamma_p}{\gamma_p^2} - 2j \frac{(2j-1)}{\gamma_p^2} I_{pj-1}^{(c)}$$

$$I_{kj} = 2(2j+1) \frac{(-1)^k}{\sigma_k^2} - 2j \frac{(2j+1)}{\sigma_k^2} I_{kj-1}$$

Численно был исследован изгиб плиты, когда $M_1 = M_2 = M$. Приведем значение σ_s на контуре правого отверстия, определение которых представляет наибольший интерес при изучении концентрации напряжений, возникающих возле отверстий, в точке $\xi=1$, угол $\theta=\pi$, где эти напряжения являются наибольшими.

$$R=2, \quad \begin{aligned} M^{-1}\sigma_s &= 2.2709 \lambda + 0.17043 \lambda^2 + \dots & (2l=6) \\ M^{-1}\sigma_s &= 2.4412 \lambda + 0.30259 \lambda^2 + \dots & (2l=5) \\ M^{-1}\sigma_s &= 2.8951 \lambda + 0.68952 \lambda^2 + \dots & (2l=4) \end{aligned}$$

$$R=3, \quad \begin{aligned} M^{-1}\sigma_s &= 2.4219 \lambda + 0.24834 \lambda^2 + \dots & (2l=7) \\ M^{-1}\sigma_s &= 2.6338 \lambda + 0.39823 \lambda^2 + \dots & (2l=6) \\ M^{-1}\sigma_s &= 3.1410 \lambda + 0.79276 \lambda^2 + \dots & (2l=5) \end{aligned}$$

$$R=4, \quad \begin{aligned} M^{-1}\sigma_s &= 2.5503 \lambda + 0.30908 \lambda^2 + \dots & (2l=8) \\ M^{-1}\sigma_s &= 2.7821 \lambda + 0.46393 \lambda^2 + \dots & (2l=7) \\ M^{-1}\sigma_s &= 3.3025 \lambda + 0.85303 \lambda^2 + \dots & (2l=6) \end{aligned}$$

Приведенные результаты показывают, что при $\lambda=1/4$ поправки второго приближения для $R=2$ и $2l=6$ составляют 2%, для $2l=5$ — составляют 3% и 6% — для $2l=4$. С увеличением радиуса отверстия до $R=4$ погрешность возрастает соответственно до 3%, 4%, 7%. Здесь можно ограничиться двумя приближениями.

Когда $\lambda=1$, погрешность приближенной теории для приведенных расстояний при $R=2$ равна 8%, 12%, 24%, при $R=3$ и $2l=5$ поправка второго приближения становится существенной — до 25%, при $R=4$ и $2l=6$ — до 26%.

Анализ результатов показывает, что при толщине плиты меньше одной четверти радиуса большего отверстия, ослабляющего плиту, коэффициент концентрации напряжений определяется достаточно точно на основе приближенной теории.

При увеличении радиуса большего отверстия или при сближении отверстий погрешность соответственно возрастает.

Поступила 29 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н., Шалдырван В. А. Квазирегулярность бесконечной системы в задачах теории упругости для пластин с круговыми отверстиями. Докл. АН УССР. Сер. А, 1970, № 3.
2. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Приближенный метод определения напряженного состояния плиты с круговыми отверстиями в трехмерной постановке. В сб.: Математическая физика, вып. 10. Киев, «Наукова думка», 1971.

УДК 624.07:534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО «СЛЕДЯЩЕЙ» СИЛОЙ

Г. Г. ДЕНИСОВ, В. В. НОВИКОВ

(Горький)

Задача об устойчивости прямолинейной формы равновесия упругого стержня, заземленного на одном конце и нагруженного на другом следящей силой, рассматривалась рядом авторов (например, [1-3]) в линейном приближении без учета внутреннего трения в материале стержня. Критическая нагрузка, соответствующая динамическому нагружению устойчивости, определялась по слиянию двух наименьших корней характеристического уравнения. Некорректность такого подхода была отмечена В. В. Болотиным [4] и состоит в том, что рассмотренный случай

относится к критическим по Ляпунову, поэтому в рамках построенной модели нельзя ничего сказать об устойчивости системы при нагрузках, меньших найденной по слиянию корней. В дискретной идеализации на модели двух жестких стержней, сочлененных упруго, было показано [4, 5], что сам факт учета трения приводит к меньшему значению критической нагрузки по сравнению с определенной по слиянию частот. В монографии [4] исследовалась зависимость критического значения параметра нагрузки от отношения парциальных коэффициентов трения. Статьи [6-8] содержат обобщение и дальнейшее развитие результатов [4], касающихся условий «дестабилизации малым трением» как дискретных, так и распределенных систем.

В предлагаемой работе исследуется устойчивость прямолинейной формы равновесия гибкого упругого стержня постоянного сечения, защемленного на одном конце ($x=0$) и нагруженного на другом ($x=l$) силой T , следящей с некоторым опережением или отставанием за касательной к упругой линии, так что тангенс угла между прямой, вдоль которой действует сила, и осью Ox , направленной по упругой линии недеформированного стержня, равен $\beta dy(l)/dx$, где y — поперечный изгиб стержня, β — некоторая постоянная. Учет внутреннего трения в материале стержня производится в соответствии с гипотезой Фохта, а сила внешнего трения принимается пропорциональной скорости элемента стержня.

Уравнение малых поперечных колебаний стержня и краевые условия после введения безразмерных переменных и параметров принимают вид

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad y = \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0$$

$$\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x=l, \quad \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \tau(1-\beta) \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

В качестве масштабов времени и длины выбраны соответственно $l^2(m/EI)^{1/2}$ и l . Безразмерные параметры нагрузки τ , внутреннего η и внешнего трения k определяются равенствами

$$\tau = \frac{Tl^2}{EI}, \quad \eta = \frac{\kappa_1}{l^2} \left(\frac{EI}{m}\right)^{1/2}, \quad k = \kappa_2 l^2 (mEI)^{-1/2}$$

где EI — жесткость сечения при изгибе, m — масса единицы длины стержня, κ_1 и κ_2 — коэффициенты внутреннего и внешнего трения соответственно.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет вид

$$(2) \quad F(p, \tau, \eta, k, \beta) = F(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 - \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \sin \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2 +$$

$$+ 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 \cos \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 - (1-\beta) (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) [\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cos \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2 +$$

$$+ 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2] = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \left[\frac{\pm \tau + \sqrt{\tau^2 - 4p(p+k)(1+\eta p)}}{2(1+\eta p)} \right]^{1/2}$$

(p — характеристический показатель). Если силы демпфирования не учитываются, то характеристическое уравнение напишется в форме

$$(3) \quad F_0(p, \tau, \beta) = 0$$

При $\tau=0$ корни уравнения (3) являются мнимыми $p_j = i\omega_j$, $j=1, 2, \dots$ ($i = \sqrt{-1}$). Увеличение нагрузки τ приводит к изменению спектра частот $\omega_j(\tau)$. Наибольшее изменение претерпевают нижние частоты так, что в зависимости от значения параметра β либо ω_1 и ω_2 сливаются при $\tau=\tau_0$, либо ω_1 обращается в нуль при $\tau=\tau_0$, после чего один из характеристических показателей p_1, p_2 в первой или p_1 во второй ситуации обретает положительную действительную часть. Случай $\eta=k=0$ относится к критическим по Ляпунову и поэтому для разрешения вопроса об устойчивости при нагрузках, меньших квазикритической [6] (τ_0 или τ_0), необходимо либо учесть нелинейные члены в уравнении, что существенно усложнило бы задачу, либо принять во внимание силы трения, что приближает модель к реальным системам, и исследование устойчивости может быть проведено в рамках линейного подхода.

Пусть силы внешнего и внутреннего трения малы, тогда характеристический показатель p получит малое приращение δ , т. е. $p = i\omega + \delta$, где δ — вообще говоря, комплексное число. В этом случае $F(\lambda_1, \lambda_2)$ можно представить в виде ряда по η, k, δ и

ограничиться в разложении членами первого порядка $F(\lambda_1, \lambda_2) = F(\lambda_{10}, \lambda_{20}) + (F_p)_0 \delta + (F_\eta)_0 \eta + (F_k)_0 k = 0$, где $F_z = \partial F / \partial z$, символ $(\dots)_0$ означает, что выражение берется при $\eta = k = 0$, $p = i\omega$. Поскольку $F_0(\lambda_{10}, \lambda_{20}) = 0$, приращение характеристического числа δ определяется выражением

$$(4) \quad \delta = - \frac{(F_\eta)_0}{(F_p)_0} \eta - \frac{(F_k)_0}{(F_p)_0} k$$

Задавая η и k и вычисляя частные производные, входящие в (4), для различных значений ω_j и τ , связанных соотношением (3), можно определить приращение характеристических чисел δ_j , а затем и критическую нагрузку τ_j , как такое значение параметра τ , при котором δ_j обращается в нуль. Это требует громоздких вычислений для каждой ветви $\omega_j(\tau)$ в отдельности. Однако можно указать графический метод определения τ_j по известной зависимости $\omega_j(\tau)$.

Для этого выразим входящие в (4) частные производные F_η и F_k через F_p , F_τ . Обратимся к следующим соотношениям:

$$F_p = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial p} \quad F_\tau = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau}$$

$$F_\eta = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \quad F_k = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial k} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial k}$$

Выразив из первой пары приведенных соотношений $\partial F / \partial \lambda_1$ и $\partial F / \partial \lambda_2$ через F_p и F_τ , получим

$$(5) \quad F_\eta = \frac{1}{\Delta_1} (\Delta_2 F_p + \Delta_3 F_\tau), \quad F_k = \frac{1}{\Delta_1} (\Delta_4 F_p + \Delta_5 F_\tau)$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} \frac{\partial \lambda_2}{\partial p}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta}$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial p}, \quad \Delta_4 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial k} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} \frac{\partial \lambda_2}{\partial k}, \quad \Delta_5 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} \frac{\partial \lambda_2}{\partial k} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial k} \frac{\partial \lambda_2}{\partial p}$$

Подстановка (5) в (4) дает

$$(6) \quad \delta = - \frac{1}{\Delta_{10}} \left\{ \left[\Delta_{20} + \Delta_{30} \frac{(F_\tau)_0}{(F_p)_0} \right] \eta + \left[\Delta_{40} + \Delta_{50} \frac{(F_\tau)_0}{(F_p)_0} \right] k \right\}$$

где $\Delta_{i0} = \Delta_i$ при $\eta = k = 0$, $p = i\omega$.

Воспользовавшись тем, что

$$\left(\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial p} \right)_0 = 2 \left(\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial k} \right)_0 = - \frac{i\omega}{\mu \lambda_{10,20}}, \quad \left(\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial \eta} \right)_0 = - \frac{i\omega \lambda_{10,20}^3}{2\mu}, \quad \left(\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial \tau} \right)_0 = \pm \frac{\lambda_{10,20}}{2\mu}$$

где $\mu = (\tau^2 + 4\omega^2)^{1/2}$, получим

$$\Delta_{10} = 2\Delta_{40} = \frac{i}{2\mu}, \quad \Delta_{20} = \frac{i\omega^2}{4\mu}, \quad \Delta_{30} = \frac{\omega\tau}{2\mu}, \quad \Delta_{50} = 0$$

Можно показать, что

$$(F_p)_0 = -i \frac{\partial F_0}{\partial \omega}, \quad (F_\tau)_0 = \frac{\partial F_0}{\partial \tau}$$

а дифференцируя $F_0(\omega, \tau, \beta)$ по τ , имеем

$$\frac{\partial F_0}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\tau} + \frac{\partial F_0}{\partial \tau} = 0$$

С помощью полученных соотношений приводим (6) к виду

$$(7) \quad \delta = - \frac{1}{2} \left[\left(\omega^2 - \tau \frac{d\omega^2}{d\tau} \right) \eta + k \right]$$

Каждое ω_j получает приращение δ_j , обусловленное учетом сил трения, в соответствии с (7). При малых, но фиксированных η и k формула (7) справедлива лишь для нижних ветвей спектра собственных частот, так как должно выполняться неравенство $|\delta_j| \ll \omega_j$. В частности, при $\tau=0$, $\omega_j \ll 2/\eta$.

Нагрузка, соответствующая нарушению устойчивости на j -й форме, определяется из уравнения

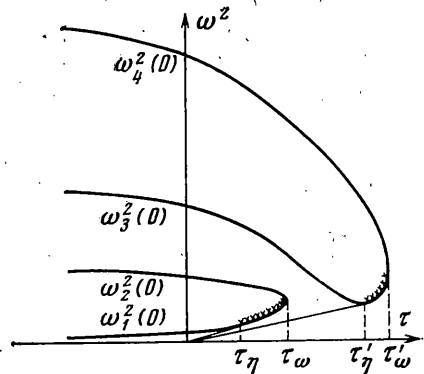
$$(8) \quad \omega_j^2 - \tau_j \left(\frac{d\omega_j^2}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_j} - \frac{k}{\eta} = 0$$

Это выражение имеет простую геометрическую интерпретацию: τ_j отвечает точке касания кривой $\omega_j^2(\tau)$, определяемой из уравнения (3), и прямой, проведенной из точки $\tau=0$, $\omega^2 = -k/\eta$.

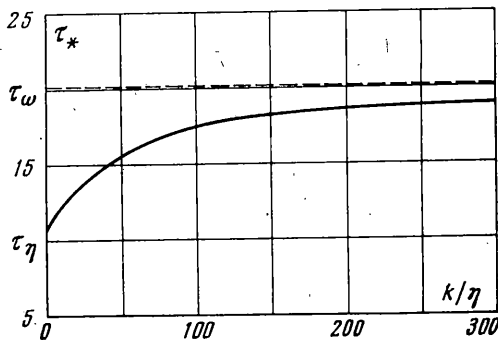
Проиллюстрируем изложенное на примере тангенциально нагруженного стержня ($\beta=1$). На фиг. 1 представлена качественная картина зависимости квадратов двух нижних пар собственных частот от нагрузки. Зависимость от τ лежащих выше ветвей аналогична $\omega_3^2(\tau)$ и $\omega_4^2(\tau)$, причем каждая последующая пара частот сливается при большей нагрузке τ , чем предыдущая.

Крестиками на фигуре помечены участки неустойчивости, где в соответствии с (7) $\delta > 0$. Соотношение (8) и фиг. 1 позволяют заключить, что, во-первых, устойчивость стержня нарушается на нижней форме колебаний, во-вторых, стержень, нагруженный тангенциальной растягивающей силой ($\tau < 0$), устойчив при любых τ . Нагрузка τ_* , найденная с помощью графического метода по зависимости $\omega_1^2(\tau)$, взятой из работы [2], равна 10.5, т. е. почти в два раза меньше квазикритического значения τ_ω ($\tau_\omega = 19.77$), причем это различие зависит при малом η лишь от факта учета внутреннего трения в материале стержня, а не от его величины. Данный результат был получен в работах [6, 8] путем численного исследования устойчивости тангенциально нагруженного стержня.

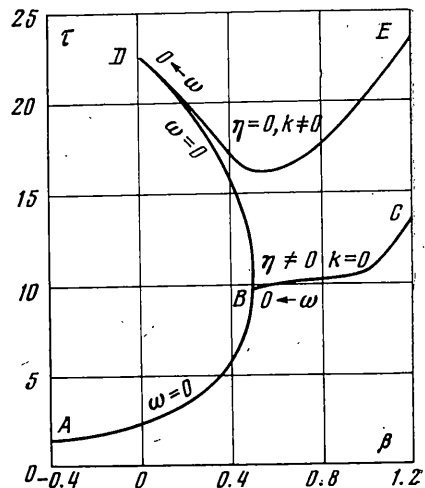
Критическое значение нагрузки τ_* , согласно (8), зависит от соотношения между параметрами, характеризующими внешнее и внутреннее трение. На графике, представленном на фиг. 2, приведена кривая $\tau_*(k/\eta)$, полученная для случая $\beta=1$ в результате вычислений по обсуждавшейся схеме. В частности, при $k \ll \eta$ $\tau_* \approx \tau_\eta$, а при $k \gg \eta$ $\tau_* \approx \tau_\omega$ (здесь k и η по-прежнему малы).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В общем случае (β — любое) устойчивость рассматриваемой системы может нарушаться как статически, так и динамически, причем тип перехода к неустойчивости определяется параметром β . Статическая граница области устойчивости на плоскости

β , τ устанавливается соотношением [3, 6]: $\cos \sqrt{\tau_0} = \beta / (\beta - 1)$ ($\beta \leq 0.5$), которое получено в результате подстановки $p=0$ в уравнение (2). В частности, при $\beta=0$ (случай Эйлера) $\tau_0 = 1/4\pi^2$. Критическая нагрузка совпадает с квазикритической, так как на нижней ветви зависимости $\omega^2(\tau)$ $d\omega^2/d\tau < 0$ и поэтому $\delta < 0$.

На фиг. 3 представлены области устойчивости на плоскости β , τ ($\tau > 0$). При $\eta \neq 0$, $k=0$ область устойчивости находится ниже кривой ABC , причем участок границы AB соответствует статическому, а BC — динамическому типам перехода к неустойчивости. В последнем случае критическая нагрузка определялась графически по найденной в результате численного решения уравнения $F_0(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \beta) = 0$ зависимости $\omega^2(\tau, \beta)$, которая качественно не отличается от обсуждавшейся для $\beta=1$. Кривая $ABDE$ является границей области устойчивости в случае $\eta=0$, $k \neq 0$. При переходе через ABD имеет место статическая неустойчивость, а при переходе через DE — динамическая. При $\eta \neq 0$, $k \neq 0$ точка слияния «статической» и «динамической» ветвей границы области устойчивости находится на отрезке BD , ее положение определяется соотношением между коэффициентами внешнего и внутреннего трения. Динамическая ветвь расположена между DE и BC и может быть найдена графически при любом конкретном значении отношения k/η .

Авторы признательны Е. П. Таноновой за проведенные на ЭЦВМ расчеты.

Поступила 2 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes. Z. angew. Math. und Phys., 1952, Bd 3, Nr 3.
2. Дейнеко К. С., Леонов М. Я. Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня. ПММ, 1955, т. 19, вып. 6.
3. Джанелидзе Г. Ю. Об устойчивости стержня при действии следящей силы. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 192.
4. Вологин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
5. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М., «Мир», 1974.
6. Bolotin V. V., Zhinzher N. I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. Internat. J. Solids and Structures, 1969, vol. 5, No. 9.
7. Жинжер Н. И. О дестабилизирующем влиянии трения на устойчивость неконсервативных упругих систем. Инж. ж. МГТ, 1968, № 3.
8. Жинжер Н. И. Об устойчивости неконсервативных упругих систем при наличии трения. Изв. вузов. Машиностроение, 1968, № 4.

УДК 539.3:543.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СВЯЗАННОЙ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

М. З. ГАТАУЛЛИН, В. А. ИВАНОВ

(Казань)

Рассматривается устойчивость тонкостенной ортотропной цилиндрической оболочки, жестко скрепленной с изотропным упругим наполнителем, при одновременном действии внешнего давления и осевого сжатия. Используя упрощения, связанные с частым волнообразованием, характерным при потере устойчивости таких конструкций [1-3], получены расчетные формулы, значительно уменьшающие объем вычислительных работ.

1. Вид рассматриваемой конструкции, ее параметры и действующие силы приведены на фиг. 1. Начальное напряженное состояние оболочки принимается безмоментным, а в наполнителе осуществляется плоское деформированное состояние. Тот-