ностей шероховатой поверхности, ε — относительное сближение контактирующих поверхностей, определяемое по Н. Б. Демкину [9], f — коэффициент трения покоя.

Анализ приведенных формул показывает удовлетворительное качественное и количественное соответствие их с экспериментом. В таблице сопоставлены значения рассеянной энергии в контакте стальных поверхностей с шероховатостью восьмого класса при различных сжимающих и сдвигающих силах и коэффициентах трения, полученные теоретически и экспериментально.

В динамических условиях полученные теоретические зависимости проверялись по осциллограммам затухающих колебаний балки, консольно защемленной между шероховатыми плитами пресса.

Поступила 6 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Генкин М. Д., Сергеев В. И.*, Акустическая динамика машин. Вестн. АН СССР, 1968, № 11.
2. *Коняхин И. Р., Митрофанов Б. П.* О диссипации энергии в упругом дискретном контакте. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
3. *Пановко Я. Г.* Проблемы теории конструкционного демпфирования. В сб.: Динамика машин, М., Машгиз, 1963.
4. *Писаренко Г. С.* Основные аспекты исследований рассеяния энергии при механических колебаниях. Рассеяние энергии при колебании упругих систем. Киев, «Наукова думка», 1966.
5. *Матвеев В. В., Яковлев А. П., Балюк А. Д., Ржавин Л. Н.* Исследование демпфирующих свойств замкового соединения компрессорных лопаток при повышенной температуре. Термопрочность материалов и конструктивных элементов, Киев, «Наукова думка», 1967.
6. *Коняхин И. Р.* Теория предварительных смещений применительно к вопросам контактирования деталей. Изд-во Томск. ун-та, 1965.
7. *Mindlin R. D.* Compliance of elastic bodies in contact. J. Appl. Mech., 1949, vol. 16, No. 3.
8. *Максак В. И.* Количественная оценка упругого предварительного смещения. Изв. вузов. Машиностроение, 1969, № 6.
9. *Демкин Н. Б.* Фактическая площадь касания твердых поверхностей, М., Изд-во АН СССР, 1962.

УДК 539.3

ИЗГИБ ПЛИТЫ С ДВУМЯ НЕРАВНЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В. Н. ЛОЖКИН, Г. Ю. РУДАКОВА

(Донецк)

Рассматриваемая задача о напряженном состоянии бесконечной изотропной плиты с двумя неодинаковыми круговыми отверстиями приведена к нахождению бигармонического, вихревого и потенциального решений.

Для решения бигармонической проблемы применяется аппарат теории аналитических функций комплексного переменного. Удовлетворяя граничным условиям на контурах отверстий, методом рядов получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений для решения задачи в любом приближении.

Проведены численные исследования для случая $M_1=M_2$ и определена область применимости приближенной теории.

Решение указанной задачи приводится к интегрированию краевых задач для бигармонического и двух метагармонических уравнений в двухмерной области. Бигармоническая проблема дает часть решения, проникающего в глубь плиты. Вихревое и потенциальное решения, соответствующие метагармоническому уравнению, описывают краевой эффект и экспоненциально затухают при удалении от контура плиты.

На основе известного метода [1], дано решение задачи изгиба бесконечной изотропной плиты толщиной $2h$, ослабленной двумя неодинаковыми круговыми отверстиями.

Не ограничивая общности задачи, можем взять радиус правого отверстия равным единице, контур его обозначим L_1. Контур левого отверстия радиуса $R\geqslant1$ обозначим через L_0.

[1] Космодамианский А. С., Ложкин В. Н., Мысовский Ю. В., Шалдырван В. А. Напряженное состояние пластин с отверстиями в трехмерной постановке. Изд-во ДонГУ, 1970.

Введем прямоугольную систему координат ξ, η, ζ так, чтобы координатная плоскость $\xi 0 \eta$ лежала в срединной плоскости, а начало координат находилось в центре левого отверстия. Кроме прямоугольной системы координат, введем местную систему координат n, s, ζ. Расстояние между отверстиями примем равным $2l$. Будем считать, что плоские грани свободны от внешних сил, а изгибающая плиту нагрузка приложена вдали от отверстия так, что $\sigma_\xi(\infty)=\lambda p(\zeta)$, $\sigma_\eta(\infty)=\lambda q(\zeta)$, $\tau_{\xi\eta}(\infty)=\tau_{\xi\zeta}(\infty)=\tau_{\eta\zeta}(\infty)=0$. Здесь $p(\zeta)$, $q(\zeta)$ – известные нечетные функции, $\lambda=h/R$.

Сделаем предположение, что вихревые и потенциальные напряжения, возникающие около одного из отверстий, не оказывают влияния на концентрацию напряжений в плите около соседнего отверстия. Это справедливо, когда толщина плиты не превышает длины минимальной перемычки между отверстиями.

Используя аппарат теории функций комплексного переменного, для определения бигармонического решения функции комплексного переменного представим в виде

(1)
$$\varphi(z)=Az+\varphi_0(z)+\lambda\varphi_1(z)+\ldots,\qquad \chi(z)=Bz+\chi_0(z)+\lambda\chi_1(z)+\ldots$$

$$A=\frac{M_1+M_2}{8\mu(3\nu-1)},\qquad B=A+\frac{M_1-M_2}{4\mu(\nu+1)},\qquad \nu=(1-2\nu^*)^{-1}$$

$$M_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\zeta p(\zeta)\,d\zeta,\qquad M_2=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\zeta q(\zeta)\,d\zeta$$

где μ – модуль сдвига, ν^* – коэффициент Пуассона.

Для функций j-го приближения справедливы представления

(2)
$$\varphi_j(z)=\sum_{k=1}^{\infty}[R^k\alpha_{kj}z^{-k}+a_{kj}(z-l)^{-k}]$$

$$\chi_j(z)=\sum_{k=1}^{\infty}[R^k\beta_{kj}z^{-k}+b_{kj}(z-l)^{-k}]\qquad (j=0.1)$$

Согласно [2], граничное условие для функций $\varphi_j(z)$, $\chi_j(z)$ имеет вид

(3)
$$\frac{7\nu-1}{\nu+1}\varphi_j(t_m)-(t_m-\bar t_m)\overline{\varphi_j'(t_m)}-\overline{\chi_j(t_m)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_{kj}^{(m)}\sigma^k+ic_{j1}+c_{j2}\qquad (m=0,1)$$

Здесь t_m – аффикс точек контура одного из отверстий, ослабляющих плиту, σ – аффикс точек единичной окружности, c_{j1} – постоянная, которая определяется из условия однозначности прогибов плиты [1], c_{j2} – постоянная, не оказывающая влияния на напряженное состояние плиты, $A_{kj}^{(m)}$ будут приведены ниже.

При помощи метода, изложенного в работе [2], получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно α_{kj}, a_{kj}, β_{kj}, b_{kj}:

(4)
$$\varkappa\alpha_{kj}-(k+2)R^{k+2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m C_{k+m-1}^{k+2}\varepsilon^{k+m+2}a_{mj}+$$

$$+kR^k\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m C_{k+m-1}^{k}\varepsilon^{k+m}a_{mj}-R^k\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m C_{k+m-1}^{k}\varepsilon^{k+m}b_{mj}=A_{-kj}^{(0)}$$

$$\varkappa a_{kj}-(k+2)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^k C_{k+m+1}^{k+2}R^m\varepsilon^{k+m+2}\alpha_{mj}+$$

$$+k\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^k C_{k+m-1}^{k}R^m\varepsilon^{k+m}\alpha_{mj}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^k C_{k+m-1}^{k}R^m\varepsilon^{k+m}\beta_{mj}=A_{-kj}^{(1)}\qquad (k=1,2,\ldots)$$

$$\beta_{1j}+\alpha_{1j}-(\varkappa-1)R\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\varepsilon^{m+1}m a_{1j}=-A_{1j}^{(0)}$$

$$\beta_{kj}+k\alpha_{kj}-(k-2)\lambda_k\alpha_{k-2,j}-\varkappa R^k\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m C_{k+m-1}^{k}\varepsilon^{k+m}a_{mj}=-A_{kj}^{(0)},\quad (k=2,3,\ldots)$$

$$\beta_{1j}+a_{1j}+(\varkappa-1)\sum_{m=1}^{\infty}R^m m\varepsilon^{m+1}\alpha_{1j}=-A_{1j}^{(1)}$$

$$b_{kj}+ka_{kj}-(k-2)\lambda_k a_{k-2,j}-\varkappa\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^k C_{k+m-1}^{m}R^m\varepsilon^{k+m}\alpha_{mj}=-A_{kj}^{(1)},\quad (k=2,3,\ldots)$$

$$\varkappa=(7\nu-1)/(\nu+1),\qquad \lambda_k=0\quad (k=1,\,2),\qquad \lambda_k=1\quad (k=3,\,4,\ldots)$$

Коэффициенты $A_{kj}^{(0)}$ для нулевого и первого приближения соответственно принимают вид

$$A_{1,0}^{(0)}=-\frac{M_1+M_2}{2(\nu+1)}R,\qquad A_{-1,0}^{(0)}=-\frac{M_1-M_2}{2(\nu+1)}R,\qquad A_{k,0}^{(0)}=-A_{-k,0}^{(0)}=0\quad (k\geqslant 2)$$

$$A_{2,1}^{(0)\prime}=-\frac{96\nu\delta}{(\nu+1)R}C_{2,0},\qquad A_{-k,1}^{(0)}=-A_{-k+2,1}^{(0)}\quad (k\geqslant 3)$$

$$A_{k,1}^{(0)}=-\frac{48\nu\delta}{(\nu+1)R}[(k-2)\alpha_{k,1}+kC_{k,1}]$$

$$\delta=\frac{1}{\sigma_k^{-5}},\qquad \sigma_k=(2k+1)\frac{\pi}{2},\qquad C_{kj}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m C_{k+m-1}^{k}\varepsilon^{k+m}a_{mj}$$

Чтобы получить $A_{kj}^{(1)}$ для первого отверстия, надо положить $R=1$ и заменить α_{kj} на a_{kj}, C_{kj} на B_{kj}

$$B_{kj}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^k C_{k+m-1}^{k}R^m\varepsilon^{k+m}\alpha_{mj}$$

Так как отверстия, ослабляющие плиту, не соприкасаются, то квазирегулярность полученной алгебраической системы (4) и единственность решения следуют из работы [1].

Согласно работе [2], представим компоненты напряженного состояния в виде рядов по степеням параметра λ. Тогда вблизи контура отверстия будем иметь следующие выражения $\sigma_s|_L=\lambda\sigma_{s,1}+\lambda^2\sigma_{s,2}+\ldots$. При этом коэффициенты $\sigma_{sj}(j=1,\,2)$ определяются соотношениями

$$\text{(5)}\qquad \sigma_{s,1}|_{n=0}=\zeta L_2\psi_0^*\qquad \sigma_{s,2}|_n=\zeta L_2\psi_1^*+D(\zeta)\frac{\partial}{\partial s}L_1\psi_0^*$$

$$D(\zeta)=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sigma_k^3}\sin\sigma_k\zeta+(\nu-1)\sum_{p=1}^{\infty}s_p(\zeta)c_{p3}$$

Выражения для $L_2\psi_0^*$, $L_1\psi_0^*$, $s_p(\zeta)$ приведены в работе [2]; c_{p3} определяются из системы

$$\sum_{p=1}^{\infty}I_{pj}c_{p3}=-\frac{2}{\nu}\left[\frac{24\delta}{2j+3}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sigma_k^3}I_{kj}\right],\qquad \sum_{p=1}^{\infty}\gamma_p I_{pj}c_{p3}=0\quad (j=1,2,3,\ldots)$$

$$I_{pj}=(\gamma_p\cos\gamma_p+\gamma_p^2\sin\gamma_p)I_{pj}^{(s)}+\gamma_p^2\cos\gamma_p I_{pj+1}^{(c)}$$

Здесь $2\gamma_p$ — корни трансцендентного уравнения $\sin 2\gamma_p = 2\gamma_p$; $\operatorname{Re}\gamma_p > 0$. Для $I_{pj}^{(s)}$, $I_{pj}^{(c)}$, I_{kj} справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$I_{pj}^{(s)} = -2\frac{\cos\gamma_p}{\gamma_p} + 2(2j+1)\frac{\sin\gamma_p}{\gamma_p^2} - \frac{2j(2j+1)}{\gamma_p^2} I_{pj-1}^{(s)}$$

$$I_{pj}^{(c)} = 2\frac{\sin\gamma_p}{\gamma_p} + 4j\frac{\cos\gamma_p}{\gamma_p^2} - 2j\frac{(2j-1)}{\gamma_p^2} I_{pj-1}^{(c)}$$

$$I_{kj} = 2(2j+1)\frac{(-1)^k}{\sigma_k^2} - 2j\frac{(2j+1)}{\sigma_k^2} I_{kj-1}$$

Численно был исследован изгиб плиты, когда $M_1 = M_2 = M$. Приведем значение σ_s на контуре правого отверстия, определение которых представляет наибольший интерес при изучении концентрации напряжений, возникающих возле отверстий, в точке $\zeta = 1$, угол $\theta = \pi$, где эти напряжения являются наибольшими.

$R = 2$, $\quad M^{-1}\sigma_s = 2.2709\,\lambda + 0.17043\,\lambda^2 + \cdots \quad (2l = 6)$
$\quad M^{-1}\sigma_s = 2.4412\,\lambda + 0.30259\,\lambda^2 + \cdots \quad (2l = 5)$
$\quad M^{-1}\sigma_s = 2.8951\,\lambda + 0.68952\,\lambda^2 + \cdots \quad (2l = 4)$

$R = 3$, $\quad M^{-1}\sigma_s = 2.4219\,\lambda + 0.24834\,\lambda^2 + \cdots \quad (2l = 7)$
$\quad M^{-1}\sigma_s = 2.6338\,\lambda + 0.39823\,\lambda^2 + \cdots \quad (2l = 6)$
$\quad M^{-1}\sigma_s = 3.1410\,\lambda + 0.79276\,\lambda^2 + \cdots \quad (2l = 5)$

$R = 4$, $\quad M^{-1}\sigma_s = 2.5503\,\lambda + 0.30908\,\lambda^2 + \cdots \quad (2l = 8)$
$\quad M^{-1}\sigma_s = 2.7821\,\lambda + 0.46393\,\lambda^2 + \cdots \quad (2l = 7)$
$\quad M^{-1}\sigma_s = 3.3025\,\lambda + 0.85303\,\lambda^2 + \cdots \quad (2l = 6)$

Приведенные результаты показывают, что при $\lambda = 1/4$ поправки второго приближения для $R = 2$ и $2l = 6$ составляют 2%, для $2l = 5$ — составляют 3% и 6% — для $2l = 4$. С увеличением радиуса отверстия до $R = 4$ погрешность возрастает соответственно до 3%, 4%, 7%. Здесь можно ограничиться двумя приближениями.

Когда $\lambda = 1$, погрешность приближенной теории для приведенных расстояний при $R = 2$ равна 8%, 12%, 24%, при $R = 3$ и $2l = 5$ поправка второго приближения становится существенной — до 25%, при $R = 4$ и $2l = 6$ — до 26%.

Анализ результатов показывает, что при толщине плиты меньше одной четверти радиуса бóльшего отверстия, ослабляющего плиту, коэффициент концентрации напряжений определяется достаточно точно на основе приближенной теории.

При увеличении радиуса бóльшего отверстия или при сближении отверстий погрешность соответственно возрастает.

Поступила 29 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Космодамианский А. С. Ложкин В. Н., Шалдырван В. А.* Квазирегулярность бесконечной системы в задачах теории упругости для пластин с круговыми отверстиями. Докл. АН УССР. Сер. А, 1970, № 3.
2. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Приближенный метод определения напряженного состояния плиты с круговыми отверстиями в трехмерной постановке. В сб.: Математическая физика, вып. 10. Киев, «Наукова думка», 1971.

УДК 624.07:534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО «СЛЕДЯЩЕЙ» СИЛОЙ

Г. Г. ДЕНИСОВ, В. В. НОВИКОВ

(Горький)

Задача об устойчивости прямолинейной формы равновесия упругого стержня, защемленного на одном конце и нагруженного на другом следящей силой, рассматривалась рядом авторов (например, [1–3]) в линейном приближении без учета внутреннего трения в материале стержня. Критическая нагрузка, соответствующая динамическому нагружению устойчивости, определялась по слиянию двух наименьших корней характеристического уравнения. Некорректность такого подхода была отмечена В. В. Болотиным [4] и состоит в том, что рассмотренный случай