

При доказательстве однозначности обобщенных бигармонических функций $\Phi^{(k)}$ и их частных производных $\partial\Phi^{(k)}/\partial\xi$, $\partial\Phi^{(k)}/\partial\eta$ применяется формула Остроградского — Грина и учитывается свойство обобщенного уравнения Пуассона

$$\iint_S \left(M \frac{\partial}{\partial \xi} + N \frac{\partial}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \int_S \xi \frac{d_1}{dn} ds - \iint_S \xi \Delta_1 d\xi d\eta$$

$$\iint_S \left(L \frac{\partial}{\partial \eta} + N \frac{\partial}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta = \int_S \eta \frac{d_1}{dn} ds - \iint_S \eta \Delta_1 d\xi d\eta$$

Таким образом, поставленная пространственная задача сводится к определению четырех обобщенно-гармонических $\omega^{(k)}$ ($k=0, 1, 2, 3$) и четырех обобщенно-бигармонических $\Phi^{(k)}$ ($k=0, 1, 2, 3$) функций в области S поперечного сечения бруса при известных значениях (10), (11) и на контуре (12), (13).

Количество граничных задач зависит от порядка полинома k . Если обозначить количество граничных задач через n , то зависимость можно представить в виде $n=2(k+1)$ ($k=0, 1, 2, 3$).

Предлагаемое решение (верхний предел степени $(l-\xi)$ обозначен через i) дает возможность получить решение всех тринадцати задач путем изменения i от трех до нуля.

Поступила 19 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

УДК 539.3

О РАССЕЯНИИ ЭНЕРГИИ В УПРУГОМ ДИСКРЕТНОМ КОНТАКТЕ

В. И. МАКСАК

(Томск)

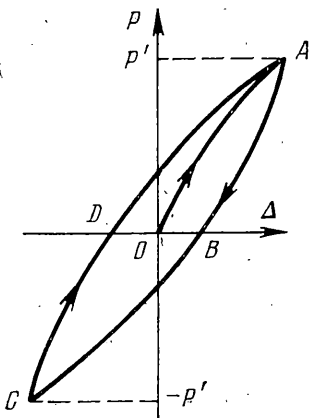
Рассматривается вопрос о рассеивании энергии в упругом дискретном контакте в условиях предварительного смещения, когда сдвигающие усилия не превышают силы трения покоя. На основании теоретического и экспериментального анализа устанавливаются зависимости величины рассеиваемой энергии от основных параметров (внешних нагрузок, механических, геометрических и фрикционных характеристик контактирующих поверхностей). Приводятся расчетные формулы.

Уровень вибрации и шума характеризует динамическую напряженность и определяет в некоторой степени надежность и точность работы конструкций. В связи с этим в последнее время резко возрос интерес исследователей к новому разделу современной теории машин — «акустической динамике машин» [1] и, в частности, к рассеиванию энергии на фрикционном контакте [2–5], являющемся эффективным ограничителем распространения вибраций по конструкции.

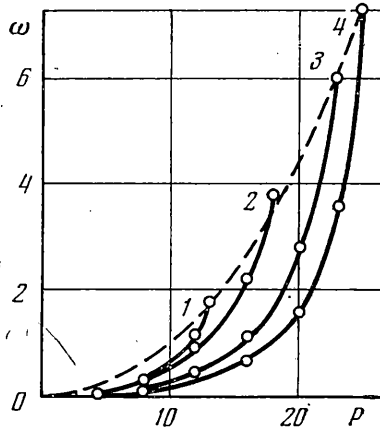
Величина рассеянной энергии за цикл симметричного нагружения определяется площадью, заключенной между кривыми предварительного смещения ABC (фиг. 1) и CDA . Эксперимент проводился на образцах и установке, описанных в работе [6]. Площадь контакта, равная 125 мм^2 , представляет собой плоский стык, имеющий форму кольцевой дорожки со средним диаметром 20 мм .

Влияние величины сдвигающей силы (в кГ) показано на фиг. 2. Экспериментально получена зависимость рассеяния энергии ω для контакта стальных образцов с чистой обработкой $\nabla 8$ от силы сдвига P для коэффициентов трения покоя $0,29, 0,4, 0,51, 0,56$ (линии 1–4 соответственно), $N=45 \text{ кг}$. С увеличением сдвигающих усилий как предельных ($P=fN$), так и неопредельных ($P \ll fN$) рассеяние энергии ω (в кГмк) увеличивается. При одинаковых силах сдвига большему коэффициенту трения, на-

оборот, соответствует меньшая величина рассеиваемой энергии. Однако для предельных сил сдвига эта величина возрастает с увеличением коэффициента трения. Экспериментальная зависимость $\omega = \varphi(P_{\max})$ представлена на фиг. 2 пунктирной кривой и



Фиг. 1



Фиг. 2

определяется квадратичной параболой. При малых силах сдвига рассеяние энергии незначительно.

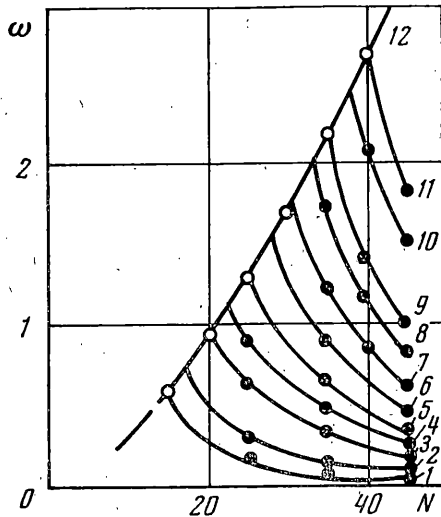
Зависимость рассеяния энергии от сжимающей нагрузки показана на фиг. 3, для стальных образцов с чистой обработкой $\nabla 8$, если сила сдвига: 6.75, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 15.6, 17, 17.7 и fN кг (линии 1–12 соответственно), сила сжатия $N=45$. Большой силе сжатия (при $P=fN$) соответствует большее значение ω . При постоянном значении P с ростом N рассеяние энергии уменьшается.

На фиг. 4 показана зависимость рассеяния энергии от коэффициента трения для тех же образцов, если силы сдвига: fN , 22, 20, 16, 12, 10 кг (линии 1–6 соответственно), $N=45$ кг. Для предельных сдвигающих усилий эта зависимость представляется квадратичной параболой. В случае $P < fN$ для различных значений имеем семейство гипербол. Различные значения коэффициентов трения достигались соответствующей очисткой поверхностей.

Экспериментальное исследование влияния чистоты механической обработки поверхности на рассеяние энергии представляет значительные трудности, так как невозможно получить два контакта, имеющих различную шероховатость и одинаковые коэффициенты трения. Однако соответствующая обработка экспериментальных данных с привлечением полученных теоретических зависимостей показывает, что с увеличением шероховатостей поверхности при одинаковых сдвигающих силах и коэффициентах трения рассеяние энергии возрастает.

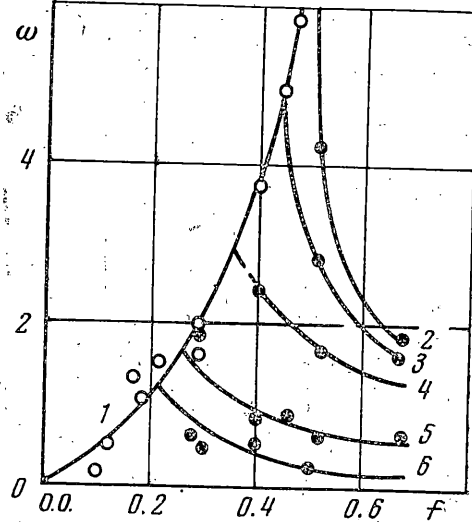
Эксперименты, проведенные на различных металлах (контакты: сталь по стали, алюминию, свинцу; медь по меди; алюминий по алюминию), показали, что все отмеченные выше закономерности качественно сохраняются. Следует только отметить, что для материала с большим модулем сдвига при прочих равных условиях величина рассеиваемой в контакте энергии меньше.

Расчетное значение рассеянной энергии в контакте может быть получено при использовании решения Р. Миндлина для сдвига упругих сфер [7]. В работе [8] при-



Фиг. 3

водится расчет упругого предварительного смещения дискретного контакта, соответствующего кривой *OA* (Фиг. 1). Аналогичным образом можно получить формулы, определяющие величину смещения, соответствующего линиям *ABC* и *CDA*. При этом площадь петли *ABCD* или величина рассеиваемой энергии за цикл нагружения может быть представлена в виде



Фиг. 4

$$\omega = \int_{-P'}^{+P'} (\Delta' - \Delta'') dP$$

$$(1) \quad \Delta' = \frac{(2-\mu)fh_{\max}\varepsilon}{1-\mu} \left[2 \left(1 - \frac{P'-P}{2fN} \right)^{\frac{2}{2\nu+1}} - \left(1 - \frac{P'}{fN} \right)^{\frac{2}{2\nu+1}} - 1 \right]$$

$$\omega = \frac{8(2-\mu)(2\nu+1)h_{\max}\varepsilon f^2 N}{(1-\mu)(2\nu+3)} \times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{P'}{fN} \right)^{\frac{2\nu+3}{2\nu+1}} - \frac{(2\nu+3)P'}{2(2\nu+1)fN} \right\} \times \left[1 + \left(1 - \frac{P'}{fN} \right)^{\frac{2}{2\nu+1}} \right]$$

$$\omega = \frac{4(2-\mu)(2\nu-1)h_{\max}\varepsilon f^2 N}{(1-\mu)(2\nu+3)}, \quad P' = fN; \quad \omega = \frac{4(2-\mu)(2\nu-1)h_{\max}\varepsilon P^3}{3(1-\mu)(2\nu+1)^2 f N^2}, \quad P' \ll fN$$

где ω – величина рассеиваемой энергии, Δ' – смещение, соответствующее линии *ABC*, Δ'' – смещение, соответствующее линии *CDA* (Фиг. 1), P – сдвигающее усилие, N – сжимающее усилие, μ – коэффициент Пуассона, h_{\max} – максимальная высота неров-

$N, \text{кг/см}^2$	$P, \text{кг/см}^2$	f	ω_t кгМкк/см^2	ω_e кгМкк/см^2
36	2.4	0.44	0.0068	0.0040
36	4	0.44	0.0076	0.0040
36	6.4	0.44	0.1330	0.1720
36	6.4	0.5	0.1000	0.1040
36	3.2	0.6	0.0128	0.0200
36	6.4	0.6	0.1020	0.0920
36	4	0.7	0.0264	0.0360
28	2.4	0.3	0.0118	0.0120
28	4	0.4	0.0430	0.0440
28	4.8	0.5	0.0088	0.0080
28	6.4	0.5	0.1680	0.2360
28	6.4	0.6	0.1680	0.2000
20	1.6	0.45	0.0048	0.0040
20	2.8	0.45	0.0434	0.0520
20	4	0.5	0.0320	0.0320
20	4	0.6	0.0032	0.0040
20	6.4	0.6	0.2800	0.3000
12	1.6	0.6	0.0064	0.0040
12	2.4	0.6	0.0232	0.0240

ностей шероховатой поверхности, ϵ — относительное сближение контактирующих поверхностей, определяемое по Н. Б. Демкину [9], f — коэффициент трения покоя.

Анализ приведенных формул показывает удовлетворительное качественное и количественное соответствие их с экспериментом. В таблице сопоставлены значения рассеянной энергии в контакте стальных поверхностей с шероховатостью восьмого класса при различных сжимающих и сдвигающих силах и коэффициентах трения, полученные теоретически и экспериментально.

В динамических условиях полученные теоретические зависимости проверялись по осциллограммам затухающих колебаний балки, консольно защемленной между шероховатыми плитами пресса.

Поступила 6 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аргоболовский И. И., Генкин М. Д., Сергеев В. И.*, Акустическая динамика машин. Вестн. АН СССР, 1968, № 11.
2. *Коняхин И. Р., Митрофанов Б. П.* О диссипации энергии в упругом дискретном контакте. Инж. ж. МТГ, 1967, № 1.
3. *Пановко Я. Г.* Проблемы теории конструкционного демпфирования. В сб.: Динамика машин, М., Машиз, 1963.
4. *Писаренко Г. С.* Основные аспекты исследований рассеяния энергии при механических колебаниях. Рассеяние энергии при колебании упругих систем. Киев, «Наукова думка», 1966.
5. *Матвеев В. В., Яковлев А. П., Балюк А. Д., Ржавин Л. Н.* Исследование демпфирующих свойств замкового соединения компрессорных лопаток при повышенной температуре. Термопрочность материалов и конструктивных элементов, Киев, «Наукова думка», 1967.
6. *Коняхин И. Р.* Теория предварительных смещений применительно к вопросам контактирования деталей. Изд-во Томск. ун-та, 1965.
7. *Mindlin R. D.* Compliance of elastic bodies in contact. J. Appl. Mech., 1949, vol. 16, No. 3.
8. *Максаk В. И.* Количественная оценка упругого предварительного смещения. Изв. вузов. Машиностроение, 1969, № 6.
9. *Демкин Н. Б.* Фактическая площадь касания твердых поверхностей, М., Изд-во АН СССР, 1962.

УДК 539.3

ИЗГИБ ПЛИТЫ С ДВУМЯ НЕРАВНЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В. Н. ЛОЖКИН, Г. Ю. РУДАКОВА

(Донецк)

Рассматриваемая задача о напряженном состоянии бесконечной изотропной плиты с двумя неодинаковыми круговыми отверстиями приведена к нахождению бигармонического, вихревого и потенциального решений.

Для решения бигармонической проблемы применяется аппарат теории аналитических функций комплексного переменного. Удовлетворяя граничным условиям на контурах отверстий, методом рядов получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений для решения задачи в любом приближении.

Проведены численные исследования для случая $M_1 = M_2$ и определена область применимости приближенной теории.

Решение указанной задачи приводится к интегрированию краевых задач для бигармонического и двух метабигармонических уравнений в двумерной области. Бигармоническая проблема дает часть решения, проникающего в глубь плиты. Вихревое и потенциальное решения, соответствующие метабигармоническому уравнению, описывают краевой эффект и экспоненциально затухают при удалении от контура плиты.

На основе известного метода¹, дано решение задачи изгиба бесконечной изотропной плиты толщиной $2h$, ослабленной двумя неодинаковыми круговыми отверстиями.

Не ограничивая общности задачи, можем взять радиус правого отверстия равным единице, контур его обозначим L_1 . Контур левого отверстия радиуса $R \geq 1$ обозначим через L_0 .

¹ Космодамианский А. С., Ложкин В. Н., Мысовский Ю. В., Шалдырван В. А. Напряженное состояние пластин с отверстиями в трехмерной постановке. Изд-во ДонГУ, 1970.