УДК 539.3

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ АНИЗОТРОПНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ТЕЛА, НАГРУЖЕННОГО МАССОВЫМИ И ПОВЕРХНОСТНЫМИ СИЛАМИ, ПЕРЕМЕННЫМИ ВДОЛЬ ОСИ И ПО КОНТУРУ СЕЧЕНИЯ

Г. А. ПОГОСЯН *(Москва)*

Исследование задачи Сен-Венана в геометрически нелинейной постановке методом введения малого параметра реализуется разложением в ряды искомых компонентов смещений относительно малых параметров. В зависимости от необходимой точности результата ограничиваются определенным количеством первых членов рядов, имеющих следующий вид:

$$u^{(\nu)}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}u_{(\ldots)}^{(\nu)}\alpha^i\tau^j\beta_1{}^k\gamma_1{}^r\beta_2{}^n\gamma_2{}^m \qquad (\nu=1,2,3) \tag{1}$$

где $u^{(1)}=u$, $u^{(2)}=v$, $u^3=w$ — компоненты смещения, $(\cdots)=ijkrnm$; α, τ, β_1, γ_1, β_2, γ_2 — малые параметры, характеризующие отдельные простые виды деформаций соответственно при растяжении, кручении, изгибе парой сил, изгибе поперечной силы. Поскольку в качестве малого параметра в указанных видах деформаций принимается отношение силового фактора к жесткости бруса при данном виде деформации, то изгиб пары сил и изгиб поперечной силы характеризуются (каждый) двумя малыми параметрами. Это объясняется различными значениями жесткости при изгибе относительно главных инерционных осей бруса.

Согласно определению, малые параметры имеют вид

$$\alpha=\frac{P}{ES},\quad \tau=\frac{M_\zeta}{D_0},\quad \beta_1=\frac{M_\eta}{EJ_\eta},\quad \gamma_1=\frac{P_1}{EJ_\eta},\quad \beta_2=\frac{M_\xi}{EJ_\xi},\quad \gamma_2=\frac{P_2}{EJ_\xi}$$

Здесь EJ — жесткость при изгибе, ES — жесткость при растяжении (сжатии), D_0 — жесткость при кручении, M_η, M_ξ — изгибающие моменты, M_ξ — крутящий момент, P_1, P_2 — поперечные силы, P — продольная сила.

Рассматривая упругое равновесие бруса при наличии членов ряда (1) всех порядков относительно малых параметров, получим бесконечное число систем уравнений упругого равновесия вида

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^i\tau^j\beta_1{}^k\gamma_1{}^r\beta_2{}^n\gamma_2{}^m\left\{\sum_s\frac{\partial\tau_{s\nu}^{(\ldots)}}{\partial s}+X_\nu^{(\ldots)}=0\right\} \qquad (s,\nu=1,2,3) \tag{2}$$

где $(\cdots)=ijkrnm$, $\partial1=\partial\xi$, $\partial2=\partial\eta$, $\partial3=\partial\zeta$, $X_1{}^{(\cdots)}=X^{(\cdots)}$, $X_2{}^{(\cdots)}=Y^{(\cdots)}$, $X_3{}^{(\cdots)}=Z^{(\cdots)}$.

Если ограничиться членами до второго порядка, то получим 6 линейных систем уравнений упругого равновесия относительно α, $\tau,\ldots$, γ_2 и 21 — относительно квадратичных членов ($\alpha^2,\ldots$, $\gamma_2{}^2$ и $C_6{}^2$ — сочетание из 6 элементов — α, τ, β_1, γ_1, β_2, γ_2 по 2).

Решения линейных систем уравнений упругого равновесия относительно β_2 и γ_2 можно получить соответственно из результата решения систем уравнений относительно β_1 и γ_1, переставив в них координатные оси поперечного сечения. Тогда имеем известные четыре задачи простых видов деформаций линейной теории упругости [1]. Аналогично получаются решения систем уравнений упругого равновесия относительно $\beta_2{}^2$, $\gamma_2{}^2$, $\alpha\beta_2$, $\alpha\gamma_2$, $\tau\beta_2$, $\tau\gamma_2$, $\beta_2\gamma_1$, $\beta_2\gamma_2$ из результатов решения систем уравнений упругого равновесия относительно $\beta_1{}^2$, $\gamma_1{}^2$, $\alpha\beta_1$, $\alpha\gamma_1$, $\tau\beta_1$, $\tau\gamma_1$, $\gamma_2\beta_1$, $\beta_1\gamma_1$. Таким образом, ограничив члены ряда (2) до второго порядка, получим дополнительно 13 различных систем уравнений упругого равновесия, т. е. 13 дополнительных задач, объединяемых в два класса.

1. Системы уравнений упругого равновесия относительно α^2, τ^2, $\beta_1{}^2$, $\gamma_1{}^2$, которые называются задачами вторичных эффектов простых видов деформаций.

2. Системы уравнений упругого равновесия относительно $\alpha\tau,\ldots$, $\gamma_1\gamma_2$, которые называются задачами взаимовлияния двух видов деформаций или двух напряженных состояний.

Каждая система в отдельности представляет собой самостоятельную задачу, и решения их в конечном итоге приводятся к задаче упругого равновесия призматического бруса, нагруженного массовыми и поверхностными силами, изменяющимися как вдоль образующей, так и по контуру сечения бруса в классической постановке. Поэтому ниже рассматривается упругое равновесие анизотропного призматического бруса в линейной постановке при наличии таких объемных и поверхностных сил, которые охватили бы всевозможные случаи рассмотренных задач.

К боковым поверхностям однородного анизотропного призматического бруса приложены объемные и поверхностные силы. Поместим начало координат в центр тяжести закрепленного основания, оси $O\xi$ и $O\eta$ направим по главным осям инерции этого основания, а ось $O\zeta$ – параллельно образующей боковой поверхности. На свободном основании внешние силы отсутствуют. Полагаем, что анизотропное тело имеет одну плоскость упругой симметрии, перпендикулярную к оси $O\zeta$.

Упругое равновесие рассматриваемого бруса сводится к определению тензора напряжений $\tau_{11}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{23}$, удовлетворяющих в области, занятой брусом, неоднородной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\zeta}+\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^k\frac{\partial X^{(k)}}{\partial\xi}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial\zeta}+\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^k\frac{\partial Y^{(k)}}{\partial\eta}=0$$

$$\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{33}}{\partial\zeta}+\sum_{k=0}^{i=3}\left[\frac{1}{k!}+\frac{k(k-1)(k-2)}{6k!}\right](l-\zeta)^k Z^{(k)}=0$$

условиям совместности [1]

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial\eta^2}=2\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial\eta\,\partial\zeta},\qquad \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial\eta\,\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial\xi}+\frac{\partial e_{13}}{\partial\eta}+\frac{\partial e_{12}}{\partial\zeta}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial\zeta^2}=2\frac{\partial^2 e_{13}}{\partial\xi\,\partial\eta},\qquad \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial\xi\,\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(-\frac{\partial e_{13}}{\partial\eta}+\frac{\partial e_{12}}{\partial\zeta}+\frac{\partial e_{23}}{\partial\xi}\right)$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial\xi^2}=2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial\xi\,\partial\eta},\qquad \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(-\frac{\partial e_{12}}{\partial\zeta}+\frac{\partial e_{23}}{\partial\xi}+\frac{\partial e_{13}}{\partial\eta}\right)$$

(5)

$$e_{11}=\frac{1}{E}(\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{12}\tau_{22}+\sigma_{13}\tau_{12}-\sigma_1\tau_{33}),\qquad e_{12}=\frac{1}{2E}(\sigma_{13}\tau_{11}+\sigma_{23}\tau_{22}+\sigma_{33}\tau_{12}-\sigma_3\tau_{33})$$

$$e_{22}=\frac{1}{E}(\sigma_{12}\tau_{11}+\sigma_{22}\tau_{22}+\sigma_{23}\tau_{12}-\sigma_2\tau_{33}),\qquad e_{13}=\frac{1}{2(LM-N^2)}(L\tau_{13}-N\tau_{23})$$

$$e_{33}=\frac{1}{E}(\tau_{33}-\sigma_1\tau_{11}-\sigma_2\tau_{22}-\sigma_3\tau_{12}),\qquad e_{23}=\frac{1}{2(LM-N^2)}(M\tau_{23}-N\tau_{13})$$

и граничным условиям на боковой поверхности

$$\tau_{11}\cos(n,\xi)+\tau_{12}\cos(n,\eta)+\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^k[Q_\xi^{(k)}\cos(n,\xi)+F_\xi^{(k)}\cos(n,\eta)]=0 \tag{6}$$

$$\tau_{12}\cos(n,\xi)+\tau_{22}\cos(n,\eta)+\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^k[Q_\eta^{(k)}\cos(n,\xi)+F_\eta^{(k)}\cos(n,\eta)]=0$$

$$\tau_{13}\cos(n,\xi)+\tau_{23}\cos(n,\eta)+\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^k[Q_\zeta^{(k)}\cos(n,\xi)+F_\zeta^{(k)}\cos(n,\eta)]=0$$

На свободном основании бруса $\zeta=l$ главный вектор и главный момент всех усилий должны равняться нулю, согласно постановке задачи.

В приведенных формулах $\partial/\partial\xi X^{(k)}$, $\partial/\partial\eta Y^{(k)}$, $Z^{(k)}$ – объемные силы, являющиеся произвольными функциями ξ, η; $Q_\xi^{(k)}$, $Q_\eta^{(k)}$, $Q_\zeta^{(k)}$, $F_\xi^{(k)}$, $F_\eta^{(k)}$, $F_\zeta^{(k)}$ – поверхностные силы, заданные также в виде произвольных функций ξ, η; E, L, M, N – модули упругости материала; σ_i, σ_{ij},– коэффициенты Пуассона, связанные с упругими коэффициентами материала [2].

Поставленная пространственная задача решается полуобратным методом Сен-Венана. Задаемся видом искомых компонентов напряжений $\tau_{11}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{23}$, оставляя некоторый произвол, за счет которого удовлетворяются основные уравнения (3), (4), граничные условия (6), а также условия на свободном торце бруса

$$\tau_{11}=\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^k\left(\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\eta^2}-X^{(k)}+\delta_{i-k}M\omega^{(k+1)}+\tau_{11}^{(k)}\right)+ \tag{7}$$

$$+\frac{k(k-1)}{k!}(l-\zeta)^{k-2}\int^{\xi}(ML_1^{(k)}+NL_2^{(k)})\,d\xi$$

$$\tau_{22}=\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^k\left(\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\xi^2}-Y^{(k)}+\delta_{i-k}L\omega^{(k+1)}+\tau_{22}^{(k)}\right)+$$

$$+\frac{k(k-1)}{k!}(l-\zeta)^{k-2}\int^{\eta}(LL_2^{(k)}+NL_1^{(k)})\,d\eta$$

$$\tau_{33}=\sum_{k=0}^{i=3}\frac{k(k-1)}{k!}(l-\zeta)^{k-2}\left[\frac{k!}{2}\beta_{33}\Phi^{(k)}+\sigma_1\int^{\xi}[ML_1^{(k)}+NL_2^{(k)})\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\sigma_2\int^{\eta}(LL_2^{(k)}+NL_1^{(k)})\,d\eta\right]+\frac{2E}{k+2}(l-\zeta)^{k+2}(d_2^{(k)}\xi+d_3^{(k)}\eta)+\frac{E}{k+1}(l-\zeta)^{k+1}d_1^{(k)}+$$

$$+(l-\zeta)^k\left[\sigma_1\left(\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\eta^2}-X^{(k)}\right)+\sigma_2\left(\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\xi^2}-Y^{(k)}\right)-\sigma_3\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\xi\,\partial\eta}+\delta_{i-k}B_0\omega^{(k+1)}+\tau_{33}^{(k)}\right]$$

$$\tau_{12}=\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^k\left(-\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\xi\,\partial\eta}+\delta_{i-k}N\omega^{(k+1)}+\tau_{12}^{(k)}\right)$$

$$\tau_{13}=\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^{k+1}\tau_{23}^{(k)}+(l-\zeta)^k\left\{\left[\frac{1}{k!}+\frac{k(k-1)(k-2)}{6k!}\right]\left[\left(M\frac{\partial}{\partial\xi}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+N\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\omega^{(k)}+\delta_{i-k}(ML_1^{(k+1)}+NL_2^{(k+1)})\right]+Ed_1^{(k)}\xi\right\}$$

$$\tau_{23}=\sum_{k=0}^{i=3}(l-\zeta)^{k+1}\tau_{23}^{(k)}+(l-\zeta)^k\left\{\left[\frac{1}{k!}+\frac{k(k-1)(k-2)}{6k!}\right]\left[\left(L\frac{\partial}{\partial\eta}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+N\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\omega^{(k)}+\delta_{i-k}(LL_2^{(k+1)}+NL_1^{(k+1)})\right]+b_1\xi d_1^{(k)}\right\}$$

В компонентах напряжений явные и известные функции обозначены через $\tau_{ij}^{(k)}$ $(k, i, j=1, 2, 3)$

$$\tau_{11}^{(k)}=(k+1)\left[\delta_{i-k}\frac{E}{2}\xi^2d_1^{(k+1)}+\left(Mf+\frac{E}{3}\xi^3-2\sigma_2a_2\xi\eta^2\right)d_2^{(k)}+\right.$$

$$\left.+(M\psi+b_2\xi\eta^2)\,d_3^{(k)}+\tau^{(k)}(M\varphi+{}^1/_2N\xi^2-M\xi\eta)\right]$$

$$\tau_{22}^{(k)}=(k+1)\,[\delta_{i-k}b_1\xi\eta d_1^{(k+1)}+(L\psi+{}^1/_3E\eta^3-2\sigma_1a_1\xi^2\eta)\,d_3^{(k)}+$$

$$+(Lf+b_1\xi^2\eta)\,d_2^{(k)}+\tau^{(k)}(L\varphi+L\xi\eta-{}^1/_2N\eta^2)\,]$$

$$\tau_{33}^{(k)}=(k+1)\left\{\frac{1}{2}\delta_{i-k}[E(\sigma_2\eta^2+2\sigma_1\xi^2-c_1\xi^2)+2\sigma_2b_1\xi\eta]\,d_1^{(k+1)}+\right.$$

$$+B_0(fd_2^{(k)}+\psi d_3^{(k)}+\varphi\tau^{(k)})+d_2^{(k)}\left[\sigma_2(E-2\sigma_1a_2)\,\xi\eta^2+b_1\sigma_2\xi^2\eta+\right.$$

$$\left.+\frac{E}{3}\left(2\sigma_1\xi^3-c_1\xi^3-2\sigma_2\frac{N}{L}\eta^3\right)\right]+d_3^{(k)}\left[b^2\sigma_1\xi\eta^2+\sigma_1(E-2\sigma_2a_1)\,\xi^2\eta+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{E}{3}\left(2\sigma_2\eta^3-c_2\eta^3-2\sigma_1\frac{N}{M}\xi^3\right)\right]+\tau^{(k)}\left[\sigma_1\left(\frac{1}{2}N\xi^2-M\xi\eta\right)+\sigma_2\left(L\xi\eta-\frac{N}{2}\eta^2\right)\right]\right\}$$

$$\tau_{12}^{(k)}=N(k+1)\,(fd_2^{(k)}+\psi d_3^{(k)}+\varphi\tau^{(k)})$$

$$\tau_{13}^{(k)}=d_2^{(k)}(Mf_\xi'+Nf_\eta'+E\xi^2-2\sigma_2a_2\eta^2)+d_3^{(k)}(M\psi_\xi'+N\psi_\eta'+b_2\eta^2)+$$

$$+\tau^{(k)}(M\varphi_\xi'+N\varphi_\eta'-M\eta+N\xi)$$

$$\tau_{23}^{(k)}=d_2^{(k)}(Lf_\eta'+Nf_\xi'+b_1\xi^2)\,d_2^{(k)}+(L\psi_\eta'+N\psi_\xi'+E\eta^2-2\sigma_1a_1\xi^2)\,d_3^{(k)}+$$

$$+\tau^{(k)}(L\varphi_\eta'+N\varphi_\xi'+L\xi-N\eta)$$

где $\varphi(\xi,\eta)$ – функция кручения, $f(\xi,\eta)$, $\psi(\xi,\eta)$ – функция, являющаяся решением следующей обобщенной задачи Неймана:

$$(8)\qquad \Delta_1 f=0,\qquad \Delta_1\psi=0,\qquad \frac{d_1f}{dn}=-(E\xi^2-2\sigma_2a_2\eta^2)\cos(n,\xi)-b_1\xi^2\cos(n,\eta)$$

$$\frac{d_1\psi}{dn}=-b_2\eta^2\cos(n,\xi)-(E\eta^2-2\sigma_1a_1\xi^2)\cos(n,\eta)$$

$$\Delta_1=M\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2N\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}+L\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{d_1}{dn}=\left(M\frac{\partial}{\partial\xi}+N\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\cos(n,\xi)+\left(L\frac{\partial}{\partial\eta}+N\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\cos(n,\eta)$$

$$a_1=\frac{ML-N^2}{M},\qquad a_2=\frac{ML-N^2}{L},\qquad c_1=\frac{E-N\sigma_3}{M},\qquad c_2=\frac{E-N\sigma_3}{L}$$

$$b_1=\frac{N}{M}E+\sigma_3a_1,\qquad b_2=\frac{N}{M}E+\sigma_3a_2,\qquad B_0=M\sigma_1+N\sigma_2+N\sigma_3-E$$

δ_{i-k}, $\delta_{i-(k+1)}$ – коэффициенты, имеющие значения $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_n=1$, $\delta_0=\delta_{-1}=\delta_{-2}=\ldots$ $\ldots=\delta_{-n}=0$

$$(9)\qquad L_1^{(k)}=\frac{k!}{E}\int^{\xi}\left\{\left[\beta_{11}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\left(\beta_{12}+\frac{1}{2}\beta_{33}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\beta_{13}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\right]\Phi^{(k)}+\right.$$

$$\left.+R_1(\ldots)\right\}d\xi+h_2^{(k)}(\eta)\qquad (k=1,2,3)$$

$$L_2^{(k)}=-\frac{k!}{E}\int^{\eta}\left\{\beta_{22}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(\beta_{12}+\frac{1}{2}\beta_{33}\right)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-\beta_{23}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\right]\Phi^{(k)}+$$

$$\left.+R_2(\ldots)\right\}d\eta+h_1^{(k)}(\xi)$$

где $d_1^{(k)}$, $d_2^{(k)}$, $d_3^{(k)}$, $\tau^{(k)}$ — постоянные, $h_1^{(k)}(\xi)$, $h_2^{(k)}(\eta)$ — функции, условия определения которых приводятся ниже

$$R_1(\ldots)=(k+1)\Bigg\{B_1\left(\varphi\tau^{(k)}+fd_2^{(k)}+\psi d_3^{(k)}\right)+\Bigg[\beta_{11}\left(\frac{1}{2}N\xi^2-M\xi\eta\right)+$$

$$+\beta_{12}\left(L\xi\eta-\frac{1}{2}N\eta^2\right)\Bigg]\tau^{(k)}+\Bigg[\frac{E}{3}\left(\beta_{11}\xi^3-\sigma_2^2\xi^3+\sigma_1c_1\xi^3+2\sigma_1\sigma_2\frac{N}{L}\eta^3\right)+$$

$$+(\beta_{12}b_1\xi^2\eta-\sigma_1\sigma_2E\xi\eta^2-2\beta_{11}\sigma_2a_2\xi\eta^2)\Bigg]a_2^{(k)}+\Bigg[\frac{E}{3}\Bigg(\beta_{12}\eta^3-\sigma_1\sigma_2\eta^3+\sigma_1c_2\eta^3+$$

$$+2\sigma_1^2\frac{N}{M}\xi^3\Bigg)+(\beta_{11}b_2\xi\eta^2-\sigma_1^2E\xi^2\eta-2\beta_{12}\sigma_1a_1\xi^2\eta)\Bigg]d_3^{(k)}+$$

$$+\delta_{i-k}\left[\frac{E}{2}(\beta_{11}\xi^2-\sigma_1^2\xi^2+\sigma_1c_1\xi^2-\sigma_1\sigma_2\eta^2)+\beta_{12}b_1\xi\eta\right]d_1^{(k+1)}\Bigg\}+$$

$$+\delta_{i-k}B_1\omega^{(k+1)}+\delta_{i-(k+1)}\Bigg[\beta_{11}\int^{\xi}\left(ML_1^{(k+2)}+NL_2^{(k+2)}\right)d\xi+$$

$$+\beta_{12}\int^{\eta}\left(LL_2^{(k+2)}+NL_1^{(k+2)}\right)d\eta-\frac{(k+2)!}{2k!}\beta_{33}\sigma_1\Phi^{(k+2)}\Bigg]-\beta_{11}X^{(k)}-\beta_{12}Y^{(k)}$$

$$R_2(\ldots)=(k+1)\Bigg\{B_2\left(\varphi\tau^{(k)}+fd_2^{(k)}+\psi d_3^{(k)}\right)+\Bigg[\beta_{12}\left(\frac{1}{2}N\xi^2-M\xi\eta\right)+\beta_{22}\Bigg(L\xi\eta-$$

$$-\frac{1}{2}N\eta^2\Bigg)\Bigg]\tau^{(k)}+\Bigg[\frac{E}{3}\left(\beta_{12}\xi^3-\sigma_1\sigma_2\xi^3+\sigma_2c_1\xi^3+2\sigma_2^2\frac{N}{L}\eta^3\right)+\beta_{22}b_1\xi^2\eta-$$

$$-\sigma_2(\sigma_2E+2\beta_{12}a_2)\xi\eta^2\Bigg]d_2^{(k)}+\Bigg[\frac{E}{3}\left(\beta_{22}\eta^3-\sigma_2^2\eta^3+\sigma_2c_2\eta^3+2\sigma_1\sigma_2\frac{N}{M}\xi^3\right)+$$

$$+\beta_{12}b_2\xi\eta^2-\sigma_1(\sigma_2E+2\beta_{22}a_1)\xi^2\eta\Bigg]d_3^{(k)}+\delta_{i-k}\Bigg[\frac{E}{2}(\beta_{12}-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2c_1)\xi^2-$$

$$-\frac{E}{2}\sigma_2^2\eta^2+\beta_{22}b_1\xi\eta\Bigg]d_1^{(k+1)}\Bigg\}+\delta_{i-k}B_2\omega^{(k+1)}+\delta_{i-(k+1)}\Bigg[\beta_{12}\int^{\xi}\left(ML_1^{(k+2)}+NL_2^{(k+2)}\right)d\xi+$$

$$+\beta_{22}\int^{\eta}\left(LL_2^{(k+2)}+NL_1^{(k+2)}\right)d\eta-\frac{(k+2)!}{2k!}\beta_{33}\sigma_2\Phi^{(k+2)}\Bigg]-\beta_{12}X^{(k)}-\beta_{22}Y^{(k)}$$

$$\beta_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_i\sigma_j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3), \qquad B_1=M\beta_{11}+L\beta_{12}+N\beta_{13}+\sigma_1E$$

$$B_2=M\beta_{12}+L\beta_{22}+N\beta_{23}+\sigma_2E, \qquad B_3=M\beta_{13}+L\beta_{23}+N\beta_{33}+\sigma_3E$$

Как видно из (7), в искомые решения введены как произвольные функции $\Phi^{(k)}$, $\omega^{(k)}$, так и неизвестные постоянные $\tau^{(k)}$, $d_i^{(k)}$, которые выражают упомянутый произвол. За счет неизвестных функций $\Phi^{(k)}$, $\omega^{(k)}$ удовлетворяются уравнения равновесия, условия совместности и граничные условия, а постоянные $\tau^{(k)}$, $d_2^{(k)}$, $d_3^{(k)}$, $d_1^{(k)}$ обеспечивают однозначность и существование введенных функций.

На свободном основании, по условию задачи, внешние силы равны нулю. В случае, когда внешние силы на свободном основании не равны нулю, а приводятся к различным силовым факторам, то к полученному решению накладываются известные решения задачи Сен-Венана [1] при простых видах деформаций.

Уравнения равновесия (3) и условия совместности (4) будут удовлетворены, если функци $\Phi^{(k)}$ и $\omega^{(k)}$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ 3$) в области поперечного сечения бруса будут удовлетворять уравнениям

$$\Delta_2\Phi^{(k)} = -\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}R_1(\ldots) - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}R_2(\ldots) + R_3(\ldots) \tag{10}$$

$$R_3(\ldots) = \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\Big\{\delta_{i-k}B_3\omega^{(k+1)} - \beta_{13}X^{(k)} - \beta_{23}Y^{(k)} + \delta_{i-(k+1)}\Big[\beta_{13}\int^{\xi}(ML_1^{(k+2)} + NL_2^{(k+2)})\,d\xi +$$

$$+\beta_{23}\int^{\eta}(LL_2^{(k+2)} + NL_1^{(k+2)})\,d\eta - \frac{(k+2)!}{2k!}\sigma_3\beta_{33}\Phi^{(k+2)}\Big] + (k+1)B_3(fd_2^{(k)} + \psi d_3^{(k)} + \varphi\tau^{(k)})\Big\} +$$

$$+(k+1)\{[2\beta_{23}b_1\xi - 2\sigma_2(\sigma_3E + 2\beta_{13}a_2)\eta]d_2^{(k)} + [2\beta_{13}b_2\eta - 2\sigma_1(\sigma_3E + 2\beta_{23}a_1)\xi]d_3^{(k)}\}$$

(11)

$$\Delta_1\omega^{(k)} = -Z^{(k)} + \delta_{i-k}\Big\{k!(k+1)\Big[\sigma_1\Big(\frac{\partial^2\Phi^{(k+1)}}{\partial\eta^2} - X^{(k+1)}\Big) + \sigma_2\Big(\frac{\partial^2\Phi^{(k+1)}}{\partial\xi^2} - Y^{(k+1)}\Big)\Big] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}(ML_1^{(k+1)} + NL_2^{(k+1)}) - \frac{\partial}{\partial\eta}(LL_2^{(k+1)} + NL_1^{(k+1)})\Big\} + \tau_{33}^{(k)*} + (k+1)\delta_{i-(k+1)}B_0\omega^{(k+2)} +$$

$$+\delta_{i-(k+2)}\Big[\sigma_1\int^{\xi}(ML_1^{(k+3)} + ML_2^{(k+3)})\,d\xi + \sigma_2\int^{\eta}(LL_2^{(k+3)} + NL_1^{(k+3)})\,d\eta + 3\beta_{33}\Phi^{(k+3)}\Big]$$

$$\Delta_2 = \beta_{22}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + (2\beta_{12} + \beta_{33})\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\eta^2} - 2\beta_{23}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\eta} - 2\beta_{13}\frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\eta^3} + \beta_{11}\frac{\partial^4}{\partial\eta^4} \qquad (k=0,1,2,3)$$

Значение $\tau_{33}^{(k)*}$ получается из $\tau_{33}^{(k)}$, если постоянные коэффициенты $d_1^{(k+1)}$, $d_2^{(k)}$, $d_3^{(k)}$, $\tau^{(k)}$ заменить соответственно на $d_1^{(k+2)}$, $d_2^{(k+1)}$, $d_3^{(k+1)}$, $\tau^{(k+1)}$, множитель $(k+1)$ на $(k+2)!$, выражение с множителем $d_1^{(k+1)}$ умножить на $\delta_{i-(k+1)}$ (вместо δ_{i-k}), а остальные выражения умножить на δ_{i-k}.

На контуре поперечного сечения бруса эти функции удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\xi} = \int\Big\{[Q_\eta^{(k)} + \tau_{12}^{(k)} + \delta_{i-k}N\omega^{(k+1)}]\cos(n,\xi) + \Big[F_\eta^{(k)} - Y^{(k)} + \tau_{22}^{(k)} + \tag{12}$$

$$+\delta_{i-k}L\omega^{(k+1)} + \delta_{i-(k+1)}\int^{\eta}(LL_2^{(k+2)} + NL_1^{(k+2)})\,d\eta\Big]\cos(n,\eta)\Big\}\,ds$$

$$\frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\eta} = -\int\Big\{\Big[Q_\xi^{(k)} - X^{(k)} + \tau_{11}^{(k)} + \delta_{i-(k+1)}\int^{\xi}(ML_1^{(k+2)} + NL_2^{(k+2)})\,d\xi +$$

$$+\delta_{i-k}M\omega^{(k+1)}\Big]\cos(n,\xi) + [\tau_{12}^{(k)} + \delta_{i-k}N\omega^{(k+1)} + F_\xi^{(k)}]\cos(n,\eta)\Big\}\,dS \tag{13}$$

$$\frac{d_1\omega^{(k)}}{dn} = -\Big\{\Big[k! - \frac{k(k-1)(k-2)}{2}\Big][(Q_\zeta^{(k)} + E\xi d_1^{(k)})\cos(n,\xi) + F_\zeta^{(k)}\cos(n,\eta) +$$

$$+d_1^{(k)}b_1\xi\cos(n,\eta)] + \delta_{i-k}[(ML_1^{(k+1)} + NL_2^{(k+1)})\cos(n,\xi) + (LL_2^{(k+1)} + NL_1^{(k+1)})\cos(n,\eta)]\Big\}$$

$(i=3,\ k=0,1,2,3)$

$$\frac{d_1}{dn} = \Big(M\frac{\partial}{\partial\xi} + N\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)\cos(n,\xi) + \Big(L\frac{\partial}{\partial\eta} + N\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)\cos(n,\eta)$$

Учитывая (10), легко показать, что

$$\frac{\partial^3L_1^{(k)}}{\partial\xi\,\partial\eta^2} + \frac{\partial^3L_2^{(k)}}{\partial\xi^2\,\partial\eta} + \frac{k!}{E}\Big[\Big(\beta_{13}\frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\eta^3} + \beta_{23}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\eta}\Big)\Phi^{(k)} + R(\ldots)\Big] = 0$$

Следовательно, $h_1^{(k)}(\xi)$, $h_2^{(k)}(\eta)$ определяются из условия

$$\frac{\partial L_1^{(k)}}{\partial\eta}+\frac{\partial L_2^{(k)}}{\partial\xi}+\int\left\{\int\frac{k!}{E}\left[\left(\beta_{13}\frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\eta^3}+\beta_{23}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\eta}\right)\Phi^{(k)}+R_3(\ldots)\right]d\eta\right\}d\xi=0$$

Однозначность функций [1] $\Phi^{(k)}$ и их частных производных $\partial\Phi^{(k)}/\partial\xi$, $\partial\Phi^{(k)}/\partial\eta$ удовлетворяются при обходе контура s, если

$$d_3^{(k)}=\frac{1}{2(1+k)EJ_\xi}\iint\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(Q_\eta^{(k)}+\delta_{i-k}N\omega^{(k+1)}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(F_\eta^{(k)}-Y^{(k)}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta_{i-(k+1)}\left(LL_2^{(k+2)}+NL_1^{(k+2)}\right)\right]d\xi\,d\eta$$

$$d_2^{(k)}=-\frac{1}{2(1+k)EJ_\eta}\iint\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[Q_\xi^{(k)}-X^{(k)}+\delta_{i-k}M\omega^{(k+1)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(F_\xi^{(k)}+\delta_{i-k}N\omega^{(k+1)}\right)+\delta_{i-(k+1)}\left(ML_1^{(k+2)}+NL_2^{(k+2)}\right)\right]d\xi\,d\eta$$

$$\tau^{(k)}=-\frac{1}{D_0(k+1)}\iint\limits_S\left\{Q_\eta^{(k)}-F_\xi^{(k)}+\xi\left[\frac{\partial}{\partial\xi}Q_\eta^{(k)}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(F_\eta^{(k)}-Y^{(k)}\right)+\delta_{i-k}\left(N\frac{\partial}{\partial\xi}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+L\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\omega^{(k+1)}+\delta_{i-(k+1)}\left(LL_2^{(k+2)}+NL_1^{(k+2)}\right)\right]-\eta\left[\frac{\partial}{\partial\eta}F_\xi^{(k)}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(Q_\xi^{(k)}-X^{(k)}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta_{i-k}\left(M\frac{\partial}{\partial\xi}+N\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\omega^{(k+1)}+\delta_{i-(k+1)}\left(ML_1^{(k+2)}+NL_2^{(k+2)}\right)\right]+$$

$$\left.+\xi\left(\frac{\partial\tau_{12}^{(k)*}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{22}^{(k)*}}{\partial\eta}\right)-\eta\left(\frac{\partial\tau_{12}^{(k)*}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{11}^{(k)*}}{\partial\xi}\right)\right\}d\xi\,d\eta$$

Значения $\tau_{ij}^{(k)*}$ получаются соответственно из $\tau_{ij}^{(k)}$, если не учитывать выражения с множителем $\tau^{(k)}$

$$D_0=\iint\limits_S\left[L(\varphi_\eta'+\xi)\xi-M(\varphi_\xi'-\eta)\eta\right]d\xi\,d\eta$$

где D_0 – жесткость анизотропного призматического бруса при кручении, S – площадь поперечного сечения, s – контур поперечного сечения бруса.

Постоянные $d_1^{(k)}$ определяются из условия существования функций $\omega^{(k)}$

$$d_1^{(k)}=-\left\{ES\left[k!-\frac{k(k-1)(k-2)}{2}\right]\right\}^{-1}\iint\limits_S\left\{\left[k!-\frac{k(k-1)(k-2)}{2}\right]\left(\frac{\partial}{\partial\xi}Q_\zeta^{(k)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}F_\zeta^{(k)}-Z^{(k)}+k!(k+1)\delta_{i-k}\left[\sigma_1\left(\frac{\partial^2\Phi^{(k+1)}}{\partial\eta^2}-X^{(k+1)}\right)+\sigma_2\left(\frac{\partial^2\Phi^{(k+1)}}{\partial\xi^2}-Y^{(k+1)}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\delta_{i-(k+1)}(k+1)B_0\omega^{(k+2)}+\delta_{i-(k+2)}\right)\left[\sigma_1\int^{\xi}\left(ML_1^{(k+3)}+NL_2^{(k+3)}\right)d\xi+\right.$$

$$\left.\left.+\sigma_2\int^{\eta}\left(LL_2^{(k+3)}+NL_1^{(k+3)}\right)d\eta+3\beta_{33}\Phi^{(k+3)}\right]+\tau_{33}^{(k)*}\right\}d\xi\,d\eta$$

При доказательстве однозначности обобщенных бигармонических функций $\Phi^{(k)}$ и их частных производных $\partial\Phi^{(k)}/\partial\xi$, $\partial\Phi^{(k)}/\partial\eta$ применяется формула Остроградского – Грина и учитывается свойство обобщенного уравнения Пуассона

$$\iint\limits_S \left(M\frac{\partial}{\partial\xi} + N\frac{\partial}{\partial\eta} \right) d\xi\, d\eta = \int\limits_s \xi \frac{d_1}{dn} ds - \iint\limits_S \xi\Delta_1\, d\xi\, d\eta$$

$$\iint\limits_S \left(L\frac{\partial}{\partial\eta} + N\frac{\partial}{\partial\xi} \right) d\xi\, d\eta = \int\limits_s \eta \frac{d_1}{dn} ds - \iint\limits_S \eta\Delta_1\, d\xi\, d\eta$$

Таким образом, поставленная пространственная задача сводится к определению четырех обобщенно-гармонических $\omega^{(k)}$ (k=0, 1, 2, 3) и четырех обобщенно-бигармонических $\Phi^{(k)}$ (k=0, 1, 2, 3) функций в области S поперечного сечения бруса при известных значениях (10), (11) и на контуре (12), (13).

Количество граничных задач зависит от порядка полинома k. Если обозначить количество граничных задач через n, то зависимость можно представить в виде n=2(k+1) (k=0, 1, 2, 3).

Предлагаемое решение (верхний предел степени ($l-\zeta$) обозначен через i) дает возможность получить решение всех тринадцати задач путем изменения i от трех до нуля.

Поступила 19 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.— Л., Гостехиздат, 1950.

УДК 539.3

О РАССЕЯНИИ ЭНЕРГИИ В УПРУГОМ ДИСКРЕТНОМ КОНТАКТЕ

В. И. МАКСАК

(Томск)

Рассматривается вопрос о рассеивании энергии в упругом дискретном контакте в условиях предварительного смещения, когда сдвигающие усилия не превышают силы трения покоя. На основании теоретического и экспериментального анализа устанавливаются зависимости величины рассеиваемой энергии от основных параметров (внешних нагрузок, механических, геометрических и фрикционных характеристик контактирующих поверхностей). Приводятся расчетные формулы.

Уровень вибрации и шума характеризует динамическую напряженность и определяет в некоторой степени надежность и точность работы конструкций. В связи с этим в последнее время резко возрос интерес исследователей к новому разделу современной теории машин – «акустической динамике машин» [1] и, в частности, к рассеиванию энергии на фрикционном контакте [2–5], являющемся эффективным ограничителем распространения вибраций по конструкции.

Величина рассеянной энергии за цикл симметричного нагружения определяется площадью, заключенной между кривыми предварительного смещения ABC (фиг. 1) и CDA. Эксперимент проводился на образцах и установке, описанных в работе [6]. Площадь контакта, равная 125 *мм*^{2}, представляет собой плоский стык, имеющий форму кольцевой дорожки со средним диаметром 20 *мм*.

Влияние величины сдвигающей силы (в *кГ*) показано на фиг. 2. Экспериментально получена зависимость рассеяния энергии ω для контакта стальных образцов с чистотой обработки $\nabla 8$ от силы сдвига P для коэффициентов трения покоя 0.29, 0.4, 0.51, 0,56 (линии 1–4 соответственно), N=45 *кг*. С увеличением сдвигающих усилий как предельных ($P=fN$), так и непредельных ($P \ll fN$) рассеяние энергии ω (в *кГмк*) увеличивается. При одинаковых силах сдвига большему коэффициенту трения, на-