

О НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ТРЕХМЕРНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В НЕУПРУГИХ СРЕДАХ
И СРЕДАХ С ВНУТРЕННИМ ТРЕНИЕМ

Г. А. ГЕНИЕВ

(Москва)

Рассматриваются вопросы распространения трехмерных волн в сплошных изотропных средах, физические соотношения для которых, в случае активной деформации, имеют форму перекрестных зависимостей между первыми и вторыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций. Чисто продольные и поперечные волны имеют место, вообще говоря, только при совпадении нормали к фронту волны с одним из главных направлений. Скорости распространения волн деформаций существенно образом зависят как от вида напряженного состояния в рассматриваемой точке, так и от степени развития пластических деформаций.

Физические зависимости при распространении трехмерных волн в сплошных изотропных средах в случае активной деформации будем определять соотношениями вида

$$(1) \quad T = T(\Gamma, \theta), \quad \sigma = \sigma(\Gamma, \theta)$$

где T — интенсивность касательных напряжений, σ — среднее напряжение, Γ — интенсивность деформаций сдвига, θ — объемная деформация.

Соотношения (1) описывают, таким образом, перекрестные зависимости между инвариантами напряженного и деформированного состояния среды.

$$(2) \quad \sigma_{ii} = \sigma(\Gamma, \theta) + 2 \frac{T(\Gamma, \theta)}{\Gamma} e_{ii}, \quad \tau_{ij} = 2 \frac{T(\Gamma, \theta)}{\Gamma} e_{ij}$$

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\theta}{3}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Подставляя (2) в динамические уравнения равновесия, получим систему трех дифференциальных уравнений

$$(3) \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \frac{T}{3\Gamma} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{2}{\Gamma} \sum_{j=1}^3 e_{ij} \left[\frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial T}{\partial \Gamma} - \frac{T}{\Gamma} \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} \right] +$$

$$+ \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} + \frac{T}{\Gamma} \nabla^2 u_i + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i=1, 2, 3)$$

Выражения для производных от величины Γ по координатам имеют вид

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} = \frac{2}{\Gamma} \sum_{h=1}^3 \sum_{m=1}^3 e_{hm} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_j \partial x_m}$$

Очевидно также, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \nabla^2 u_i = \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Система (3) может быть записана при этом в форме

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{j=3} \left\{ \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \frac{T}{3\Gamma} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{2e_{ij}}{\Gamma} \left[\frac{\partial T}{\partial \theta} \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial \Gamma} - \frac{T}{\Gamma} \right) \sum_{k=1}^{k=3} \sum_{m=1}^{m=3} e_{km} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_m} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \sum_{m=1}^{m=3} e_{jm} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_m} + \frac{T}{\Gamma} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right\} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i=1,2,3)$$

Имеем систему трех квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций u_i .

Перейдем к определению скоростей распространения трехмерных волн — нестационарных поверхностей сильных разрывов вторых производных перемещений, являющихся, вообще говоря, поверхностями слабых разрывов деформаций и напряжений.

Пусть $\omega(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ — уравнение поверхности разрыва. Кинематические условия совместности имеют вид

$$(5) \quad \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_h} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_h} \lambda_{ij}$$

где λ_{ij} — коэффициенты прерывности.

В дальнейшем будем полагать, что система координат x_1, x_2, x_3 совпадает с направлениями главных деформаций (напряжений) в рассматриваемой точке среды. В этом случае $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Применяя условия (5) к системе (4), получим динамические условия совместности, представляющие собой систему трех однородных уравнений относительно λ_{ij}

$$(6) \quad \sum_{j=1}^{j=3} A_{ij} \lambda_{ij} = 0$$

$$(7) \quad A_{ij} = a_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad \text{при } i \neq j$$

$$A_{ii} = a_{ii} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{T}{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_h} \right)^2 \right] - \rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2$$

$$(8) \quad a_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \frac{T}{3\Gamma} + \frac{2}{\Gamma} e_{ii} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{\Gamma} e_{ij} \left[\frac{2}{\Gamma} e_{ii} \left(\frac{\partial T}{\partial \Gamma} - \frac{T}{\Gamma} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \right]$$

$$a_{ii} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \frac{4T}{3\Gamma} + \frac{2}{\Gamma} e_{ii} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{\Gamma} e_{ii} \left[\frac{2}{\Gamma} e_{ii} \left(\frac{\partial T}{\partial \Gamma} - \frac{T}{\Gamma} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \right]$$

Значения скоростей распространения волн по нормали к фронту N определяются соотношением

$$N^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \left[\sum_{j=1}^{j=3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{-1}$$

Последние могут быть найдены из условия равенства нулю определителя системы однородных уравнения (6).

Имея в виду, что направляющие косинусы l_i вектора нормали к фронту волны в локальной системе координат, совпадающей с главными осями, определяются зависимостями

$$l_i^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 \left[\sum_{j=1}^{j=3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{-1}$$

запишем определитель системы (7) в форме

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_{11}l_1^2 + \frac{T}{\Gamma}(l_2^2 + l_3^2) - \rho N^2; & a_{12}l_1l_2; & a_{13}l_1l_3 \\ a_{21}l_2l_1; & a_{22}l_2^2 + \frac{T}{\Gamma}(l_3^2 + l_1^2) - \rho N^2; & a_{23}l_2l_3 \\ a_{31}l_3l_1; & a_{32}l_3l_2; & a_{33}l_3^2 + \frac{T}{\Gamma}(l_1^2 + l_2^2) - \rho N^2 \end{vmatrix} = 0$$

причем на основании (8), вообще говоря, $a_{ij} \neq a_{ji}$.

В общем случае (при $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$, $l_3 \neq 0$), кубическое относительно N^2 уравнение (9) определяет три независимые скорости распространения волн. Исследование характера разрывов показывает, что чисто продольные и поперечные волны имеют место только при совпадении нормали к фронту волны с одним из главных направлений.

При $l_i = 1$ ($l_j = l_k = 0$), имеем $(a_{ii} - \rho N^2)(T\Gamma^{-1} - \rho N^2)^2 = 0$, откуда $N_1 = (a_{ii}/\rho)^{1/2}$, $N_2 = N_3 = (T/\rho\Gamma)^{1/2}$, N_1 — скорость распространения продольных, N_2 — скорость распространения поперечных волн.

Рассмотрим среду, уравнения состояния которой описываются теорией малых упругопластических деформаций [1].

Соотношения (1) при этом имеют вид

$$(10) \quad T = g(\Gamma)\Gamma, \quad \sigma = K\theta$$

где $g = g(\Gamma)$ — секущий модуль сдвига, $K = \text{const}$ — модуль объемной деформации.

В соответствии с (10)

$$\frac{\partial T}{\partial \Gamma} = g + \frac{dg}{d\Gamma}\Gamma, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = K$$

и выражения (8) записываются в форме

$$(11) \quad a_{ij} = a_{ji} = \left(K + \frac{g}{3} \right) + \frac{4}{\Gamma} \frac{dg}{d\Gamma} e_{ii}e_{jj}, \quad a_{ii} = \left(K + \frac{4g}{3} \right) + \frac{4}{\Gamma} \frac{dg}{d\Gamma} e_{ii}^2$$

Для сред, обладающих внутренним трением, в частности для реальных грунтов, может быть использована модель сжимаемой жесткоупругопластической среды [2], физические зависимости для которой имеют вид

$$(12) \quad T = G_0\Gamma - fK\theta, \quad \sigma = K\theta$$

где $G_0 = \text{const}$ — модуль сдвига при чистом сдвиге, $f < 1$ — коэффициент внутреннего трения.

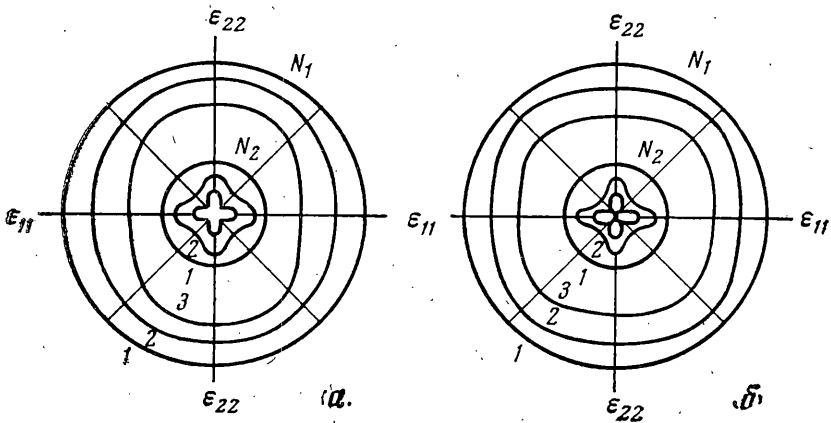
В соответствии с (12)

$$\frac{\partial T}{\partial \Gamma} = G_0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -fK, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = K$$

и выражения (8) записываются в форме

$$(13) \quad a_{ij} = \left(K + \frac{G}{3} \right) - \frac{2}{\Gamma} fK \left(1 - \frac{2\theta}{\Gamma^2} e_{ij} \right) e_{ii}$$

$$a_{ii} = \left(K + \frac{4G}{3} \right) - \frac{2}{\Gamma} fK \left(1 - \frac{2\theta}{\Gamma^2} e_{ii} \right) e_{ii}, \quad G = T\Gamma^{-1} = G_0 - fK\theta\Gamma^{-1}$$



Фиг. 1

Очевидно, что для данной модели среды в отличие от (11) $a_{ij} \neq a_{ji}$.

В случае плоской деформации значения N определяются на основании (9) из выражения

$$(14) \quad 2\rho N^2 = \left(a_{11} + \frac{T}{\Gamma} \right) \cos^2 \alpha + \left(a_{22} + \frac{T}{\Gamma} \right) \sin^2 \alpha \pm$$

$$\pm \left\{ \left[\left(a_{11} - \frac{T}{\Gamma} \right) \cos^2 \alpha - \left(a_{22} - \frac{T}{\Gamma} \right) \sin^2 \alpha \right]^2 + 4a_{12}a_{21} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right\}^{1/2}$$

где α — угол между нормалью к фронту и направлением главного нормального напряжения σ_{11} .

Значения N , соответствующие случаям $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$, являются, вообще говоря, экстремальными.

Исследование (14) показывает, что могут существовать и промежуточные экстремумы $N(\alpha_1)$ и $N(\alpha_2)$, определяемые выражениями

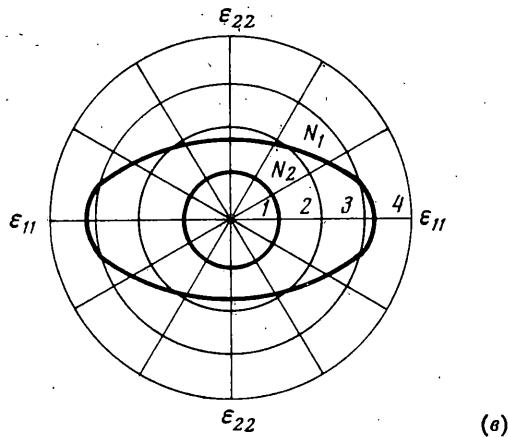
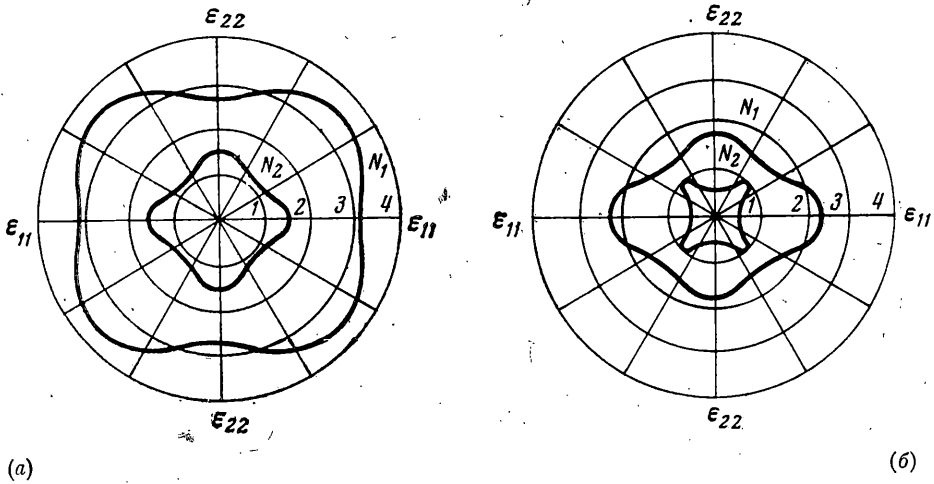
$$\rho N^2(\alpha_{1,2}) = \frac{a_{11}a_{22} - [(a_{12}a_{21})^{1/2} \pm T\Gamma^{-1}]^2}{(a_{11} + a_{22} - 2T\Gamma^{-1}) \mp 2(a_{12}a_{21})^{1/2}}$$

причем

$$\cos^2(\alpha_{1,2}) = \frac{(a_{22} - T\Gamma^{-1}) \mp (a_{12}a_{21})^{1/2}}{(a_{11} + a_{22} - 2T\Gamma^{-1}) \mp 2(a_{12}a_{21})^{1/2}}$$

Анализ полученных выше результатов показывает, что скорости распространения волн деформаций существенно зависят от вида напряженного состояния в рассматриваемой точке (определяемого инвариантами соответствующих тензоров и девиаторов), от взаимной ориентации нормали к фронту волны и главных осей, а также (для неупругих сред) от степени развития пластических деформаций.

На фиг. 1 изображены векторные диаграммы приведенных скоростей распространения волн $\rho N_1^2 / g_0$ и $\rho N_2^2 / g_0$, построенные по соотношениям



Фиг. 2

(11) и (14) для двух характерных видов напряженно-деформированных состояний плоской деформации среды, подчиняющейся теории малых упруго-пластических деформаций: фиг. 1, *a* — одноосная деформация $\epsilon_{11} \neq 0$, $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$; фиг. 1, *b* — чистый сдвиг $\epsilon_{11} = -\epsilon_{22}$, $\epsilon_{33} = 0$.

Зависимость между T и Γ принималась в форме

$$T = g_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right) \Gamma, \quad g(\Gamma) = g_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right), \quad \frac{dg}{d\Gamma} = -\frac{g_0}{2\Gamma_s}$$

g_0 — начальный модуль сдвига, Γ_s — предельное значение интенсивности деформаций сдвига, соответствующее точке с $dT/d\Gamma = 0$. Принималось также, что $K = 5/3 g_0$. Векторные диаграммы строились для трех значений отношения Γ/Γ_s , равных 0, $1/4$, 1 (соответственно линии 1, 2, 3).

Из фигур следует, что диаграммы приведенных скоростей в значительной степени отклоняются от окружностей по мере приближения Γ/Γ_* к единице.

В случае чистого сдвига, при $\Gamma/\Gamma_* = 1$ значение N_2 в направлении главных касательных напряжений равно нулю, а соответствующее значение N_1 имеет максимум. При $\Gamma/\Gamma_* \rightarrow 0$, независимо от вида напряженно-деформированного состояния, векторные диаграммы N_1 и N_2 переходят в окружности.

На фиг. 2 изображены векторные диаграммы приведенных скоростей распространения волн $\rho N_1^2/G_0$ и $\rho N_2^2/G_0$, построенные по соотношениям (13) и (14) для трех характерных видов напряженно-деформированных состояний плоской деформации среды, обладающей внутренним трением: фиг. 2, а — одноосное укорочение $\varepsilon_{11} < 0$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$; фиг. 2, б — одноосное удлинение $\varepsilon_{22} > 0$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = 0$; фиг. 2, в — чистый сдвиг $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}$, $\varepsilon_{11} < 0$, $\varepsilon_{33} = 0$.

Принималось, что $K = 2G_0/\sqrt{3}$, $f = 0.5$. Отсюда следует, что при прочих равных условиях значение N_1 в направлении деформаций укорочения больше, чем в направлении деформаций удлинения. При чистом сдвиге векторная диаграмма N_1 является эллипсом, диаграмма N_2 практически не отличается от окружности.

Приведенные результаты могут иметь непосредственное приложение при решении пространственных и плоских динамических задач для сред, физические зависимости которых могут быть описаны соотношениями (1).

Поступила 30 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. М., Гостехиздат, 1948.
2. Гениев Г. А. Некоторые вопросы динамики сжимаемой жесткоупругопластической среды. Тр. IV Всес. конф. по прочности и пластичности. М., «Наука», 1971.