

О НАБЛЮДАЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е. Я. РОЙТЕНБЕРГ

(Москва)

Гироскопические системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями достаточно сложного вида [1]. Непосредственное определение мгновенного состояния этих систем в фазовом пространстве не представляется возможным, так как не все координаты гироскопической системы доступны измерению. Поэтому важной является задача об определении фазового состояния гироскопической системы по наблюдениям на конечном отрезке времени тех ее координат, которые доступны измерению, т. е. задача о наблюдаемости [2, 3] гироскопической системы.

В данной работе показана возможность применения метода μ -наблюдаемости решений нелинейных дифференциальных уравнений [4-6] к теории гироскопических систем, а именно решается задача о μ -наблюдаемости гироскопического компаса.

Уравнения движения гироскопического компаса, установленного на неподвижном основании, имеют [1] следующий вид:

$$(1) \quad 2B \sin \delta \left[-\frac{V}{R} (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) - (\alpha^* + \Omega) \cos \beta \cos \gamma - \beta^* \sin \gamma \right] = -lmV\Omega \cos \alpha \cos \beta - l \left(P - \frac{mV^2}{R} \right) \sin \beta$$

$$2B \sin \delta \left[\frac{V}{R} (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - (\alpha^* + \Omega) \cos \beta \sin \gamma + \beta^* \cos \gamma \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} (2B \sin \delta) = lmV\Omega (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - l \left(P - \frac{mV^2}{R} \right) \cos \beta \sin \gamma$$

$$2B \cos \delta \left[\frac{V}{R} \cos \alpha \cos \beta + (\alpha^* + \Omega) \sin \beta + \gamma^* \right] = \frac{4B^2}{lmR} \sin \delta \cos \delta$$

$$V = RU \cos \varphi, \quad \Omega = U \sin \varphi$$

Здесь B — собственный кинетический момент каждого из обоих установленных в гиросфере одинаковых гироскопов; α — угол поворота гиросферы в азимуте; β и γ — углы подъема над горизонтальной плоскостью диаметра гиросферы, направленного по биссектрисе угла между осями роторов гироскопов и перпендикулярного к нему диаметра, расположенного в плоскости осей роторов гироскопов соответственно; δ — угол прецессии гироскопов, установленных в гиросфере относительно нее, $\kappa = 4B^2/lmR$ — жесткость пружины, связывающей кожухи гироскопов между собой, U — угловая скорость вращения земного шара; R — радиус земного шара; φ — широта местонахождения прибора; величины m и P представляют собой массу гиросферы и действующую на нее силу тяготения к Земле; l — расстояние от центра тяжести гиросферы до ее геометрического центра.

Система дифференциальных уравнений (1) имеет частное решение: $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\beta} = 0$, $\gamma = 0$, $\tilde{\delta} = \delta^*$, в котором δ^* определяется соотношением

$$(2) \quad 2B \sin \delta^* = lmV$$

Вводя новые переменные x_1, \dots, x_4 при помощи соотношений $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$, $\gamma = x_3$, $\delta = \delta^* + x_4$, преобразуем систему (1) к нормальной форме Коши

$$(3) \quad \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (i=1, \dots, 4)$$

где функции $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеют следующий вид:

$$(4) \quad \dot{x}_1 = -\Omega + \frac{lmV\Omega \cos x_1 \cos x_3}{2B \sin(\delta^* + x_4)} + \frac{V \cos x_1 \sin x_2}{R \cos x_2} + \frac{l(P - mV^2/R) \sin x_2 \cos x_3}{2B \sin(\delta^* + x_4) \cos x_2}$$

$$f_2 = -\frac{V}{R} \sin x_1 + \frac{lmV\Omega \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3}{2B \sin(\delta^* + x_4)} + \frac{l(P - mV^2/R) \sin x_2 \sin x_3}{2B \sin(\delta^* + x_4)}$$

$$f_3 = -\frac{V}{R} \cos x_1 \cos x_2 + \frac{2B \sin(\delta^* + x_4)}{lmR} - \frac{lmV\Omega \cos x_1 \sin x_2 \cos x_3}{2B \sin(\delta^* + x_4)}$$

$$-\frac{V \cos x_1 \sin^2 x_2}{R \cos x_2} - \frac{l(P - mV^2/R) \sin^2 x_2 \cos x_3}{2B \sin(\delta^* + x_4) \cos x_2}$$

$$f_4 = \frac{lmV\Omega (\sin x_1 \cos x_3 + \cos x_1 \sin x_2 \sin x_3)}{2B \cos(\delta^* + x_4)} - \frac{l(P - mV^2/R) \cos x_2 \sin x_3}{2B \cos(\delta^* + x_4)}$$

Будем предполагать, что у гиригоризонткомпыа доступны наблюдению угол наклона к горизонту диаметра гиросферы, направленного по биссектрисе угла, образованного осями роторов гироскопов (т. е. обобщенная координата x_2) и угол поворота гироскопов относительно гиросферы (т. е. обобщенная координата x_4). Обозначая через C матрицу

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

представим наблюдаемую вектор-функцию $y(t)$ в виде

$$(5) \quad y(t) = Cx(t) = \begin{vmatrix} x_2(t) \\ x_4(t) \end{vmatrix}$$

Для определения состояния гиригоризонткомпыа, т. е. для определения его координат $x_j(t)$, $j=1, \dots, 4$ при отсутствии сведений о начальном состоянии гиригоризонткомпыа, образуем систему, которая будет осуществлять μ -наблюдение [4-6].

Дифференциальные уравнения, которым должна удовлетворять вектор-функция $\zeta(t)$, осуществляющая μ -наблюдение, будут иметь вид

$$(6) \quad \dot{\zeta}_i = f_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) + u_i(t) \quad (i=1, \dots, 4)$$

где функции $f_i(\zeta_1, \dots, \zeta_4)$ определяются, согласно (4), а $u_1(t), \dots, u_4(t)$ — управляющие воздействия, которые требуется выбрать так, чтобы к некоторому заданному моменту времени t_1 норма вектора $\zeta(t_1) - x(t_1)$ была достаточно мала.

Обозначим через $z(t)$ вектор-функцию

$$(7) \quad z(t) = \zeta(t) - x(t)$$

В соответствии с (3) и (6) уравнение первого приближения, которому удовлетворяет вектор-функция $z(t)$, будет следующим:

$$(8) \quad \dot{z} = az + u(t)$$

где

$$a = \begin{vmatrix} 0 & \frac{P}{mV} & 0 & -\frac{\Xi\Omega}{lmV} \\ -\frac{V}{R} & 0 & \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega & 0 & \frac{\Xi}{lmR} \\ \frac{lmV\Omega}{\Xi} & 0 & -\frac{l}{\Xi} \left(P - \frac{mV^2}{R} \right) & 0 \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{vmatrix}, \quad u(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{vmatrix}$$

Здесь через Ξ обозначено: $\Xi = 2B \cos \delta^* = [4B^2 - (lmV)^2]^{1/2}$

Аналогично (5) обозначим через $\eta(t)$ вектор-функцию

$$\eta(t) = C\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_2(t) \\ \xi_4(t) \end{pmatrix}$$

Обозначим через b матрицу

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$$

Примем в качестве $u(t)$ вектор-функцию

$$(9) \quad u(t) = b[\eta(t) - y(t)] = bC(\xi - x) = bCz(t)$$

Таким образом, согласно (9) и (7), вектор-функция $u(t)$ будет иметь вид

$$(10) \quad u(t) = \begin{pmatrix} b_1 z_2(t) \\ b_2 z_2(t) \\ b_3 z_4(t) \\ b_4 z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \xi_2(t) - b_1 x_2(t) \\ b_2 \xi_2(t) - b_2 x_2(t) \\ b_3 \xi_4(t) - b_3 x_4(t) \\ b_4 \xi_4(t) - b_4 x_4(t) \end{pmatrix}$$

В соответствии с (9), векторное дифференциальное уравнение (8) принимает вид

$$(11) \quad z' = (a + bC)z$$

Введем теперь вектор-функцию s при помощи соотношения

$$(12) \quad z = e^{-\sigma t} s, \quad \sigma > 0$$

Уравнение (11) преобразуется к виду

$$(13) \quad s' = (a + \sigma E + bC)s$$

Здесь E — единичная матрица.

Векторному дифференциальному уравнению (13) соответствует следующая система скалярных дифференциальных уравнений:

$$(14) \quad \begin{aligned} s_1' &= \sigma s_1 + \left(\frac{P}{mV} + b_1 \right) s_2 - \frac{\Xi \Omega}{lmV} s_4 \\ s_2' &= -\frac{V}{R} s_1 + (\sigma + b_2) s_2 + \Omega s_3 \\ s_3' &= -\Omega s_2 + \sigma s_3 + \left(\frac{\Xi}{lmR} + b_3 \right) s_4 \\ s_4' &= \frac{lmV\Omega}{\Xi} s_1 - \frac{l}{\Xi} \left(P - \frac{mV^2}{R} \right) s_3 + (\sigma + b_4) s_4 \end{aligned}$$

Обозначим теперь

$$\rho_1 = \frac{V}{R} s_1, \quad \rho_2 = s_2, \quad \rho_3 = s_3, \quad \rho_4 = \frac{\Xi}{lmR} s_4$$

$$B_1 = (U \cos \varphi) b_1, \quad B_2 = b_2, \quad B_3 = \frac{lmR}{\Xi} b_3, \quad B_4 = b_4$$

Вводя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \sigma & v^2 & 0 & -\Omega \\ -1 & \sigma & \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega & \sigma & 1 \\ \Omega & 0 & v^2 \left(1 - \frac{V^2}{gR} \right) & \sigma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \\ 0 & B_3 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{pmatrix}$$

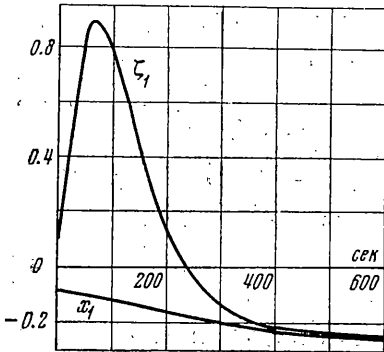
в которых $v^2=g/R$, можно заменить систему дифференциальных уравнений (14) векторным дифференциальным уравнением

$$(15) \quad \rho^* = (A+BC)\rho$$

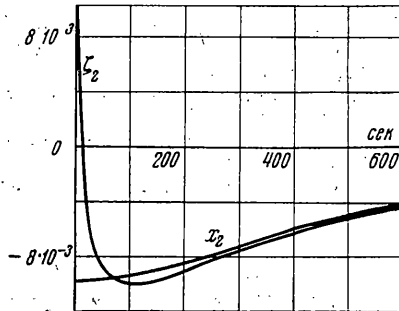
Перейдем теперь к определению коэффициентов b_1, \dots, b_4 , входящих в выражения (10) для управлений $u_1(t), \dots, u_4(t)$. В работах [4-6] о μ -наблюдаемости показано, каким условиям должны удовлетворять эти коэффициенты, чтобы точное (нелинейное) дифференциальное уравнение, которому в соответствии с (3) и (6) удовлетворяет вектор-функция $z(t)$

$$(16) \quad z^* = [a+b(t)C]z + F(z, t)$$

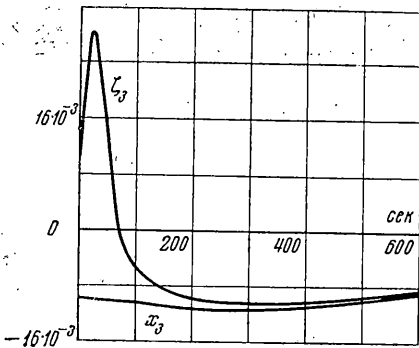
удовлетворяло свойству $L(v, N)$, т. е. чтобы имела место асимптотическая μ -наблюдаемость. Рассмотрим гироскопический компас, параметры которого имеют следующие значения: $2B=219\,000$ Гсм·сек, $IP=6760$ Гсм. Пусть широта местонахождения $\varphi=60^\circ$.



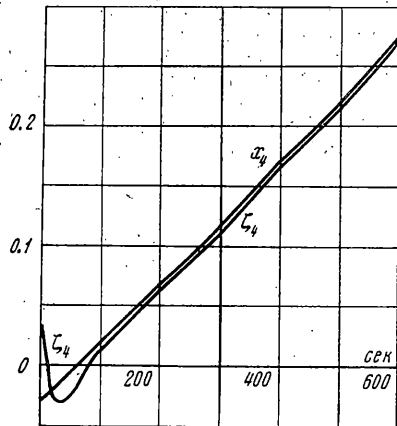
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Так как радиус земного шара $R=6371.228$ км, угловая скорость суточного вращения земного шара $U=7.29212 \cdot 10^{-5}$ сек $^{-1}$, то $V=RU \cos \varphi=23\,230$ см·сек $^{-1}$. При этом, в соответствии с формулой (2), $\delta^*=0.819700926$. Заметим еще, что $v=(g/R)^{1/2}=1.2408603 \cdot 10^{-3}$ сек $^{-1}$, $v^2=1.53973427 \cdot 10^{-6}$ сек $^{-2}$, $\Omega=U \sin \varphi=6.315158 \cdot 10^{-5}$ сек $^{-1}$, $U \cos \varphi=3.64606 \cdot 10^{-5}$ сек $^{-1}$. Входящий в выражение (12) коэффициент σ примем $\sigma=0.018$. Коэффициенты b_1, \dots, b_4 приняты следующими:

$$(17) \quad b_1=16.45(1-e^{-0.01t}), \quad b_2=-0.05, \quad b_3=0.0436, \quad b_4=-0.08$$

Множитель $1 - e^{-0.01t}$ в коэффициенте b_1 ограничивает рост координаты $\zeta_1(t)$ на начальном интервале наблюдения (фиг. 1).

Векторное дифференциальное уравнение (15) при значениях (17) коэффициентов b_1, \dots, b_4 будет линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Предельное уравнение, в которое при $t \rightarrow \infty$ переходит уравнение (15), соответствует значениям

$$(18) \quad b_1 = b_1^* = 16.45, \quad b_2 = b_2^* = -0.05, \quad b_3 = b_3^* = 0.0436, \quad b_4 = b_4^* = -0.08$$

При значениях (18) коэффициентов b_1, \dots, b_4 все собственные числа матрицы $A+BC$ расположены на плоскости комплексного переменного p строго левее мнимой оси, а именно: $p_1 = -0.0016041$, $p_2 = -0.0126471$, $p_3, p_4 = -0.0218743 \pm i0.0193691$.

В силу известной теоремы о характеристических показателях решений системы линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой при $t \rightarrow \infty$ стремятся к пределу, наибольший характеристический показатель решений этой системы совпадает с наибольшим характеристическим показателем решений предельной системы. Таким образом, при значениях (17) коэффициентов b_1, \dots, b_4 , как следует из (12), решения системы дифференциальных уравнений (11) будут, начиная с некоторого момента времени t , убывать не медленнее, чем $e^{-\sigma t}$, где $\sigma = 0.018$. Это и обеспечивает выполнение свойства $L(v, N)$ для нелинейного дифференциального уравнения (16).

Найденные на ЭВМ решения нелинейных дифференциальных уравнений (3) и (6) при значениях (17) коэффициентов b_1, \dots, b_4 и начальных рассогласованиях $z_1(0) = 0.2$, $z_2(0) = 0.02$, $z_3(0) = 0.02$, $z_4(0) = 0.06$ показывают (фиг. 1-4) равномерное асимптотическое приближение координат $\zeta_i(t)$ ($i=1, \dots, 4$) системы, осуществляющей наблюдение, k координатам $x_i(t)$ ($i=1, \dots, 4$) гироскопизмом компаса. К моменту времени $T = 1200$ сек рассогласования составляют: $z_1(T) \approx 10^{-8}$, $z_2(T) \approx -10^{-11}$, $z_3(T) \approx 10^{-11}$, $z_4(T) \approx -10^{-11}$.

Автор благодарит А. Ю. Ишлинского, предложившего рассматриваемую в данной работе задачу.

Поступила 18 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
2. Калман Р. Об общей теории систем управления. Тр. I конгресса ИФАК, т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1960.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
4. Ройтенберг Е. Я. О наблюдаемости нелинейных систем. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1969, № 2.
5. Ройтенберг Е. Я. О наблюдаемости решений нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 4.
6. Ройтенберг Е. Я. Об одном методе определения фазового состояния нелинейных систем. Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, т. 1, Киев. «Наукова думка», 1970.