

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА  
 ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ВАРИАЦИОННЫХ  
 ИТЕРАЦИЙ

В. В. НЕВЕРОВ, И. В. НЕВЕРОВ

(Калининград)

Задача упругопластического изгиба прямоугольных пластин решена методом вариационных итераций, ранее применявшимся для решения геометрически нелинейных задач [1, 2]. Предварительно, с помощью шагового (постепенного) метода в сочетании с методом последовательных приближений, физически нелинейная задача сводится к ряду линейных задач. Принята теория малых упругопластических деформаций и гипотезы Кирхгофа — Лява. Уравнение упругопластического изгиба пластины приведено к безразмерному виду. Алгоритм, разработанный на основе метода вариационных итераций, позволяет решать несимметричные задачи и задачи на местную нагрузку без усложнения вычислений. Расчеты проводились на ЭВМ «Минск-22»

1. Исходное уравнение упругопластического изгиба пластины имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (D_e + D_p) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left( \nu D_e + \frac{1}{2} D_p \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \\
 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ [2(1-\nu) D_e + D_p] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} + \\
 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ (D_e + D_p) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( \nu D_e + \frac{1}{2} D_p \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = q$$

В этом уравнении в отличие от уравнения, приведенного в [3], учитывается сжимаемость материала пластины в упругой зоне ( $\nu \neq 0.5$ ). Величины  $D_e$  и  $D_p$  представляют собой изгибные жесткости упругой и пластических областей пластины и определяются выражениями

$$D_e = \frac{4Gh_e^3}{3(1-\nu)}, \quad D_p = 4 \int_{h_e}^h \frac{\tau}{\gamma} z^2 dz$$

Здесь  $\tau = [ (1/3) (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + \tau_{xy}^2 ]^{1/2}$  — интенсивность девиатора напряжений,  $\gamma = [ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \gamma_{xy}^2 ]^{1/2}$  — интенсивность девиатора деформации при пластическом состоянии,  $h_e$  — аппликата границы между упругой и пластической областями, определяемая из условия

$$(1.2) \quad \gamma_e = h_e \kappa_e = \gamma_e \\
 \gamma_e = [ 3^{-1/2} (1-\nu) ] [ \varepsilon_x^2 (1+\nu^2-\nu) + \varepsilon_y^2 (1+\nu^2-\nu) + \\
 + \varepsilon_x \varepsilon_y (4\nu-\nu^2-1) + 3(1-\nu)^2 \gamma_{xy}^2 ]^{1/2}$$

$\gamma_e$  — интенсивность девиатора деформации при упругом состоянии,  $\gamma_s$  — величина интенсивности девиатора деформации, соответствующая переходу материала в пластическое состояние,  $\kappa_e = \gamma_e / z$  — величина, которую можно назвать интенсивностью кривизны для упругой области (она составляется из компонентов кривизны так же, как  $\gamma_e$  составляется из компонентов деформации),  $h$  — половина толщины пластины,  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Заметим, что, поскольку  $\gamma_e \neq \gamma$ , то на границе упругой и пластической областей, определенной из условия (1.2), должны терпеть разрыв либо деформации, либо напряжения. Приняв гипотезу прямых нормалей, удовлетворяем условию непрерывности деформаций. Непрерывность напряжений будет удовлетворена только для несжимаемого материала, когда и в упругой области  $\nu=0.5$ . Разрывность напряжений при  $\nu \neq 0.5$ , очевидно, не может внести значительных погрешностей в определение искомой функции прогиба как при начальных, так и при развитых пластических деформациях пластины. Поэтому и в промежуточном состоянии пластины не следует ожидать значительных погрешностей в решении.

Уравнение (1.1) приведем к безразмерному виду, введя следующие безразмерные параметры:  $\xi=x/a$ ,  $\eta=y/b$ ,  $\zeta=z/h$  — безразмерные координаты,  $u=w/2h$  — безразмерный прогиб,  $\lambda=a/b$  — параметр удлиненности пластины,  $t_e=h_e/h$  — безразмерная аппликата границы упругой области,  $A_e=D_e/8Gh^3$ ,  $A_p=D_p/8Gh^3$  — параметры изгибных жесткостей упругой и пластических областей,  $\theta=\tau/2G$  — параметр интенсивности девиатора напряжений,  $p=qa^2b^2/32G(1+\nu)h^4$  — параметр поперечной нагрузки ( $a$  и  $b$  — размеры пластины в плане).

В безразмерных параметрах уравнение (1.1) примет вид

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ (A_e + A_p) \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left( \nu A_e + \frac{1}{2} A_p \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left\{ [2(1-\nu)A_e + A_p] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right\} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[ (A_e + A_p) \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \left( \nu A_e + \frac{1}{2} A_p \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right] = 2(1+\nu)p$$

Параметры изгибных жесткостей выразятся так:

$$(1.4) \quad A_e = \frac{t_e^3}{6(1-\nu)}, \quad A_p = \int_{t_e}^1 \frac{\theta}{\gamma} \xi^2 d\xi \quad \left( t_e = \frac{\gamma_s}{h\chi_e} \equiv \frac{2\gamma_s}{f^2\chi_e} \right)$$

где  $f=2h/a$  — параметр толщины пластины,  $\chi_e=\kappa_e a^2/2h$  — параметр интенсивности кривизны для упругой области.

Левая часть уравнения (1.3) представляет собою некоторый нелинейный оператор над прогибом  $u$ . Линейные операции в нём являются определяющими, а нелинейные члены, представленные параметрами  $A_e$  и  $A_p$  жесткостей, — корректирующими, которые можно выделить.

Линеаризуем уравнение (1.3) при помощи шагового метода, записав его для  $i$ -го шага (этапа) при нагрузке  $p_i$  следующим образом:

$$(1.5) \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ [A_{e,i-1} + A_{p,i-1}] \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} + \left[ \nu A_{e,i-1} + \frac{1}{2} A_{p,i-1} \right] \frac{\partial^2 u_i}{\partial \eta^2} \right\} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left\{ [2(1-\nu)A_{e,i-1} + A_{p,i-1}] \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi \partial \eta} \right\} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left\{ [A_{e,i-1} + A_{p,i-1}] \lambda^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial \eta^2} + \left[ \nu A_{e,i-1} + \frac{1}{2} A_{p,i-1} \right] \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} \right\} = 2(1+\nu)p_i$$

Здесь  $A_{e,i-1}$  и  $A_{p,i-1}$  — члены, известные из решения задачи для предыдущего этапа при нагрузке  $p_{i-1}$ , играющие роль переменных коэффициентов. Для первого упругопластического этапа в первом приближении полагаем  $A_{p,i-1}=0$ ,  $A_{e,i-1}=[6(1-\nu)]^{-1}$ , что соответствует параметру изгибной жесткости для упругой задачи (при  $t_{e,i-1}=1$ ).

2. Для решения уравнения (1.5) используем метод вариационных итераций, оказавшийся эффективным в геометрически нелинейных задачах [1, 2]. Расчетная схема метода является поочередно континуальной в обоих взаимно ортогональных направлениях, в результате чего решение хорошо реагирует на закон распределения нагрузки, переменность коэффициентов и поставленные краевые условия.

Для удобства дальнейших выкладок введем обозначения  $A_1 = A_{e, i-1} + A_{p, i-1}$ ,  $A_2 = \nu A_{e, i-1} + 1/2 A_{p, i-1}$ ,  $A_3 = 2(1-\nu)A_{e, i-1} + A_{p, i-1}$ .

В соответствии с методом вариационных итераций на каждом  $i$ -м этапе искомую функцию  $u_i$  представим в виде  $u_i = X_{ui}(\xi) Y_{ui}(\eta)$ .

На первой итерации каждого этапа одну из двух функций — для определенности  $X_{ui}(\xi)$  — принимаем за аппроксимирующую, выбирая ее в соответствии с физическим смыслом задачи и граничными условиями.

Другую функцию  $Y_{ui}(\eta)$  определяем из решения вариационного уравнения (2.1)

$$\int \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( A_1 \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} X_{ui} Y_{ui} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} X_{ui} Y_{ui} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left( A_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} X_{ui} Y_{ui} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( A_1 \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} X_{ui} Y_{ui} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} X_{ui} Y_{ui} \right) - 2(1+\nu)p_i \right] X_{ui} d\xi = 0$$

Полученную функцию  $Y_{ui}(\eta)$  принимаем за аппроксимирующую на второй итерации. Теперь функция  $X_{ui}(\xi)$  будет искомой, определяемой из вариационного уравнения для другого направления. Процесс итераций на каждом этапе продолжается до тех пор, пока предыдущая и последующая искомые функции одного из направлений ( $\xi$  или  $\eta$ ) не совпадут в пределах заданной точности.

При переходе к последующему этапу для ускорения сходимости аппроксимирующую функцию  $X_{ui}(\xi)$  выбирают в форме, полученной на последней четной итерации предыдущего этапа.

Очевидно, что для реализации второго и последующих приближений в рамках каждого этапа формально достаточно положить значение нагрузки следующего этапа равным значению нагрузки данного этапа.

Для определения параметра  $A_p$  изгибной жесткости пластических областей, данного выражением (1.4), необходимо задаться функцией  $\tau = \tau(\gamma)$  (в безразмерных параметрах — функцией  $\theta = \tau / 2G = \theta(\gamma)$ ). Аппроксимируем здесь эту функцию по форме, предложенной в [4], в виде ломаной  $\theta = \gamma [1 - \omega(\gamma)]$ , где  $\omega = 0$  при  $\gamma \leq \gamma_s$ ,  $\omega = \beta(1 - \gamma_s / \gamma)$  при  $\gamma > \gamma_s$ . ( $\beta = 1 - d\theta / d\gamma$ ).

Тогда при  $\gamma > \gamma_s$

$$(2.2) \quad \frac{\theta}{\gamma} = 1 - \omega(\gamma) = 1 - \beta + \frac{\beta \gamma_s}{\kappa |z|} = 1 - \beta + \frac{2\beta \gamma_s}{f^2 \chi_e |\xi|}$$

Здесь  $\kappa = \gamma / z$  и  $\chi_e = \kappa a^2 / 2h$  — интенсивность кривизны и ее безразмерный параметр для пластических областей пластины.

Подставляя (2.2) под знак интеграла (1.4), получим

$$A_p = \frac{1-\beta}{3} (1-t_e^3) + \frac{\beta \gamma_s}{f^2 \chi_e} (1-t_e^3), \quad 1 \leq t_e = \frac{2\gamma_s}{f^2 \chi_e}$$

(если  $2\gamma_s / f^2 \chi_e > 1$ , то следует принять  $t_e = 1$ ).

Параметры интенсивностей кривизны для упругой и пластических областей  $\chi_e$  и  $\chi$  определяются выражениями

$$\chi_e = 3^{-1/2} (1-\nu)^{-1} \left[ (1+\nu^2-\nu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)^2 + (1+\nu^2-\nu) \lambda^4 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)^2 + \right.$$

$$+ (4\nu - \nu^2 - 1)\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 3(1 - \nu)^2 \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \Big]^{1/2}$$

$$\chi = \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)^2 + \lambda^4 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)^2 + \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Для выполнения численного дифференцирования и интегрирования в выражениях типа (2.3) удобно представить величины  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  в виде особых рядов функций с разделенными переменными:

$$(2.3) \quad A_j(\xi, \eta) \approx \sum_{k=1}^n \frac{X_{j,k}(\xi) Y_{j,k}(\eta)}{B_{j,k}} \quad (j=1,2,3)$$

$$X_{j,k}(\xi) = A_j(\xi, \eta_k) - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{X_{j,l}(\xi) Y_{j,l}(\eta_k)}{B_{j,l}}$$

$$Y_{j,k}(\eta) = A_j(\xi_k, \eta) - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{X_{j,l}(\xi_k) Y_{j,l}(\eta)}{B_{j,l}}$$

$$B_{j,k} = X_{j,k}(\xi_k) = Y_{j,k}(\eta_k) \quad (j=1, 2, 3; k=1, 2, \dots, n)$$

Здесь  $\xi_k$ ,  $\eta_k$  — координаты некоторых выбранных точек. На координатных линиях, проходящих через эти точки, ряды (2.3) точно равны представляемым ими величинам. Число и положение этих точек выбираются такими, чтобы удовлетворительно представить функции  $A_j(\xi, \eta)$ . В рассмотренных ниже задачах ограничимся тремя членами ряда, приняв  $\xi_1 = \eta_1 = 0.5$ ,  $\xi_2 = \eta_2 = 0$ ,  $\xi_3 = \eta_3 = 0.25$  (начало координат — в вершине угла срединной плоскости). При этом максимальное расхождение в самых неблагоприятных случаях составляло не более 3%. Параметр нагрузки  $p_i$  также представим в виде функции с разделенными переменными  $p_i = P_i X_p(\xi) Y_p(\eta)$ .

Выполнив интегрирование в уравнении (2.4), для нечетной итерации получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$(2.4) \quad Y_{ui}^{IV} = -\frac{c_1}{c_5} Y_{ui} - \frac{c_2}{c_5} Y_{ui}' - \frac{c_3}{c_5} Y_{ui}'' - \frac{c_4}{c_5} Y_{ui}''' + \frac{c_p}{c_5}$$

$$c_p = g Y_p, \quad c_1 = \sum_{k=1}^n b_k Y_{1,k} + \sum_{k=1}^n b_{n+k} Y_{2,k}'', \quad c_2 = \sum_{k=1}^n b_{2n+k} Y_{3,k}' + \sum_{k=1}^n 2b_{n+k} Y_{2,k}'$$

$$c_3 = \sum_{k=1}^n b_{3n+k} Y_{2,k} + \sum_{k=1}^n b_{2n+k} Y_{3,k} + \sum_{k=1}^n b_{4n+k} Y_{1,k}''$$

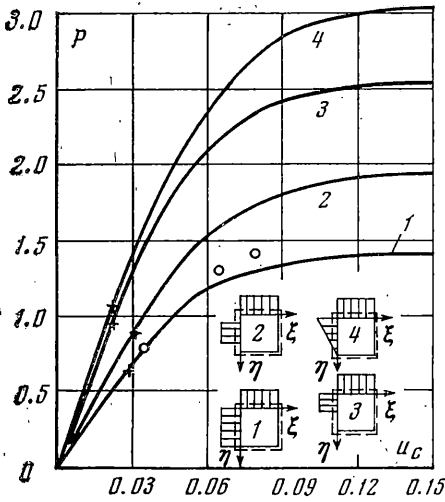
$$c_4 = \sum_{k=1}^n 2b_{4n+k} Y_{1,k}', \quad c_5 = \sum_{k=1}^n b_{4n+k} Y_{1,k}$$

$$b_k = (a_{3n+k} + 2a_{2n+k} + a_{n+k}) \lambda^{-2} B_{2,k}^{-1}, \quad b_{n+k} = a_{4n+k} B_{2,k}^{-1}, \quad b_{2n+k} = (a_{8n+k} + a_{7n+k}) B_{3,k}^{-1}$$

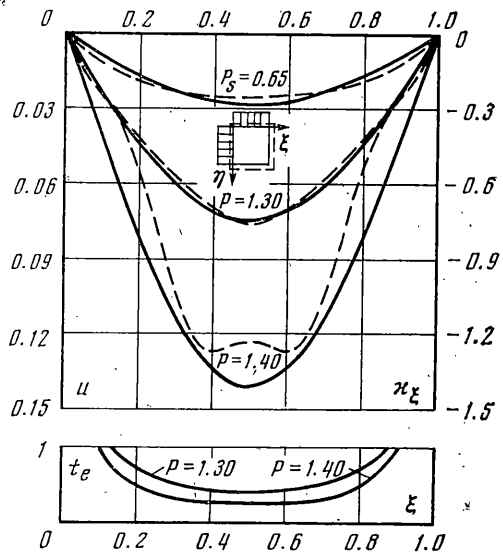
$$b_{3n+k} = [a_{6n+k} + 2(a_{5n+k} + a_{4n+k})] B_{2,k}^{-1}, \quad b_{4n+k} = a_k \lambda^2 B_{1,k}^{-1}, \quad g = 2(1 + \nu) a_{9n+1} P.$$

$$\begin{aligned}
 a_h &= \int X_{1,h} X_{ui}^2 d\xi, & a_{n+h} &= \int X_{1,h} X_{ui}^{IV} X_{ui} d\xi, & a_{2n+h} &= \int X'_{1,h} X'''_{ui} X_{ui} d\xi \\
 a_{3n+h} &= \int X''_{1,h} X''_{ui} X_{ui} d\xi & a_{4n+h} &= \int X_{2,h} X''_{ui} X_{ui} d\xi, & a_{5n+h} &= \int X'_{2,h} X'_{ui} X_{ui} d\xi \\
 a_{6n+h} &= \int X''_{2,h} X_{ui}^2 d\xi, & a_{7n+h} &= \int X_{3,h} X''_{ui} X_{ui} d\xi \\
 a_{8n+h} &= \int X'_{3,h} X'_{ui} X_{ui} d\xi, & a_{9n+1} &= \int X_p X_{ui} d\xi & (h=1,2,\dots,n)
 \end{aligned}$$

Для четной итерации получим аналогичное уравнение.



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнение типа (2.4) эквивалентно системе четырех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad \varphi_1'(t) &= \varphi_2(t), & \varphi_2'(t) &= \varphi_3(t), & \varphi_3'(t) &= \varphi_4(t) \\
 \varphi_4'(t) &= \alpha_{41}\varphi_1 + \alpha_{42}\varphi_2 + \alpha_{43}\varphi_3 + \alpha_{44}\varphi_4 + f(t)
 \end{aligned}$$

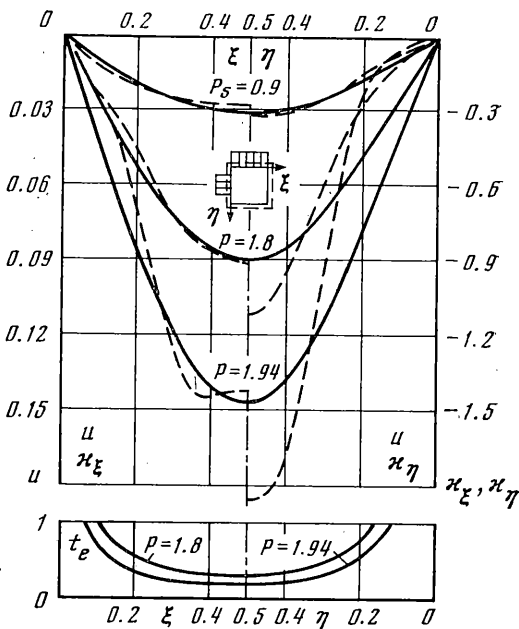
Здесь для нечетной итерации  $\varphi_1 = Y_{ui}$ ,  $t = \eta$ , для четной итерации  $\varphi_1 = X_{ui}$ ,  $t = \xi$ . Коэффициенты системы и свободный член определяются по формулам  $\alpha_{41} = -c_1 c_5^{-1}$ ,  $\alpha_{42} = -c_2 c_5^{-1}$ ,  $\alpha_{43} = -c_3 c_5^{-1}$ ,  $\alpha_{44} = -c_4 c_5^{-1}$ ,  $f(t) = c_p c_5^{-1}$ .

Система (2.5) в матричной записи получает вид

$$(2.6) \quad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) + F(t)$$

где  $\Phi(t)$  — матрица-столбец искомых функций,  $A(t)$  — квадратная матрица коэффициентов системы,  $F(t)$  — матрица-столбец свободных членов.

Таким образом, решение физически нелинейной задачи упругопластического изгиба прямоугольной пластины свелось к многократному решению (на каждой итерации всех этапов) краевой задачи для систем типа (2.6),



Фиг. 3

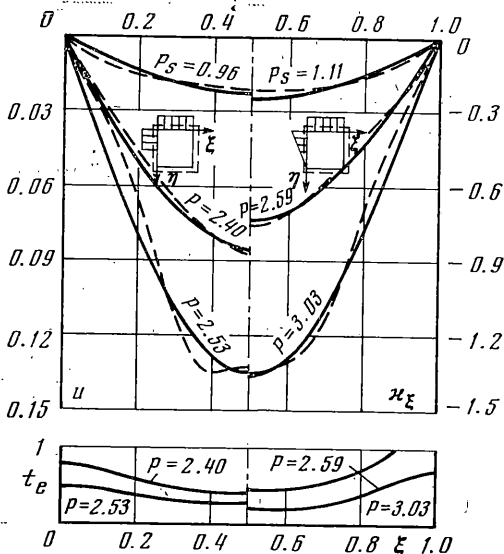
которое осуществляется методом Рунге — Кутты при помощи дополнительных функций [5].

Представленный алгоритм решения задачи обладает цикличностью и удобен для программирования. Вычисления не усложняются от вида нагрузки, что позволяет с одинаковой затратой машинного времени ре-

шать как симметричные, так и несимметричные задачи.

Решение задач по данной методике проведено на ЭВМ «Минск-22». Оптимальным режимом счета оказался следующий. Приращение параметра нагрузки  $\delta P_i = P_i - P_{i-1}$  выбиралось из того расчета, чтобы вызываемое приращение прогиба в центре  $u_c$  не превосходило трети прогиба при предельно упругом состоянии. Интервал  $[0, 1]$  интегрирования системы (2.6) разбивался на 20 частей.

Расчет пластины заканчивался, когда максимальное значение интенсивности девиатора деформации при пластическом состоянии  $\gamma_{max}$  превосходило  $10\gamma_s$ . Для решения задачи оказывалось достаточным около 20 этапов, на что уходило около часа машинного времени.



Фиг. 4

На каждом этапе выполнялось по одному приближению. На первом этапе (упругая задача) проводилось две пары итераций, на следующих этапах было достаточно одной пары.

3. Ниже приведены результаты расчета квадратной шарнирно опертой пластины на поперечную нагрузку четырех видов: распределенную равномерно по всей пластине, по полосе  $0.25 \leq \eta \leq 0.75$ , по полосе  $0 \leq \eta \leq 0.5$  и гидростатическую. Диаграмма деформирования материала аппроксимировалась двузвенной ломаной с  $\gamma_s = 0.0016$  и  $\beta = 1$ . Отношение толщины к размеру в плане принималось  $f = 0.1$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

На фиг. 1 показаны зависимости прогиба в центре  $u_c$  от параметра нагрузки  $P$  для всех четырех видов нагрузки. Крестиками обозначены точки, соответствующие нагрузке  $P_s$  при предельно упругом состоянии пластины. Кружками показаны результаты В. А. Колгадина и А. И. Стрельбицкой для равномерно распределенной нагрузки [6].

На фиг. 2-6 приведены линии прогибов  $u$  пластины при  $\eta = 0.5$  и  $\xi = 0.5$  (сплошные линии) и соответствующие им эпюры кривизн  $\kappa_\xi = -\partial^2 u / \partial \xi^2$  при  $\eta = 0.5$  и  $\kappa_\eta = \partial^2 u / \partial \eta^2$  при  $\xi = 0.5$  (штриховые линии) для всех видов нагрузки. Эпюры кривизн  $\kappa_\eta$  при  $\eta = 0.5$  и  $\kappa_\xi$  при  $\xi = 0.5$  подобны эпюрам прогибов и здесь не приводятся.

На фиг. 2 показаны результаты расчета (линии прогибов и эпюры кривизн вдоль них) на нагрузку, равномерно распределенную по всей пластине.

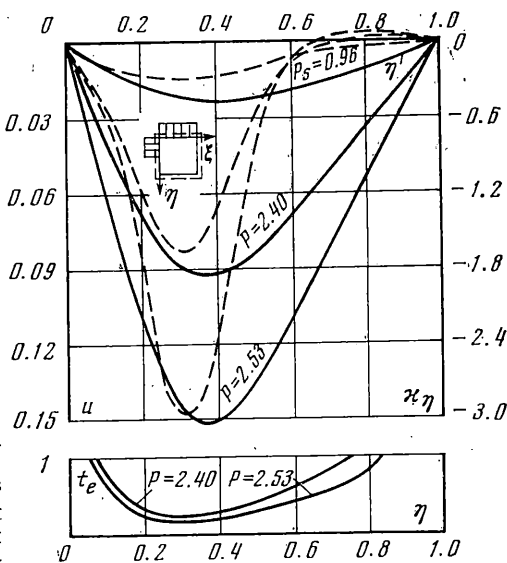
На фиг. 3 приведены эпюры при расчете на нагрузку, распределенную по полосе  $0.25 \leq \eta \leq 0.75$ . Слева от оси показаны эпюры прогибов  $u$  и кривизн  $\kappa_\xi$  при  $\eta = 0.5$ , справа от оси — эпюры  $u$  и  $\kappa_\eta$  при  $\xi = 0.5$ . Заметно различие (особенно по эпюрам кривизн) в характере прогиба пластины вдоль и поперек полосы нагрузки.

На фиг. 4 слева от оси и на фиг. 5 построены эпюры при расчете пластины на нагрузку, распределенную равномерно по полосе  $0 \leq \eta \leq 0.5$ . На фиг. 4 слева показаны эпюры прогибов  $u$  и кривизн  $\kappa_\xi$  при  $\eta = 0.5$ , на фиг. 5 — эпюры прогибов  $u$  и кривизн  $\kappa_\eta$  при  $\xi = 0.5$ .

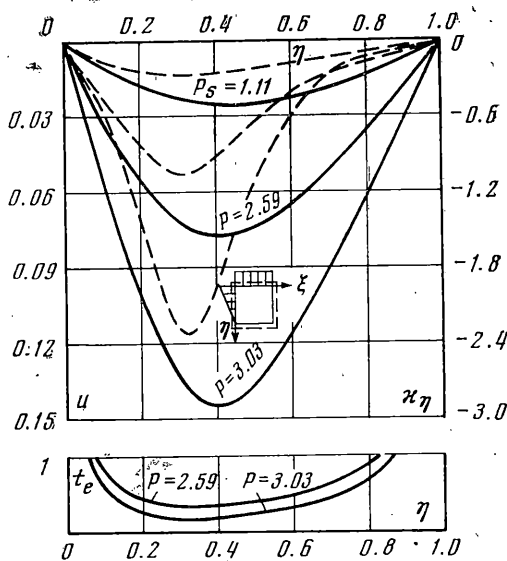
Эпюры для нагрузки, меняющейся по треугольнику вдоль оси  $\eta$ , приведены на фиг. 4 и 6. На фиг. 4 справа даны эпюры прогибов  $u$  и кривизн  $\kappa_\xi$  при  $\eta = 0.5$ , на фиг. 6 — эпюры  $u$  и  $\kappa_\eta$  при  $\xi = 0.5$ .

На фиг. 5 и 6 видна асимметрия в деформировании пластины, вызванная несимметричностью нагрузки вдоль координаты  $\eta$ .

На фиг. 2-6 внизу показаны границы  $t_e$  между упругой и пластической областями в средних сечениях пластины  $\eta = 0.5$  и  $\xi = 0.5$  при различных параметрах соответствующих видов нагрузки.



Фиг. 5



Фиг. 6

Поступила 16 IV 1973

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Неверов И. В.* Решение нелинейных задач теории оболочек методом вариационных итераций. Метер. Саратовск. политехн. ин-та, 1967.
2. *Амельченко В. В., Неверов И. В., Петров В. В.* Решение нелинейных задач теории пологих оболочек путем вариационных итераций. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М., Гостехиздат, 1948.
5. *Ланс Дж. Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.; Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Колгадин В. А., Стрельбицкая А. И.* Упругопластическое состояние прямоугольных пластин при изгибе поперечной нагрузкой. Тр. VI Всес. конф. по теории пластин и оболочек. М., «Наука», 1966.