МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1975

УДК 539.3

ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИН С РАЗРЕЗАМИ

А. М. ЛИНЬКОВ, В. А. МЕРКУЛОВ

(Ленинград)

Уравнения теории изгиба тонких пластин приведены в комплексной форме в работе [1]. В монографии [2] рассмотрены цилиндрический изгиб и чистый изгиб бесконечной пластины с эллиптическим вырезом, который в предельном случае сводится к прямолинейному разрезу. Применительно к теории трещин задачи об изгибе тонких пластин с прямолинейным разрезом рассмотрены в работах [3]–[8].

В данной работе строится общее интегральное уравнение теории изгиба тонкой пластины, содержащей произвольное число сквозных криволинейных разрезов, нагруженных по берегам самоуравновешенными поперечными силами и моментами. Доказывается его разрешимость и существование решения исходной граничной задачи. Отмечается сходимость алгорифма Шварца для разрезов, достаточно удаленных один от другого. В случае разрезов вдоль прямой или вдоль дуг одной окружности задача решается в квадратурах. Решение иллюстрируется на примере одного прямолинейного разреза.

1. Известно [1], что в случае первой основной граничной задачи теории изгиба изотропной, однородной, упругой, тонкой пластины контурные условия могут быть выражены через две голоморфные функции комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в области, занятой пластиной.

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии бесконечной пластины с p сквозными разрезами L_j $(j=1, 2, \ldots, p)$. Каждый из разрезов является гладкой дугой, кривизна которой имеет производную класса $H(1)$. Определения класса $H(1)$ и других классов, упоминаемых в работе, даны в [9]. Разомкнутые дуги обозначим через a_jb_j $(j=1, 2, \ldots, p)$, выбирая обозначения так, чтобы положительное направление вело от a_j к b_j. Совокупность всех разомкнутых дуг обозначим L, нормаль $\mathbf{n}$ направим вправо при положительном направлении обхода линии L. «Левой» и «правой» окрестностям каждой точки t, расположенной на L и не совпадающей с ее концами, будут соответствовать знаки плюс и минус. Плоскость, разрезанную вдоль L, обозначим S.

На берегах разрезов L_j $(j=1, 2, \ldots, p)$ заданы изгибающие моменты и обобщенные, в смысле Кирхгофа, поперечные силы класса H^* в окрестностях концов a_j, b_j. Главный вектор и главный момент на каждом из разрезов считаются равными нулю. На бесконечности моменты и поперечные силы без ограничения общности можно принять также равными нулю.

Согласно постановке задачи, требуется найти функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, голоморфные в S, равные нулю на бесконечности и удовлетворяющие на берегах разрезов соотношениям

$$\varkappa\varphi^\pm(t)+t\overline{\varphi'^\pm(t)}+\overline{\psi^\pm(t)}=f_1^\pm+if_2^\pm+iC(t)t+C_1(t),\quad \varkappa=-(3+\nu)/(1-\nu) \tag{1.1}$$

$$f_1^\pm+if_2^\pm=\frac{1}{D(1-\nu)}\int_{a_j}^{t}\left[M_n^\pm(s)+i\int_{a_j}^{s}P_n^\pm(s)\,ds\right]d\tau \quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{1.2}$$

$$D=Eh^3[12(1-\nu^2)]^{-1}$$

t — комплексная координата, τ — переменная точка, s — дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки a_j на L_j, ν — коэффициент Пуассона, D — цилиндрическая жесткость пластины, $M_n^{\pm}(s)$ — изгибающий момент на L_j, $P_n^{\pm}(s)$ — обобщенная, в смысле Кирхгофа, поперечная сила на L_j, $C(t)=C_j$ — действительная кусочно-постоянная функция на L, $C_1(t)=C_{1j}$ — комплексная кусочно-постоянная функция на L, постоянные C_j, C_{1j} находят при решении задачи.

Очевидно, что при сделанных предположениях относительно нагрузок на берегах разрезов выполняются равенства

$$f_1^+(a_j)-f_1^-(a_j)+i[f_2^+(a_j)-f_2^-(a_j)]= \\ =f_1^+(b_j)-f_1^-(b_j)+i[f_2^+(b_j)-f_2^-(b_j)]=0 \qquad (j=1,2,\dots,p)$$

Для предельных значений функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ введем следующие предположения: 1) $\varphi^{\pm}(t)$, $\overline{t\varphi'^{\pm}(t)+\psi^{\pm}(t)}\in H$; 2) $\varphi'^{\pm}(t)$, $\psi^{\pm}(t)\in H^*$ при концах a_j, b_j; 3) $\varphi^+(a_j)-\varphi^-(a_j)=\varphi^+(b_j)-\varphi^-(b_j)=0$.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, дающие решение граничной задачи (1.1), (1.2), должны быть такими, чтобы прогиб пластины $w(x, y)$, определяемый формулой

$$w(x, y)=\operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)], \qquad \chi(z)=\int\psi(z)\,dz \tag{1.3}$$

был однозначной функцией в S. Если функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ найдены, то поперечные силы, крутящий и изгибающие моменты, а также углы поворота определяются по известным формулам [2].

Следует отметить, что, как и в плоской задаче теории упругости, предельные значения $\varphi^{\pm}(t)$ весьма просто выражаются через механические и геометрические величины напряженно-деформированного состояния пластины $\varphi^{\pm}(t)=(1-\varkappa)^{-1}\{\vartheta_x^{\pm}+i\vartheta_y^{\pm}-[f_1^{\pm}+if_2^{\pm}+iC(t)t+C_1(t)]\}$, где $\vartheta_x^{\pm}, \vartheta_y^{\pm}$ — углы поворота срединной плоскости при деформации.

Можно показать, что при сделанных предположениях относительно краевых нагрузок, а также искомых функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и их предельных значений, рассматриваемая задача имеет единственное решение. Основные идеи и некоторые оценки, достаточные для обоснования применимости формул, используемых при доказательстве теоремы единственности, приведены в монографии [9].

Для решения граничной задачи (1.1), (1.2) применим теорему, использованную в работе [10]: для того, чтобы функции $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ класса H^* были предельными значениями голоморфной вне L функции $\Phi(z)$, равной нулю на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\Phi^+(\tau)-\Phi^-(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \tag{1.4}$$

Если предельные значения $\Phi^{\pm}(t)$ имеют производные $\Phi^{\pm\prime}(t)$ класса H^* в окрестностях концов a_j, b_j и $\Phi^+(a_j)-\Phi^-(a_j)=\Phi^+(b_j)-\Phi^-(b_j)=0$, то, согласно [9]

$$\Phi'^{\pm}(t)=\Phi^{\pm\prime}(t), \qquad \Phi^{+\prime}(t)+\Phi^{-\prime}(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\Phi^{+\prime}(\tau)-\Phi^{-\prime}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \tag{1.5}$$

Применяя теорему и равенства (1.5) к предельным значениям искомых функций $\psi(z)$, $\varphi(z)$, с помощью преобразований, аналогичных приведенным в работах [11, 10], получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_L k_1(t,\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau+\int_L\overline{k_2(t,\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau}=f(t) \tag{1.6}$$

где $\omega(\tau)=\varphi^+(\tau)-\varphi^-(\tau)$ — искомая функция класса H на L, $k_1(t,\tau)$, $k_2(t,\tau)$, $f(t)$ — функции класса H на L, определяемые формулами

$$k_1(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\frac{\tau-t}{\bar\tau-\bar t},\qquad k_2(t,\tau)=\frac{1}{\varkappa 2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\tau-\bar t}{\bar\tau-\bar t}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\varkappa}[\overline{g^+(t)}+\overline{g^-(t)}]+\frac{1}{\varkappa 2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{g^+(\tau)}-\overline{g^-(\tau)}}{\tau-t}d\tau+$$

$$+\frac{1}{\varkappa 2\pi i}\int\limits_L[\overline{g^+(\tau)}-\overline{g^-(\tau)}]d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t},\qquad g^\pm(t)=f_1^\pm-if_2^\pm-iC(t)\bar t+\overline{C_1(t)}$$

Согласно постановке задачи требуется найти решение уравнения (1.6) класса h_{2p}.

Решение исходной граничной задачи должно удовлетворять условиям однозначности прогиба $w(x,y)$, которые примут вид

$$\mathrm{Re}\int\limits_{L_j}[\bar t'^2\omega(t)-\varkappa\overline{\omega(t)}]dt=\mathrm{Re}\int\limits_{L_j}t[g^{+\prime}(t)-g^{-\prime}(t)]dt\qquad (j=1,2,\ldots,p)\tag{1.7}$$

При решении уравнения (1.6) в классе h_{2p} оно эквивалентно (см. [9]) уравнению типа Фредгольма

$$\omega(t)+\int\limits_L k_3(t,\tau)\omega(\tau)d\tau+\int\limits_L\overline{k_4(t,\tau)\omega(\tau)d\tau}=f^*(t)\tag{1.8}$$

при дополнительных условиях

$$\int\limits_L\alpha_j(t)\omega(t)dt+\int\limits_L\beta_j(t)\overline{\omega(t)dt}=\int\limits_L\frac{f(t)t^{j-1}}{Z(t)}dt\qquad (j=1,2,\ldots,p)\tag{1.9}$$

Здесь $Z(t)$ — каноническая функция класса h_{2p}, $k_3(t,\tau)$, $k_4(t,\tau)$, $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t)$, $f^*(t)$ — функции, определяемые формулами

$$k_3(t,\tau)=\frac{Z(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{k_1(t_1,\tau)dt_1}{Z(t_1)(t_1-t)},\qquad k_4(t,\tau)=-\frac{\overline{Z(t)}}{\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{k_2(t_1,\tau)dt_1}}{\overline{Z(t_1)}(\bar t_1-\bar t)}$$

$$\alpha_j(t)=\int\limits_L\frac{k_1(t_1,t)t_1^{j-1}}{Z(t_1)}dt_1,\qquad \beta_j(t)=\bar t'^2\int\limits_L\frac{\overline{k_2(t_1,t)t_1^{j-1}}}{Z(t_1)}dt_1$$

$$f^*(t)=\frac{Z(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{f(\tau)d\tau}{Z(\tau)(\tau-t)}$$

На основании общей теории [9] и теоремы единственности решения граничной задачи теории изгиба тонкой пластины с разрезами устанавливаем разрешимость уравнения (1.8) при дополнительных условиях (1.9), (1.7). Отсюда следует, что решение рассматриваемой граничной задачи теории упругости существует.

Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, голоморфные в S и равные нулю на бесконечности, находим по формулам

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}dt,\qquad \psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\psi^+(t)-\psi^-(t)}{t-z}dt\tag{1.10}$$

$$\psi^+(t)-\psi^-(t)=g^+(t)-g^-(t)-\varkappa\overline{\omega(t)}-\bar t\omega'(t)$$

Согласно общей теории [9], функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ удовлетворяют условиям (1.1)–(1.3) и, следовательно, определяют искомое решение.

Используя существование и единственность решения уравнения (1.8) при дополнительных условиях (1.9), (1.7) для одного разреза, так же как в работе [12] нетрудно доказать сходимость алгорифма Шварца для разрезов достаточно удаленных один от другого.

2. В случае, когда бесконечная пластина имеет разрезы только вдоль дуг одной окружности, интегральная формула (1.6) дает возможность построить решение задачи в квадратурах. В случае разрезов вдоль одной прямой, за которую можем принять действительную ось Ox, функции $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ и из (1.8) следует

$$\omega(x)=\frac{Z(x)}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)\,d\tau}{Z(\tau)(\tau-x)} \tag{2.1}$$

Условия (1.9), (1.7) принимают вид

$$\int_L\frac{x^{j-1}[\overline{g^+(x)}+\overline{g^-(x)}+\gamma(x)]}{Z(x)}dx=0 \quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{2.2}$$

$$(1-\varkappa)\,\mathrm{Re}\int_{L_j}\omega(x)\,dx=\mathrm{Re}\int_{L_j}x[g^{+\prime}(x)-g^{-\prime}(x)]\,dx \quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{2.3}$$

$$\gamma(x)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{g^+(\tau)}-\overline{g^-(\tau)}}{\tau-x}d\tau$$

Рассмотрим решение поставленной граничной задачи для одного разреза $|x|\leqslant l$ при изгибе пластины антисимметричными силами и симметричными моментами.

Изгиб пластины антисимметричными поперечными силами $P_n(s)$. Положим $P_n^+(s)=P_0\delta(x-\xi)$, $P_n^-(s)=-P_0\delta(x-\xi)$, где P_0 – единичная сосредоточенная обобщенная поперечная сила, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Из (1.2) найдем

$$f_1^+=f_1^-=0,\quad f_2^+=f_2^-=\begin{cases}0, & -l\leqslant x<\xi\\ \dfrac{P_0}{D(1-\nu)}(x-\xi), & \xi<x\leqslant+l\end{cases}$$

Функция $f(t)$, представляющая правую часть интегрального уравнения (1.6), примет вид

$$f(t)=\frac{1}{\varkappa}(C_1+iCx)+\begin{cases}0, & -l\leqslant x<\xi\\ \dfrac{iP_0}{D\varkappa(1-\nu)}(x-\xi), & \xi<x\leqslant+l\end{cases} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в формулу (2.1) и используя условия (2.2), (2.3), найдем

$$\omega(x)=\frac{P_0}{\pi D\varkappa(1-\nu)}\left[\frac{\xi}{l^2}\sqrt{(l^2-\xi^2)(l^2-x^2)}+(x-\xi)\,\mathrm{arth}\frac{\sqrt{(l^2-\xi^2)(l^2-x^2)}}{l^2-\xi x}\right]$$

По формулам (1.10) получим значения искомых функций, определяющих решение задачи

$$\varphi(z,\xi)=\frac{1}{2\varkappa}(C_1+iCz)- \tag{2.5}$$

$$-\frac{iP_0}{2\pi D\varkappa(1-\nu)}\left[\frac{\xi}{l^2}\sqrt{(l^2-\xi^2)(z^2-l^2)}-2(z-\xi)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(l-\xi)(z+l)}{(l+\xi)(z-l)}}\right]$$

$$C_1=\frac{iP_0}{\pi D(1-\nu)}\left[\frac{\pi}{2}\xi-\sqrt{l^2-\xi^2}-\xi\arcsin\frac{\xi}{l}\right]$$

$$C=-\frac{P_0}{\pi D(1-\nu)}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\xi}{l^2}\sqrt{l^2-\xi^2}-\arcsin\frac{\xi}{l}\right]$$

(2.6) $$\psi(z,\xi)=-\varkappa\varphi(z,\xi)-z\varphi_z'(z,\xi)$$

Используя формулы (1.3), (2.5), (2.6), вычислим разность прогибов в произвольной точке берегов разреза

(2.7) $$G(x,\xi)=w^+(x,\xi)-w^-(x,\xi)=$$

$$=-\frac{P_0(1-\varkappa)}{2\pi D\varkappa(1-\nu)l^2}\left[(l^2-\xi x)\sqrt{(l^2-\xi^2)(l^2-x^2)}-\right.$$

$$\left.-l^2(x-\xi)^2\operatorname{arth}\frac{\sqrt{(l^2-\xi^2)(l^2-x^2)}}{l^2-\xi x}\right]$$

При произвольной нагрузке

$$\varphi(z)=\int_a^b\varphi(z,\xi)p(\xi)d\xi$$

$$w^+(x)-w^-(x)=\sum_i G(x,\xi_i)P_i+\int_a^b G(x,\xi)p(\xi)d\xi$$

где P_i — сосредоточенные в точках ξ_i поперечные силы, $p(\xi)$ — распределенная на участке $[a,b]\in[-l,+l]$ поперечная сила.

Используя полученные результаты, можно вычислить потенциальную энергию пластины по формуле

$$W=\frac{1}{2}\sum_i P_i^2G(\xi_i,\xi_i)+\frac{1}{2}\int_a^b p(x)\left[\int_a^b G(x,\xi)p(\xi)d\xi\right]dx$$

Это выражение позволяет определить критические нагрузки, которые будем отмечать звездочкой, из условия

(2.8) $$dW/dl=4\gamma$$

где γ — величина, характеризующая трещиностойкость. Она может иметь разные значения для случаев изгиба пластины поперечными силами или моментами. Критические нагрузки можно находить и используя коэффициенты интенсивности напряжений, которые в работе [5] предложено определять по формуле

$$K=K_1-iK_2=-12\sqrt{2}\,h^{-2}D(3+\nu)\lim_{z\to l}\sqrt{z-l}\,\varphi'(z)$$

Приведем результаты решений некоторых задач.

1. Сосредоточенные поперечные силы P приложены в точке ξ берегов разреза. Разность прогибов определяется по формуле (2.7) при $P_0=P$

$$W=\frac{p^2(l^2-\xi^2)^2}{\pi D(3+\nu)(1-\nu)l^2},\quad P_*=\sqrt{\frac{2\pi D(3+\nu)(1-\nu)l^3\gamma}{l^4-\xi^4}}$$

Функция $\varphi(z)$ определяется по формуле (2.5) при $P_0=P$

$$K_1=0,\qquad K_2=\frac{6P(l+\xi)\sqrt{l^2-\xi^2}}{\pi h^2 l\sqrt{l}}$$

2. Постоянные поперечные силы p равномерно распределены на участке $|x|\leqslant a\,(a<l)$ берегов разреза.

$$w^+(x)-w^-(x)=\frac{2p}{3\pi D(3+\nu)(1-\nu)}\left[4a\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-x^2)}+\right.$$

$$+(x-a)^3\operatorname{arth}\frac{\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-x^2)}}{l^2-ax}-(x+a)^3\operatorname{arth}\frac{\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-x^2)}}{l^2+ax}+$$

$$\left.+2\arcsin\frac{a}{l}(l^2-x^2)^{3/2}\right]$$

$$W=\frac{p^2}{6\pi D(3+\nu)(1-\nu)}\left[3l^4\arcsin^2\frac{a}{l}+11a^2(l^2-a^2)-\right.$$

$$\left.-16a^4\operatorname{arth}\frac{l^2-a^2}{l^2+a^2}+2a(5l^2-2a^2)\sqrt{l^2-a^2}\arcsin\frac{a}{l}\right]$$

$$p_*=\sqrt{2\pi D(3+\nu)(1-\nu)\gamma}\left\{\sqrt{l}\left[l\arcsin\frac{a}{l}+a\sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2}\right]\right\}^{-1}$$

$$\varphi(z)=-\frac{ip}{4\pi D\varkappa(1-\nu)}\left[2(z-a)^2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(l-a)(z+l)}{(l+a)(z-l)}}-\right.$$

$$-2(z+a)^2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(l+a)(z+l)}{(l-a)(z-l)}}+$$

$$\left.+2\pi az+2\arcsin\frac{a}{l}z\sqrt{z^2-l^2}+3a\sqrt{l^2-a^2}+(2a^2+l^2)\arcsin\frac{a}{l}\right]$$

$$K_1=0,\qquad K_2=\frac{6pl\sqrt{l}}{\pi h^2}\left[\arcsin\frac{a}{l}+\frac{a}{l^2}\sqrt{l^2-a^2}\right]$$

3. Постоянные поперечные силы p равномерно распределены по берегам разреза $|x|\leqslant l$

$$w^+(x)-w^-(x)=\frac{2p(l^2-x^2)^{3/2}}{3D(3+\nu)(1-\nu)}$$

$$W=\frac{\pi p^2 l^4}{8D(3+\nu)(1-\nu)},\qquad p_*=\frac{2}{l}\sqrt{\frac{2D(3+\nu)(1-\nu)\gamma}{\pi l}}$$

$$\varphi(z)=-\frac{ipl^2}{8D\varkappa(1-\nu)}+\frac{ip}{4D\varkappa(1-\nu)}[z^2-z\sqrt{z^2-l^2}]$$

$$K_1=0,\qquad K_2=3pl\sqrt{l}h^{-2}$$

Из приведенных выражений видно, что во всех случаях трещина неустойчива. При действии антисимметричных сосредоточенных поперечных сил при изгибе критическая нагрузка выражается формулой $P_*=kl^{-1/2}$, в то время как критическая сосредоточенная сила при растяжении равна $k'l^{1/2}$ [13]. При равномерно распределенной нагрузке $p_*=k_1l^{-3/2}$ при изгибе и $k_1'l^{-1/2}$ при растяжении, т. е. влияние размера трещины в этом случае гораздо более сильное, чем при растяжении. В приведенных выражениях k, k', k_1, k_1' — некоторые постоянные.

Изгиб пластины симметричными изгибающими моментами $M_n(s)$. Положим $M_n^+(s)=M_n^-(s)=M_0\delta(x-\xi)$, где M_0 — единичный сосредоточенный изгибающий момент.

Решение строится аналогично предыдущему случаю. Отметим поэтому лишь особенности данной граничной задачи и приведем окончательные результаты. Функцию $\omega(x)$ найдем по формуле (2.1)

$$\omega(x)=-\frac{iM_0}{\pi D\varkappa(1-\nu)}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{(l^2-\xi^2)(l^2-x^2)}}{l^2-\xi x}$$

Разность углов поворота $\vartheta_y^+-\vartheta_y^-$ определяется по формуле

$$H(x,\xi)=\vartheta_y^+-\vartheta_y^-=(1-\varkappa)\operatorname{Im}\omega(x) \tag{2.9}$$

Отсюда видно, что в точке приложения сосредоточенного момента разность углов поворота бесконечно велика. Это означает, что в непосредственной близости от точки приложения сосредоточенного момента решение (2.9) непригодно и в окрестности этой точки надо исходить из истинного закона распределения изгибающего момента.

В общем случае имеем

$$\vartheta_y^+(x)-\vartheta_y^-(x)=\sum_i H(x,\xi_i)M_i+\int_a^b H(x,\xi)m(\xi)\,d\xi$$

где M_i — изгибающие моменты, сосредоточенные в точках ξ_i, $m(\xi)$ — изгибающий момент, распределенный на участке $[a,b]\in[-l,+l]$.

Приведем окончательные результаты для некоторых случаев.

1. Сосредоточенные изгибающие моменты M приложены в точке ξ берегов разреза.

$$\varphi(z,\xi)=-\frac{M}{4\pi D\varkappa(1-\nu)}\left[\pi-2\arcsin\frac{\xi}{l}-4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(l-\xi)(z+l)}{(l+\xi)(z-l)}}\right]$$

$$K_1=-\frac{6M}{\pi h^2\sqrt{l}}\sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}},\qquad K_2=0$$

В общем случае распределенной нагрузки функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ определяются по формулам

$$\varphi(z)=\int_a^b\varphi(z,\xi)m(\xi)\,d\xi,\qquad \psi(z)=\varkappa\varphi(z)-z\varphi'(z)$$

2. Постоянные изгибающие моменты m равномерно распределены на участке $|x|\leqslant a$ $(a<l)$ берегов разреза.

$$\vartheta_y^+(x)-\vartheta_y^-(x)=\frac{4m}{\pi D(3+\nu)(1-\nu)}\left[2\sqrt{l^2-x^2}\arcsin\frac{a}{l}+\right.$$

$$\left.+(a-x)\operatorname{arth}\frac{\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-x^2)}}{l^2-ax}+(a+x)\operatorname{arth}\frac{\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-x^2)}}{l^2+ax}\right]$$

$$W=\frac{4m^2}{\pi D(3+\nu)(1-\nu)}\left\{2a^2\operatorname{arth}\frac{l^2-a^2}{l^2+a^2}+\left[l^2\arcsin\frac{a}{l}+2a\sqrt{l^2-a^2}\right]\arcsin\frac{a}{l}\right\}$$

$$\varphi(z)=-\frac{ma}{2D\varkappa(1-\nu)}+\frac{m}{\pi D\varkappa(1-\nu)}\left[-\sqrt{z^2-l^2}\arcsin\frac{a}{l}+\right.$$

$$\left.+(a+z)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(l+a)(z+l)}{(l-a)(z-l)}}+(a-z)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(l-a)(z+l)}{(l+a)(z-l)}}\right]$$

$$m_*=\sqrt{\frac{\pi D(3+\nu)(1-\nu)\gamma}{2l\arcsin^2(a/l)}},\qquad K_1=-\frac{12m\sqrt{l}}{\pi h^2}\arcsin\frac{a}{l},\qquad K_2=0$$

Отсюда видно, что с ростом длины трещина становится устойчивой.

3. Постоянные изгибающие моменты m равномерно распределены по берегам разреза $|x|\leqslant l$

$$\vartheta_y^+(x)-\vartheta_y^-(x)=\frac{4m\sqrt{l^2-x^2}}{D(3+\nu)(1-\nu)}$$

$$W=\frac{\pi m^2l^2}{D(3+\nu)(1-\nu)},\qquad \varphi(z)=\frac{m}{2D\varkappa(1-\nu)}\left[z-\sqrt{z^2-l^2}\right]$$

$$m_*=\sqrt{\frac{2D(3+\nu)(1-\nu)\gamma}{\pi l}},\qquad K_1=-6m\sqrt{l}\,h^{-2},\qquad K_2=0$$

Полученное значение K_1 согласуется с величиной, приведенной в работе [5]. В данном случае трещина неустойчива.

Поступила 26 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ, 1938, т. 2, вып. 2.
2. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
3. *Williams M. L.* The bending stress distribution at the base of a stationary crack. Trans ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е, 1961, т. 28, № 1).
4. *Ang D. D., Williams M. L.* Combined stress in an orthotropic plate having a finite crack. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е, 1961, т. 28, № 3).
5. *Sih G. C., Paris P. C., Erdogan F.* Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е, 1962, т. 29, № 2.)
6. *Sih G. C., Rice J. R.* The bending of plates of dissimilar materials with cracks. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. об-ва инж.- механ. Сер. Е, 1964, т. 31, № 3.)
7. *Knowles J. K., Wang Neng — Ming.* On the bending of an elastic plate containing a crack. J. Math. and Phys., 1960, vol. 39, No. 4.
8. *Williams M. L.* Discussion of the paper «An experimental investigation of the crack tip stress intensity factors in plates under cylindrical bending» by F. Erdogan, et al. GALCIT SM 62-19, California Institute of Technology, 1962.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3. М., «Наука», 1968.
10. *Линьков А. М.* Интегральные уравнения теории упругости для плоскости с разрезами, нагруженными самоуравновешенными системами сил. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 6.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости. Докл. АН СССР, 1934, т. 3, № 1.
12. *Шерман Д. И.* Об одном методе решения статической плоской задачи теории упругости для многосвязных областей. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, 1935, № 54.
13. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.