

ТРЕЩИНА СДВИГА В ОДНОНАПРАВЛЕННОМ СТЕКЛОПЛАСТИКЕ

А. М. МИХАЙЛОВ

(Новосибирск)

Исследуется задача о равновесии трещины сдвига в однонаправленном стеклопластике, который растягивается на бесконечности вдоль волокон. Трещина сдвига выходит из кончика трещины нормального разрыва, перпендикулярной волокнам. В предположении, что длина трещины сдвига достаточно мала, задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений, число которых равно числу порванных волокон в трещине нормального разрыва.

Подробно проанализированы частные случаи: трещина нормального разрыва состоит из единственного разрыва центрального волокна в образце, состоящем из нечетного числа волокон; трещина нормального разрыва образована разрывами нечетного числа волокон в образце, состоящем из бесконечного числа волокон. Показано, что в этих случаях трещина сдвига развивается устойчиво до тех пор, пока внешнее напряжение не превысит некоторой величины.

Сравнение полученного приближенного решения с численным решением задачи показывает, что первое качественно верно описывает поведение трещины сдвига, а при небольших усложнениях получено и количественное совпадение результатов с точностью около 1%.

Статическое распределение напряжений вокруг трещины нормального разрыва изучалось в [1], причем предполагалось, что волокна работают только на растяжение, связующее — только на сдвиг. В [1] были указаны условия, при которых из кончика трещины нормального разрыва начинается развитие трещины сдвига в связующем (отслаивание). В предлагаемой работе изучается процесс развития такой трещины.

Известно, что равновесие трещины нормального разрыва в однородном внешнем поле неустойчиво, так как с увеличением длины трещины возрастает напряжение в ее кончике. Ниже будет показано, что трещина сдвига устойчива в некоторых пределах изменения нагрузки и поэтому ее возникновение может затормозить процесс разрушения. Такая задача решена в [2] точно для частного случая одного порванного центрального волокна в образце, состоящем из пяти и семи волокон, и приближенно — для бесконечного числа волокон в образце.

В рассматриваемом случае количество волокон в образце и число порванных волокон предполагаются произвольными.

1. Образец состоит из $2N+1$ волокон бесконечной длины, занумерованных целыми числами j от $-N$ до N (фиг. 1). Ось y направлена вдоль волокна $j=0$. Размер образца в направлении, перпендикулярном плоскости фигуры, примем за единицу. Ширина волокна в плоскости фигуры равна h , связующего — H , E — модуль Юнга волокна, G — модуль сдвига связующего, σ_* — прочность волокна на разрыв, τ_* — прочность связующего на срез. Порванные волокна ($-n \leq j \leq n$) образуют трещину нормального разрыва, лежащую на оси x . Из кончиков этой трещины (между волокнами $|j|=n$ и $|j|=n+1$) вдоль связующего выходят трещины сдвига, которые развиваются симметрично относительно оси x и занимают интервал $|y| \leq y_*$. Однородное растягивающее напряжение, приложенное к волокнам на бесконечности, обозначим через σ . Вследствие симметрии будем рассматривать задачу при $y \geq 0$.

Заметим сразу, что ограничение нечетным числом $2N+1$ волокон в образце является несущественным. Выкладки при четном и нечетном числе волокон слегка отличаются, и параллельное рассмотрение обоих случаев сделало бы громоздким изложение. Допущение о том, что трещина нормального разрыва лежит симметрично относительно центрального волок-

на, сделано потому, что в противном случае предположение о равенстве длин трещин сдвига, выходящих из разных концов трещины нормального разрыва, было бы неестественным.

Обозначим через u_j смещение j -го волокна вдоль оси y . Введем безразмерные величины

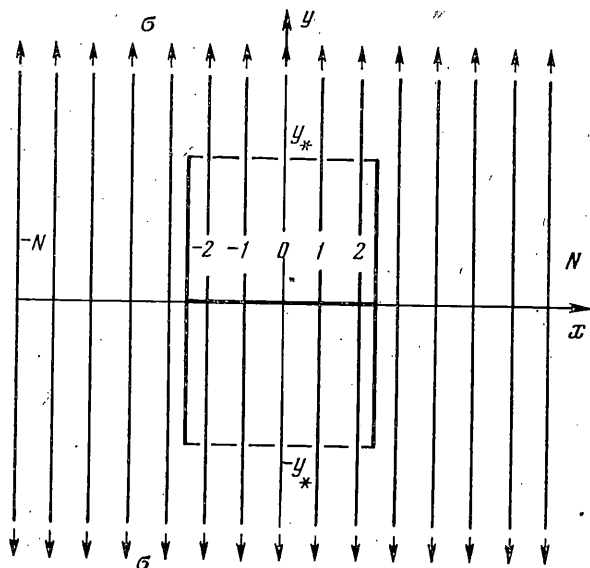
$$(1.1) \quad w_j = u_j / \sqrt{hH}, \quad \beta^2 = G/E, \quad \eta = y / \sqrt{hH}, \quad \eta_* = y_* / \sqrt{hH}$$

Уравнения равновесия запишутся для $\eta \geq \eta_*$ следующим образом (см., например, [3]):

$$(1.2) \quad d^2 w_{\mp N} / d\eta^2 + \beta^2 (-w_{\mp N} + w_{\mp N \pm 1}) = 0$$

$$(1.3) \quad d^2 w_j / d\eta^2 + \beta^2 (w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) = 0 \quad (j = -N+1, \dots, N-1)$$

В уравнении (1.2) верхние знаки в индексах соответствуют левому волокну образца (нижние — правому волокну), которое предполагается



Фиг. 1

свободным от внешней нагрузки при всех конечных y . При $0 \leq \eta \leq \eta_*$ уравнения равновесия имеют такой же вид, с той лишь разницей, что (1.2) будет справедливо и для волокон $|j| = n, n+1$, смежных с трещиной сдвига; соответствующим образом нужно изменить значения индексов j в (1.3). Граничные условия очевидны

$$(1.4) \quad dw_j(\infty) / d\eta = \sigma / E \quad (|j| \leq N), \quad dw_j(0) / d\eta = 0 \quad (|j| \leq n) \\ w_j(0) = 0 \quad (j = \pm N, \dots, \pm(n+1))$$

Кроме того, в точке $\eta = \eta_*$ имеем условия непрерывности w_j и $dw_j / d\eta$ для всех j . Будем обозначать $w_j(\eta \geq \eta_*)$ через w_j^+ , $w_j(\eta \leq \eta_*)$ — через w_j^- . Решение уравнений равновесия при условиях (1.4) таково:

$$(1.5) \quad w_j^+ = \frac{\sigma}{E} \eta + (-1)^j \sum_{h=1}^{2N+1} m_h \exp\left(-2\beta\eta \cos \frac{\pi k}{2(2N+1)}\right) \sin \frac{\pi k(2j+2N+1)}{2(2N+1)} \\ (j = -n, \dots, n)$$

$$(1.6) \quad w_j^- = (-1)^j \sum_{k=1}^{2n+1} b_k \operatorname{ch} \left(2\beta\eta \cos \frac{\pi k}{2(2n+1)} \right) \sin \frac{\pi k(2j+2n+1)}{2(2n+1)}$$

($j=-n, \dots, n$)

(1.7)

$$w_j^- = \frac{a_{N-n}}{E} \eta + (-1)^j \sum_{k=1}^{N-n-1} a_k \operatorname{sh} \left(2\beta\eta \cos \frac{\pi k}{2(N-n)} \right) \sin \frac{\pi k(2j-2N-1)}{2(N-n)}$$

($j=n+1, \dots, N$)

(1.8)

$$w_j^- = \frac{c_{N-n}}{E} \eta + (-1)^j \sum_{k=1}^{N-n-1} c_k \operatorname{sh} \left(2\beta\eta \cos \frac{\pi k}{2(N-n)} \right) \sin \frac{\pi k(2j+2N+1)}{2(N-n)}$$

($j=-N, \dots, -n-1$)

причем постоянные m_k, b_k, a_k, c_k должны определяться из условий непрерывности $w_j(\eta_*)$ и $dw_j(\eta_*)/d\eta$. В справедливости равенств (1.5)–(1.8) можно убедиться подстановкой в (1.2), (1.3). Подробные выкладки, приводящие к (1.5), содержатся в [1].

Переобозначим $\pi/2(2N+1)$ через λ , а $m_k \exp(-2\beta\eta_* \cos \lambda k)$ — через μ_k . Из (1.5) следует, что

$$(1.9) \quad w_j^+(\eta_*) = \frac{\eta_* \sigma}{E} + (-1)^j \sum_{k=1}^{2N+1} \mu_k \sin \lambda k(2j+2N+1)$$

$$\frac{dw_j^+(\eta_*)}{d\eta} = \frac{\sigma}{E} - 2\beta(-1)^j \sum_{k=1}^{2N+1} \mu_k \cos \lambda k \sin \lambda k(2j+2N+1)$$

$$\frac{d^2 w_j^+(\eta_*)}{d\eta^2} = 4\beta^2(-1)^j \sum_{k=1}^{2N+1} \mu_k \cos^2 \lambda k \sin \lambda k(2j+2N+1)$$

Система уравнений для определения постоянных представляется недоступной для анализа, однако при достаточно малых $\beta\eta_*$ она существенно упрощается.

2. Пусть $\beta\eta_* \ll 1$, так что с достаточной точностью можно принять $\operatorname{sh} \xi \approx \xi, \operatorname{ch} \xi \approx 1$ при $0 \leq \xi \leq 2\beta\eta_*$. Тогда из (1.7) получим с точностью до бесконечно малых третьего порядка при $\beta\eta_* \rightarrow 0$

$$(2.1) \quad w_j^- - \eta_* dw_j^- / d\eta = 0 \quad (j=\pm(n+1), \dots, \pm N)$$

Так как $\beta\eta_*$ мало, это соотношение будет верным и при $\eta = \eta_*$, а благодаря непрерывности $w_j(\eta_*)$ и $dw_j(\eta_*)/d\eta$ получим

$$(2.2) \quad w_j^+(\eta_*) - \eta_* dw_j^+(\eta_*) / d\eta = 0 \quad (j=\pm(n+1), \dots, \pm N)$$

Условия (2.1), (2.2) имеют простой механический смысл: пока $\beta\eta_*$ мало, каждое волокно при $\eta \leq \eta_*$ работает независимо от других, равномерно деформируясь под действием напряжения $E dw_j^+(\eta_*)/d\eta$ по закону Гука. Это вполне естественно, так как жесткость на растяжение не зависит от длины волокна, а вклад сдвиговых сил в уравнения равновесия стремится к нулю, когда $\beta\eta_* \rightarrow 0$. Если $\eta_* = 0$, то из (2.2) получаем условие жесткого закрепления волокон с номерами $j = \pm(n+1), \dots, \pm N$ при $\eta = 0$, как и должно быть.

Используя (2.2) и (1.9), получаем систему

$$\sum_{k=1}^{2N+1} \mu_k (1+2\beta\eta_* \cos \lambda k) \sin \lambda k (2j+2N+1) = 0$$

($j=\pm(n+1), \dots, \pm N$)

которая легко решается (см. [1], формулы (2.12)–(2.14))

$$(2.3) \quad \mu_k (1+2\beta\eta_* \cos \lambda k) = \\ = \frac{\sigma}{\beta E} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{k, 2N+1} \right) \sin \lambda \sum_{r=-n}^n (-1)^r \alpha_r \sin \lambda k (2r+2N+1)$$

Здесь $\delta_{k, 2N+1}$ – символ Кронекера, а α_r – неопределенные постоянные, которые вместе с b_k должны определяться из условий сопряжения при $j = -n, \dots, n$. Таким образом число уравнений уменьшилось до $2(2n+1)$.

Преобразуем теперь эти последние уравнения. Используя уравнения равновесия и непрерывность смещений и деформаций при $\eta = \eta_*$, заключаем, что комбинация $dw_j / d\eta - \eta d^2 w_j / d\eta^2$ ($j = -n+1, \dots, n-1$) непрерывна при $\eta = \eta_*$, а $dw_{\pm n}^- / d\eta - \eta_* d^2 w_{\pm n}^- / d\eta^2 = dw_{\pm n}^+ / d\eta - \eta_* d^2 w_{\pm n}^+ / d\eta^2 - \beta^2 \eta_* (1 + \delta_{n0}) (w_{\pm n \pm 1}^+ - w_{\pm n}^+)$ в точке $\eta = \eta_*$. Так как $\beta \eta_* \ll 1$, то из (1.7) и (1.8) следует, что при $\beta \eta_* \rightarrow 0$ с точностью до бесконечно малых третьего порядка $dw_j^- / d\eta - \eta d^2 w_j^- / d\eta^2 = 0$ ($j = -n, \dots, n$) и, следовательно, для

$$(2.4) \quad dw_j^+ (\eta_*) / d\eta - \eta_* d^2 w_j^+ (\eta_*) / d\eta^2 = \\ = \beta^2 \eta_* (1 + \delta_{n0}) \delta_{n, |j|} (w_{\pm n \pm 1}^+ (\eta_*) - w_{\pm n}^+ (\eta_*))$$

Краевые условия (2.2) и (2.4) показывают, что для комбинации $w_j^+ - \eta_* dw_j^+ / d\eta$ при малых $\beta \eta_*$ получается почти такая же задача, как для w_j при отсутствии отслаивания. Сходство нарушается лишь равенствами (2.4) при $j = \pm n$. Если $n=0$, то равенство (2.4) является точным (оно равносильно тогда условию $dw_0 (\eta_*) / d\eta = 0$). Таким образом, при малых $\beta \eta_*$ удалось заменить условия сопряжения решений w_j^+ и w_j^- краевыми условиями (2.2), (2.4), в которые w_j^- не входят. Задачи определения w_j^+ и w_j^- оказались разделенными.

Подставим (2.3) в (2.4) и используем третье равенство (1.9). Для определения постоянных α_r получим систему $2n+1$ уравнений, которая после суммирования по k примет вид

$$(2.5) \quad \sum_{r=-n}^n \omega_{rj} \alpha_r = -1 \quad (j = -n, \dots, n) \\ \omega_{rj} = \frac{\sin^2 \lambda}{4} \left[\frac{(\sin \lambda (r-j+1/2))^{-1}}{\sin \lambda (r-j-1/2)} + \frac{(\cos \lambda (r+j+1/2))^{-1}}{\cos \lambda (r+j-1/2)} \right] + \\ + 2\beta \eta_* \delta_{n, |j|} (1 + \delta_{n0}) (-1)^{r+n} \sin \lambda \times \\ \times \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{\cos \lambda k \sin \lambda k (2r+2N+1) \sin \lambda k (2n+2N+2)}{1 + 2\beta \eta_* \cos \lambda k}$$

Решив систему (2.5), можно вычислить, касательные напряжения в кончике трещины сдвига. Для этого используем (1.4), (1.1), (2.4) и повторим выкладки, приведшие к системе (2.5)

$$(2.6) \quad \tau = (G/H) (u_n(\eta_*) - u_{n+1}(\eta_*)) = G\sqrt{h/H} (w_n(\eta_*) - w_{n+1}(\eta_*)) = \\ = \frac{\sigma\sqrt{h/H}}{\eta_*(1+\delta_{n0})} \left\{ -1 - \frac{\sin^2 \lambda}{4} \sum_{r=-n}^n \alpha_r \left[\frac{(\sin \lambda (r-n+1/2))^{-1}}{\sin \lambda (r-n-1/2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\cos \lambda (r+n+1/2))^{-1}}{\cos \lambda (r+n-1/2)} \right] \right\}$$

3. Рассмотрим частный случай: $n=0$, N — любое. Это значит, что порвано одно центральное волокно и трещины сдвига распространяются между нулевым и плюс-минус первым волокнами. Система (2.5) сводится к одному уравнению, из которого находим α_0 , а следовательно, и $w_i^*(\eta)$. Приводим выражение для касательного напряжения при $\eta=\eta_*$ между нулевыми и первым волокнами

$$(3.1) \quad \tau = \sigma\beta \sqrt{\frac{h}{H}} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \rho_k \cos(2k+1)\lambda}{\sum_{k=0}^{N-1} \rho_k} \\ \rho_k = \cos(2k+1)\lambda / (1+2\beta\eta_* \cos(2k+1)\lambda)$$

и для нормального напряжения в первом волокне

$$(3.2) \quad \sigma_1(\eta_*) = \frac{Edw_1^*(\eta_*)}{d\eta} = 2\sigma \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \rho_k \cos^2(2k+1)\lambda}{\sum_{k=0}^{N-1} \rho_k}$$

при малых $\beta\eta_*$ $\rho_k \approx (1-2\beta\eta_* \cos(2k+1)\lambda) \cos(2k+1)\lambda$ и все суммы легко вычисляются. Так же обстоит дело при $\beta\eta_*$ настолько больших, что можно пренебречь единицей по сравнению с $2\beta\eta_* \cos(2N-1)\lambda$; в этом случае $\rho_k \approx 1/2\beta\eta_*$ и напряжения уже не зависят от $\beta\eta_*$. Анализ (3.1) и (3.2) показывает, что если зафиксировать σ и увеличивать $\beta\eta_*$, то $\tau(\eta_*)$ и $\sigma_1(\eta_*)$ монотонно убывают от значений

$$(3.3) \quad \tau(0) = \sigma\beta\sqrt{h/H} \pi \operatorname{tg} \lambda / 4\lambda, \quad \sigma_1(0) = \sigma(1 + \sin \lambda / \sin 3\lambda)$$

до значений

$$(3.4) \quad \tau(\infty) = 2(2N+1)\sigma\beta\sqrt{h/H} \lambda \operatorname{ctg} \lambda / 2\pi N, \quad \sigma_1(\infty) = \sigma(2N+1) / 2N$$

Формулы (3.3) совпадают с результатами, полученными в [1] (п.36). Поскольку предельный переход $\beta\eta_* \rightarrow \infty$ противоречит исходному допущению о малости $\beta\eta_*$, заметим, что полученное решение является точным решением задачи, в которой предполагается, что ослабление на участке $0 \leq \eta \leq \eta_*$ произошло всеми волокнами, так как тогда (2.2) справедливо при любом $\beta\eta_*$. В этом смысле и будем рассматривать формулы (3.4).

До сих пор величина η_* считалась заданной. Теперь определим равновесную длину трещины из условий

$$(3.5) \quad \tau(\eta_*) = \tau_*, \quad \sigma_1(\eta_*) \leq \sigma_*$$

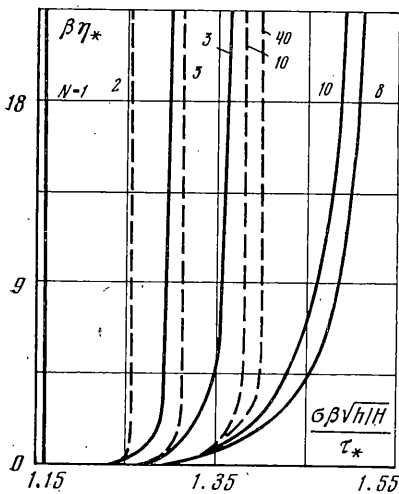
На фиг. 2 графически изображена зависимость равновесной длины трещины от внешней нагрузки для различных N , полученная на основании формул (3.1) и (3.5) (сплошные линии). Случай $N=\infty$ может быть получен предельным переходом из решения для конечного N ; при этом $\lambda \rightarrow 0$ и

конечные суммы превращаются в интегралы. При $N=1$ полученное приближенное решение является точным.

Таким образом, большей нагрузке отвечает большая длина трещины, и, следовательно, трещина сдвига устойчиво развивается (за исключением случая $N=1$) по крайней мере на начальной стадии отслаивания. Как следует из полученного решения, при достижении внешней нагрузкой некоторой предельной величины трещина сдвига уходит на бесконечность, если, разумеется, при ее развитии $\sigma_1(\eta_*) \leq \sigma_*$. Из (3.5), (3.2) и (3.4) получаем критерий неограниченного развития трещины сдвига

$$(3.6) \quad \gamma = \frac{\tau_*}{\sigma_* \beta \sqrt{h/H}} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \rho_k \cos(2k+1)\lambda / 2 \sum_{k=0}^{N-1} \rho_k \cos^2(2k+1)\lambda$$

При $\eta_*=0$ правая часть (3.6) равна $\gamma_0 = \pi \sin 3\lambda / 16\lambda \cos^3 \lambda$ и с увеличением η_* растет, стремясь к величине $\gamma_\infty = (2/\pi)\lambda \operatorname{ctg} \lambda$. Следовательно,



Фиг. 2

при медленном увеличении нагрузки σ существуют следующие возможности: если $\gamma > \gamma_0$, то отслаивание вообще не начнется; если $\gamma < \gamma_0$, то отслаивание начнется и больше не сменится разрывом волокна. Для случая неограниченной пластины ($N=\infty$) $\gamma_0 = 3\pi/16$, $\gamma_\infty = 2/\pi$.

Пунктирные линии на фиг. 2 соответствуют решению на ЭЦВМ точных уравнений сопряжения смещений и деформаций в точке $\eta = \eta_*$. При $N=2$, $N=3$ аналогичные кривые приведены в [2]. Как видно из фиг. 2, полученные приближенные решения совпадают с точными при малых $\beta\eta_*$, а также качественно верно описывают поведение трещины при всех $\beta\eta_*$.

Рассмотрим случай $n \geq 1$, $N = \infty$ — трещину в неограниченной пластине. Устремим число волокон в образце к бесконечности и совершим предельный переход в (2.5). При этом величина $\lambda = \pi/2(2N+1)$ стремится к нулю, а дискретная переменная λk становится непрерывно меняющейся в интервале $[0, \pi/2]$. Сумма по k превратится при таком предельном переходе в интеграл. В результате для определения α_r получаем систему (3.7)

$$(3.7) \quad \sum_{r=-n}^n \alpha_r \left[\frac{1}{4(r-j)^2 - 1} + (-1)^{r+n} \delta_{n,|j|} \beta \eta_* \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \kappa \cos \kappa (2n - 2r + 1)}{1 + 2\beta \eta_* \cos \kappa} d\kappa \right] = -1$$

($j = -n, \dots, n$)

Второе слагаемое в квадратной скобке присутствует лишь в крайних уравнениях системы. При замене α_r на α_{-r} система переходит сама в себя, причем каждое уравнение меняет свой номер j на $-j$. Поэтому $\alpha_r = \alpha_{-r}$. Решая внутренние уравнения системы так же, как это сделано в [1] (п.3в), получим

$$(3.8) \quad \alpha_r = \frac{\Gamma(n-r+1/2)\Gamma(n+r+1/2)}{\Gamma(n-r)\Gamma(n+r)} \left[\frac{4}{\pi} + \alpha_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^2 - r^2} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1/2)} \right]$$

где Γ — гамма-функция. Для определения последнего неизвестного можно использовать любое из крайних уравнений системы (3.7). При подстановке (3.8) в последнее уравнение $j=n$ системы и для дальнейших выкладок понадобятся некоторые формулы, которые выводятся следующим образом. Используем соотношение

$$(3.9) \quad \Gamma^{-2}(\lambda) \sum_{r=-n}^n \frac{\Gamma(n-r+\lambda)\Gamma(n+r+\lambda)}{\Gamma(n-r+1)\Gamma(n+r+1)} \cos 2r\varphi = C_{2n}^\lambda(\cos \varphi)$$

где C_{2n}^λ — многочлен Гегенбауэра степени $2n$ (см. [4], стр. 1044, формула 8.934.2). Следующая формула является частным случаем (3.9) при $\varphi=0$, $\lambda=1/2$

$$(3.10) \quad \sum_{r=-n}^n \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(n-r+1/2)\Gamma(n+r+1/2)}{\Gamma(n-r+1)\Gamma(n+r+1)} = C_{2n}^{1/2}(1) = P_{2n}(1) = 1$$

(P_{2n} — полином Лежандра степени $2n$). Положив в (3.9) $\varphi=0$, $\lambda=3/2$, заменив n на $n-1$ и учитывая, что $C_{2n}^{3/2}(1) = 1/2 \Gamma(2n+3) \Gamma^{-1}(2n+1)$ (см. [4], стр. 1044, формула 8.931), получаем еще одну сумму

$$(3.11) \quad \sum_{r=-n+1}^{n-1} \frac{4}{\pi} \frac{\Gamma(n-r+1/2)\Gamma(n+r+1/2)}{\Gamma(n-r)\Gamma(n+r)} = C_{2n-2}^{3/2}(1) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n-1)}$$

Если в левой части (3.9) заменить $\cos 2r\varphi$ на $\sin(2n+2s+1-2r)\varphi$, s — целое, то правая часть равенства умножится на $\sin(2n+2s+1)\varphi$, так как сумма членов, содержащих множителем $\sin 2r\varphi$, равна нулю из-за нечетности синуса. Интегрирование полученного равенства по φ от 0 до $\pi/2$ приводит к следующей формуле:

$$(3.12) \quad \sum_{r=-n}^n \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(n-r+1/2)\Gamma(n+r+1/2)}{\Gamma(n-r+1)\Gamma(n+r+1)} \frac{1}{n-r+s+1/2} = \frac{\Gamma(s+1/2)\Gamma(2n+s+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(2n+s+3/2)}$$

(здесь использован известный интеграл в [4], стр. 838, формула 7.245.2).

Наконец, еще одна необходимая формула найдена подбором

$$(3.13) \quad \sum_{r=-n+1}^{n-1} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(n-r+1/2)\Gamma(n+r+1/2)}{\Gamma(n-r)\Gamma(n+r)} \frac{1}{n-r+s-3/2} = n+s - \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{s-1} (n+k-1) \frac{\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(2n-1+k)}{\Gamma(2n-1/2+k)} \quad (s \geq -n+1)$$

(если верхний предел у суммы по k оказывается меньше нижнего, следует считать ее равной нулю).

Найдем касательное напряжение в кончике трещины, сделав в (2.6) предельный переход ($N \rightarrow \infty$)

$$(3.14) \quad \tau = \frac{\sigma \sqrt{h/H}}{\eta_*} \left(-1 - \sum_{r=-n}^n \frac{\alpha_r}{4(n-r)^2-1} \right) = \frac{\sigma \sqrt{h/H}}{\eta_*} \left[\alpha_n \frac{\pi}{2(4n+1)} \frac{\Gamma^2(2n+1)}{\Gamma^2(2n+1/2)} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1/2)} \right]$$

Чтобы получить выражение в последней квадратной скобке, дробь под знаком суммы по r следует разложить на простейшие и воспользоваться найденными суммами (3.13), положив $s=1$, $s=2$ и (3.12) при условии $s=-1$, $s=0$.

Проанализируем полученный результат в предельных случаях очень малых и очень больших $\beta\eta_*$. Пусть $\beta\eta_*$ настолько мало, что в (3.7) можно считать $(1+2\beta\eta_* \cos \kappa)^{-1} \approx 1-2\beta\eta_* \cos \kappa$. Тогда интеграл в (3.7) равен

$$\frac{\pi}{4} \delta_{rn} - (-1)^{r+n} \beta\eta_* \left[\frac{1}{2n-2r+1} - \frac{1}{2(2n-2r+3)} - \frac{1}{2(2n-2r-1)} \right]$$

(δ_{rn} — символ Кронекера), и для определения α_n , используя (3.12) и (3.13) при надлежащих значениях s , получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \frac{2n-1}{4n+1} \beta^2 \eta_*^2 \right) = \\ & = \alpha \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1/2)} \left[\frac{1}{2n+1/2} - \frac{\Gamma^2(2n+1/2)}{\Gamma^2(2n+1)} \beta\eta_* + \frac{2(6n+5)}{(4n+1)(4n+3)} \beta^2 \eta_*^2 \right] \end{aligned}$$

Подсчитав по формуле (3.14) касательное напряжение и приравняв его прочности связующего на сдвиг τ_* , получим зависимость равновесной длины трещины от внешней нагрузки (с точностью до бесконечно малых второго порядка при $\beta\eta_* \rightarrow 0$)

$$(3.15) \quad \frac{\sigma \beta \sqrt{h/H}}{\tau_*} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1/2)} \left\{ \frac{1}{2n+1/2} + \beta\eta_* \left[\frac{2\Gamma(2n+1)\Gamma(2n+3)}{(4n+1)\Gamma(2n+3/2)\Gamma(2n+5/2)} - \frac{\Gamma^2(2n+1/2)}{\Gamma^2(2n+1)} \right] + \dots \right\}$$

Слагаемое в правой части (3.15), не содержащее $\beta\eta_*$, убывает с ростом n , т. е. чем больше будет число порванных волокон $2n+1$, тем при меньшем напряжении σ начнется отслаивание. Слагаемое, содержащее $\beta\eta_*$, положительно, поэтому по мере роста трещины сдвига внешнее напряжение, необходимое для поддержания равновесия, становится все больше. Трещина сдвига, следовательно, в этом случае устойчива в начале своего развития. Учитывая соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1/2} \Gamma(n+1/2) / \Gamma(n+1) = 1$, можно легко установить, что множитель при $\beta\eta_*$ в (3.15) стремится к нулю при неограниченном возрастании n .

Исследуем поведение трещины, обусловленное решением системы (3.7), при больших значениях $\beta\eta_*$. При вычислении интеграла в (3.7) положим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{\beta\eta_* \cos \kappa \cos \kappa (2n-2r+1)}{1+2\beta\eta_* \cos \kappa} d\kappa = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{1+2\beta\eta_* \cos \kappa} \right) \cos \kappa (2n-2r+1) d\kappa \approx \\ & \approx \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n-r}}{2n-2r+1} - \frac{1}{4\beta\eta_*} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \kappa (2n-2r+1)}{\cos \kappa} d\kappa = \\ & = \frac{(-1)^{n-r}}{4(n-r+1/2)} - \frac{\pi}{8\beta\eta_*} (-1)^{n-r} \end{aligned}$$

Для определения α_n получим при помощи (3.10)–(3.13) уравнение

$$\alpha_n \frac{\pi \sqrt{\pi}}{8\beta\eta_*} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+1/2)} = n + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16\beta\eta_*} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n-1)}$$

Подставив α_n в (3.14) и устремив $\beta\eta_*$ к бесконечности, находим, что

$$\lim_{\beta\eta_* \rightarrow \infty} \sigma\beta\sqrt{h/H}/\tau_* = \sqrt{\pi} \Gamma(2n+3/2)/\Gamma(2n+2).$$

Этот предел убывает с ростом n до нуля, но всегда остается больше, чем значение (3.15) при $\beta\eta_*=0$.

Итак, в рассматриваемом случае ($n \geq 1, N = \infty$) графики зависимости равновесной длины трещины от приложенного напряжения имеют такой же вид, как на фиг. 2. С ростом величины $2n+1$ (числа порванных волокон) эти графики равномерно и монотонно стремятся к вертикальной оси $\sigma\beta(h/H)^{1/2}/\tau_* = 0$.

Отметим, что хотя выкладки проводились в предположении $n \geq 1$, результаты сохраняют силу и при $n=0$.

4. Вернемся к п. 2, где задача сопряжения решений $w_j^-(\eta)$ и $w_j^+(\eta)$ в точке $\eta = \eta_*$ упрощена. Удерживая в тейлоровских разложениях $\text{sh } \xi$ и $\text{ch } \xi$ большее количество членов, можно уточнить полученные результаты. Например, отбрасывая члены пятого порядка малости при $\beta\eta_* \rightarrow 0$, получим из (1.7), (1.8) вместо (2.1) такое соотношение:

$$(4.1) \quad w_j^- - \eta dw_j^-/d\eta + \\ + 1/3 \eta^2 d^2 w_j^-/d\eta^2 = 0 \\ (j = \pm(n+1), \dots, \pm N)$$

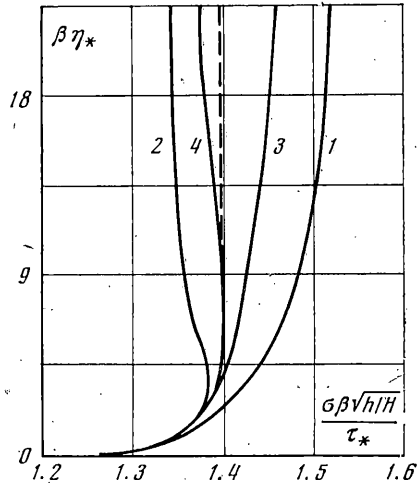
Учитывая, что $d^2 w_j(\eta_*)/d\eta^2$ непрерывны при $j = \pm(n+2), \dots, \pm N$, получим для w_j^+ краевое условие в точке $\eta = \eta_*$

$$(4.2) \quad w_j^+ - \eta_* dw_j^+/d\eta + 1/3 \eta_*^2 d^2 w_j^+/d\eta^2 = 0 \quad (j = \pm(n+2), \dots, \pm N)$$

Из (4.2) следует, что напряжение в j -м волокне при $\eta = \eta_*$ определяется не только удлинением самого этого волокна, но и удлинениями ближайших соседних волокон, потому что $d^2 w_j^+/d\eta^2$ выражается с помощью уравнений равновесия (1.2) через w_{j-1}^+, w_j^+ и w_{j+1}^+ .

Используя (4.2) и (1.9), получим систему уравнений для определения μ_k

$$\sum_{k=1}^{2N+1} \mu_k \left(1 + 2\beta\eta_* \cos \lambda k + \frac{4}{3} \beta^2 \eta_*^2 \cos^2 \lambda k \right) \sin \lambda k (2j + 2N + 1) = 0 \\ (j = \pm(n+2), \dots, \pm N)$$



Фиг. 3

которая решается так же, как в п. 2. Аналогично проходит и все дальнейшее исследование. Ясно, что удержание дальнейших членов в рядах Тейлора приведет к уточнению уравнения состояния волокна, что выразится в появлении производных более высокого порядка, чем в (4.1). К сожалению, чем выше порядок производной, тем дальше нужно отступить от трещины сдвига по оси x , чтобы обеспечить непрерывность этой производной в точке $\eta = \eta_*$. Поэтому при получении краевого условия для w_j^* при j , близких к n , получаются уравнения не менее громоздкие, чем исходные точные уравнения сопряжения.

На фиг. 3 приведены зависимости равновесной длины трещины сдвига от нагрузки для случая $n=0$, $N=\infty$, полученные в первом приближении (в п. 3, а, кривая 1), во втором приближении, соответствующем равенству (4.1) (кривая 2), в третьем и четвертом приближениях (кривые 3 и 4), которым соответствуют следующие законы поведения волокон $j \neq 0$ при $\eta \leq \eta_*$:

$$\begin{aligned} w_j^- - \eta dw_j^- / d\eta + {}^2/5 \eta^2 d^2 w_j^- / d\eta^2 - {}^1/15 \eta^3 d^3 w_j^- / d\eta^3 &= 0 \\ w_j^- - \eta dw_j^- / d\eta + {}^3/7 \eta^2 d^2 w_j^- / d\eta^2 - {}^2/21 \eta^3 d^3 w_j^- / d\eta^3 + \\ + {}^1/105 \eta^4 d^4 w_j^- / d\eta^4 &= 0 \end{aligned}$$

Пунктирный график соответствует точному решению для $N=40$, полученному на ЭЦВМ.

Как видно из фиг. 3, с увеличением числа удерживаемых членов при разложении в ряды Тейлора гиперболических функций в (1.6)–(1.8) увеличивается интервал $\beta\eta_*$, в котором приближенное решение правильно описывает поведение трещины. В частности, интервал устойчивого развития трещины по четвертому приближению дается неравенствами $1.273 \dots \leq \sigma\beta\sqrt{h}/\bar{H} / \tau_* \leq 1.394 \dots$, а численное решение задачи для $N=40$ приводит к такому интервалу устойчивости: $1.273 \dots \leq \sigma\beta\sqrt{h}/\bar{H} / \tau_* \leq 1.405 \dots$

Относительная погрешность не превышает 1%. К сожалению, не удалось доказать сам факт существования предельной нагрузки, ниже которой трещина сдвига устойчива (за исключением случаев $N=2$, $N=3$, в которых решение можно получить в явном, но слишком громоздком виде).

Поступила 16 IV 1973.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. М. О разрушении однонаправленного стеклопластика. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
2. Van Dyke P., Hedgepeth J. M. Stress concentrations from single-filament failure in composite materials. Text. Res. J., 1969, vol. 39, No. 7, p. 618.
3. Гарнопольский Ю. Н., Розе А. В., Поляков В. А. Приложение теории многослойных сред к изучению ориентированных стеклопластиков. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.