

УДК 532.135

ЭФФЕКТИВНЫЕ РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

С. Г. ЗВЕРЕВА, А. Г. ФОКИН, Т. Д. ШЕРМЕРГОР

(Москва)

В предположении, что слоистый композит составлен из чередующихся упругого и вязко-упругого слоев, вычислены операторные значения эффективных модулей упругости и коэффициентов Пуассона. Принято, что объемная релаксация вязко-упругого компонента отсутствует, а сдвиговая — описывается Э-оператором Ю. Н. Работнова. При помощи ЭЦВМ исследована зависимость реологических характеристик композита от взаимной концентрации компонентов и отношения их модулей сдвига.

Одной из особенностей композиционных материалов является то, что путем соответствующего подбора концентраций, пространственного распределения и свойств компонентов удается получить материалы с весьма сильно отличающимися механическими и реологическими характеристиками. В этой связи возникает необходимость разработки методов теоретического расчета свойств композита по известным свойствам, концентрации и пространственному распределению компонентов.

Поскольку систематического исследования влияния отмеченных факторов до сих пор не проводилось, ниже рассматривается слоистый композит, для которого может быть получено точное решение поставленной задачи.

1. Рассмотрим композит, составленный из чередующихся изотропных упругих и вязко-упругих слоев произвольной толщины с объемной концентрацией ν . Примем, что объемная релаксация вязко-упругого компонента пренебрежимо мала, а сдвиговая описывается дробно-экспоненциальным оператором Ю. Н. Работнова [1]. Соответственно этому операторные значения объемного и сдвигового модулей упругости вязко-упругого компонента будут равны

$$(1.1) \quad K_1^* = K_1, \quad \mu_1^* = \mu_1^\infty [1 - \kappa \mathcal{E}_\alpha^*(x)]$$

$$\mathcal{E}_\alpha^*(x) \cdot 1 = \int_0^x \mathcal{E}_\alpha(x, t - \theta) d\theta$$

$$(1.2) \quad \mathcal{E}_\alpha(x) \equiv t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t/\tau)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]}, \quad \gamma = 1 + \alpha, \quad -1 \leq \alpha < 0$$

$$\kappa = (\mu_\infty - \mu_0) / \mu_\infty \tau^\gamma, \quad x = -1 / \tau^\gamma$$

тогда как для упругого компонента $K_2^* = K_2$, $\mu_2^* = \mu_2$. Здесь μ_1^∞ и μ_1^0 — соответственно нерелаксированное (мгновенное) и релаксированное значения модуля сдвига, κ и x — реологические параметры, $1 - \mu_0 / \mu_\infty$ — дефект модуля, характеризующий интенсивность релаксационного процесса, а τ — характерное время релаксаций сдвиговых напряжений, отвечающее максимуму функции распределения логарифмов времен релаксаций.

Из выражения (1.2) следует, что две другие характеристики — модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν вязко-упругого связующего — будут операторами [2]

$$(1.3) \quad E_1^* = E_1^\infty [1 - \kappa_E \mathcal{E}_\alpha^*(x_E)], \quad \nu_1^* = \nu_1^\infty [1 - \kappa_\nu \mathcal{E}_\alpha^*(x_E)]$$

$$\kappa_E = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty \tau_E^\nu}, \quad \kappa_\nu = \frac{\nu_0 - \nu_\infty}{\nu_\infty \tau_E^\nu}, \quad x_E = x + \frac{1 - 2\nu}{3} \kappa \equiv - \frac{1}{\tau_E^\nu}$$

Операторные значения матрицы c_{mn}^* и обратной ей матрицы a_{mn}^* , связывающие осредненные напряжения и деформации в законе Гука, приведены в [3]. По известной матрице a_{mn}^* могут быть вычислены операторные значения модулей Юнга E^* и коэффициентов Пуассона ν^* композита. Однако более простым оказывается путь, основанный на непосредственном переходе от эффективных модулей Юнга и коэффициентов Пуассона к их операторным значениям. Исходные формулы, полученные путем решения упругой задачи, имеют вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} E &= \nu_1 E_1 + \nu_2 E_2 + 2M_p^{-1} D_\nu, & \nu &= \nu_1 \nu_1 + \nu_2 \nu_2 - M_p^{-1} D_{\nu\nu} \\ \frac{1}{E'} &= \frac{\nu_1}{E_1} + \frac{\nu_2}{E_2} + \frac{2D_q}{M_s}, & \nu' &= \frac{\nu_1 \nu_1}{E_1} + \frac{\nu_2 \nu_2}{E_2} - \frac{D_{sq}}{M_s} \\ \frac{1}{\mu} &= \frac{\nu_1}{\mu_1} + \frac{\nu_2}{\mu_2}, & \mu' &= \nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2 \\ p_i &= \frac{1 - \nu_i}{\mu_i}, & q_i &= \frac{\nu_i}{E_i}, & s_i &= \frac{1 - \nu_i}{E_i}, & D_{xy} &= \nu_1 \nu_2 (x_1 - x_2) (y_1 - y_2) \\ M_x &= \nu_1 x_2 + \nu_2 x_1, & D_x &= D_{xx} \end{aligned}$$

где величины, относящиеся к первой и второй фазам, отмечаются индексами $i=1, 2$, а относящиеся к композиту в целом индекса не имеют. Физический смысл эффективных модулей упругости и коэффициентов Пуассона определяется законом Гука для осредненных напряжений и деформаций

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \langle \varepsilon_x \rangle &= \frac{1}{E} (\langle \sigma_x \rangle - \nu \langle \sigma_y \rangle) - \frac{\nu'}{E'} \langle \sigma_z \rangle, & \langle \gamma_{yz} \rangle &= \frac{1}{\mu'} \langle \tau_{yz} \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle &= \frac{1}{E} (\langle \sigma_y \rangle - \nu \langle \sigma_x \rangle) - \frac{\nu'}{E'} \langle \sigma_z \rangle, & \langle \gamma_{xz} \rangle &= \frac{1}{\mu'} \langle \tau_{xz} \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle &= - \frac{\nu'}{E'} \langle \sigma_x + \sigma_y \rangle + \frac{1}{E'} \langle \sigma_z \rangle, & \langle \gamma_{xy} \rangle &= \frac{1}{\mu} \langle \tau_{xy} \rangle \\ E &= 2\mu(1 + \nu) \end{aligned}$$

Заменяя в выражениях (1.4) модули упругости их операторным значением и приводя функции от операторов к стандартному виду, получим

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \mu^* &= \mu^\infty [1 - \kappa_1 \partial^*(x_1)], & \mu'^* &= \mu'^\infty [1 - \kappa_2 \partial^*(x)] \\ E^* &= E^\infty [1 - \kappa_3^{(1)} \partial^*(x_2) - \kappa_3^{(2)} \partial^*(x_3)], & E'^* &= E'^\infty [1 - \kappa_4 \partial^*(x_4)] \\ \nu^* &= \nu^\infty [1 - \kappa_5^{(1)} \partial^*(x_2) + \kappa_5^{(2)} \partial^*(x_3)], & \nu'^* &= \nu'^\infty [1 + \kappa_6 \partial^*(x_4)] \end{aligned}$$

Реологические параметры, описывающие характерные времена релаксации композита и их интенсивности, равны

$$(1.7) \quad \begin{aligned} x_1 &= x + \chi_1, & x_{2,3} &= x + \chi_2 + y^\pm, & x_4 &= x + \chi_3 - \kappa \\ y^\pm &= \xi \pm \sqrt{\xi^2 - \xi_1 \xi_3}, & 2\xi &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_1 &= - \frac{\nu_2 \eta \mu_1^\infty \kappa}{2M_p}, & \xi_2 &= - \frac{\nu_2 \kappa}{2\mu_1^\infty M_p}, & \xi_3 &= \eta \kappa \end{aligned}$$

$$\eta^{-1} \equiv 1 + \frac{\mu_1^\infty}{3K_1}, \quad \chi_1 = \frac{\nu_2 \mu_1^\infty \kappa}{M_\mu}, \quad \chi_2 = \frac{\eta \mu_1^\infty \kappa}{3K_1}, \quad \chi_3 = \left[1 - \frac{\nu_2}{6\mu_1^\infty M_s} \right] \kappa$$

$$\kappa_1 = \nu_1 \mu^\infty \kappa / \mu_1^\infty, \quad \kappa_2 = \nu_1 \mu_1^\infty \kappa / \mu'^\infty$$

$$\kappa_3^{(1,2)} = \frac{3\nu_1 \mu_1^\infty \eta_1^2 \kappa}{E^\infty} \frac{(y^\mp - \xi_1)(y^\pm + Y)^2}{Y^2(y^+ - y^-)}$$

$$\kappa_4 = \frac{\nu_1 [v_2(q_1 - q_2) - M_s]^2 E'^\infty \kappa}{3\mu_1^\infty M_s^2}$$

$$\kappa_5^{(1,2)} = \frac{\nu_1 [v_2(p_1 - p_2) - M_p] \eta^2 \mu_1^\infty (y^\pm - \xi_3)(y^\pm + Y) \kappa}{2M_p K_1 Y (y^+ - y^-)}$$

$$\kappa_6 = \kappa_4 - \frac{\nu_1 [v_2(q_1 - q_2) - M_s] [v_2(s_1 - s_2) - M_s] E'^\infty \kappa}{6\mu_1^\infty \nu'^\infty M_s^2}$$

$$Y = \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\mu_1^\infty \kappa}{(\nu_1^\infty - \nu_2) K_1}$$

Здесь для простоты принято, что мгновенные значения коэффициентов Пуассона обоих компонентов одинаковы, т. е. $\nu_1^\infty = \nu_2$, а их релаксированные значения различные: $\nu_1^\circ \neq \nu_2$.

2. Равенствами (1.4) — (1.6) дается решение задачи о вычислении эффективных упругих и реологических характеристик слоистого композита. Для количественной оценки влияния на реологические характеристики взаимной концентрации компонентов и отношения их модулей сдвига введем параметры $\beta = \mu_1^\infty / \mu_2$, $z = \lg \beta$ и ограничимся случаем $\mu_1^\infty / K_1 = \mu_2 / K_2 = 6/13$, что соответствует условию $\nu_1^\infty = \nu_2 = 0.3$, а также примем, что $\mu_1^\infty / \mu_1^\circ = 10$. Будем относить все эффективные реологические характеристики к исходным при помощи соотношений

$$(2.1) \quad y_1 = \frac{\chi_1}{x}, \quad y_{2,3,4} = \frac{\chi_{2,3,4}}{x_E}, \quad m_{1,2} = \frac{\kappa_{1,2}}{\kappa}, \quad m_{3,4} = \frac{\kappa_{3,4}}{\kappa_E}, \quad m_{5,6} = \frac{\kappa_{5,6}}{\kappa_\nu}$$

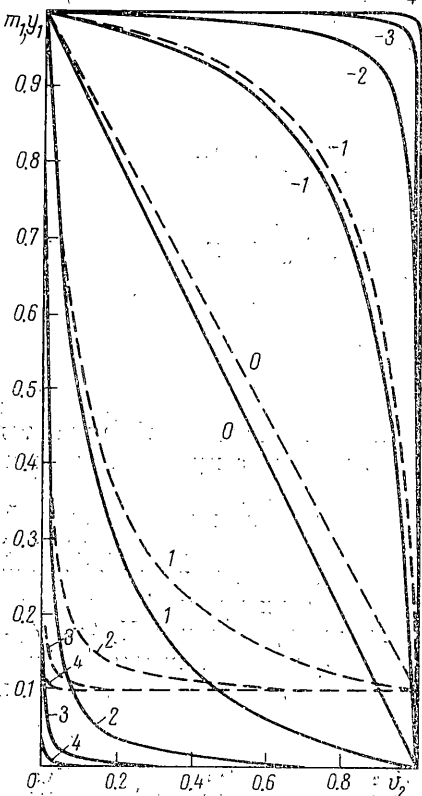
Сравнивая реологические характеристики композита и чистого вязкоупругого компонента, подчеркнем, что в первом обычно интенсивность релаксации меньше, чем во втором, а характерное время релаксации — больше.

Наиболее простыми оказываются выражения для модулей сдвига. Соответствующие реологические характеристики представлены на фиг. 1. Здесь сплошными линиями приведены кривые для m_1 , а пунктирными — для y_1 . Цифрами у кривых указано значение параметра z . Как видно из равенств (1.7), имеет место соотношение $m_1(z) = m_2(-z)$. Поэтому приведено семейство кривых лишь для относительной интенсивности релаксации m_1 , описывающей сдвиговые деформации $\langle \gamma_{xy} \rangle$. Видно, что наличие упругих слоев может существенно уменьшать интенсивность релаксационного процесса композита по сравнению с чистым вязкоупругим компонентом. Этот эффект оказывается особенно существенным в случае сдвигового деформирования $\langle \gamma_{xy} \rangle$ при больших $z = \lg \beta$, а в случае сдвигового деформирования $\langle \gamma_{xz} \rangle$ — при малых β . В другом предельном случае малых β для m_1 и больших β для m_2 интенсивность релаксации композита остается такой же, как и чистого вязкоупругого связующего.

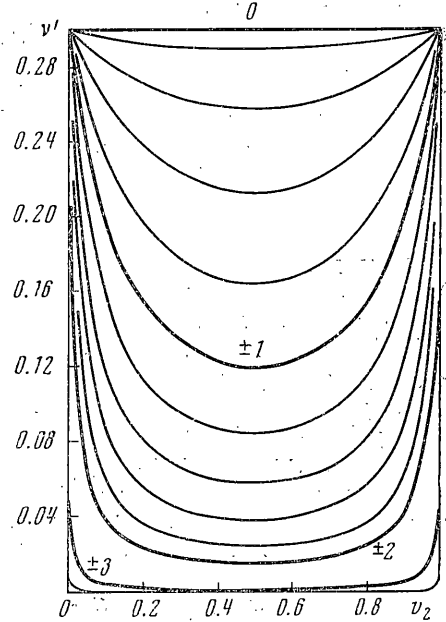
Характерное время релаксации, как это видно из равенств (1.6), при сдвиговых деформациях $\langle \gamma_{xz} \rangle$ такое же, как и чистого вязко-упругого компонента, а при сдвиговых деформациях $\langle \gamma_{xy} \rangle$ оно уменьшается. Однако это уменьшение оказывается существенным лишь при больших β .

Рассмотрим теперь эффективные характеристики модулей Юнга и коэффициентов Пуассона. В рассматриваемом случае $\nu_1^\infty = \nu_2 = 0.3$ из равенств (1.4) находим

$$(2.2) \quad E = \frac{13}{5} \mu_2 b', \quad E' = 7 \mu_2 b' \beta \gamma, \quad \nu = 0.3 \\ \nu' = \frac{21}{26} [b' b'' - \nu_1 \nu_2 (1 - \beta)^2] \gamma \\ b' = \nu_1 \beta + \nu_2, \quad b'' = \nu_1 + \nu_2 \beta \\ \gamma^{-1} = 2b' b'' + \frac{9}{13} \beta$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Из приведенных выражений видно, что зависимость мгновенного (нерелаксированного) модуля упругости E от параметра β и концентрации ν_2 линейная, а коэффициент Пуассона ν не зависит от β и ν_2 . В то же время E' и ν' существенно нелинейно зависят от обоих отмеченных параметров, причем $\nu'(-z) = \nu'(z)$. Соответствующие кривые приведены на фиг. 2. Цифрами у кривых указаны значения параметра z .

Несмотря на равенство коэффициентов Пуассона обоих компонентов, эффективный коэффициент Пуассона ν' оказывается существенно меньше, чем $\nu_1^\infty = \nu_2$, а при сильно отличающихся модулях сдвига он уменьшается в пределе вплоть до нуля почти во всей области концентраций. Отсюда следует, что при большом различии модулей сдвига деформация в направлении Ox_3 почти не сопровождается сокращением средних поперечных размеров. Отмеченный эффект объясняется тем, что деформирование вдоль оси Ox_3 при сильно отличающихся модулях сдвига (а тем самым и модулях упругости E_n) компонентов не сопровождается заметной деформацией жесткого компонента. Что касается мягкого компонента, то вследствие условия жесткого сопряжения на границе раздела слоев, его деформация,

являясь однородной, будет представлять собой суперпозицию деформации одностороннего и всестороннего растяжений. Вследствие этого средняя поперечная деформация при растяжении поперек слоев при сильно отличающихся модулях упругости оказывается весьма малой.

Согласно выражению (1.6), деформирование вдоль слоев (по осям Ox_1 или Ox_2) сопровождается дроблением релаксационного спектра — функция распределения логарифмов времен релаксаций вместо одного максимума для чистого вязко-упругого компонента описывается теперь суперпозицией двух колоколообразных кривых. Результирующая кривая, однако, при мало отличающихся временах релаксации или малой интенсивности данного процесса $m_3^{(k)}$ может и не иметь двух максимумов.

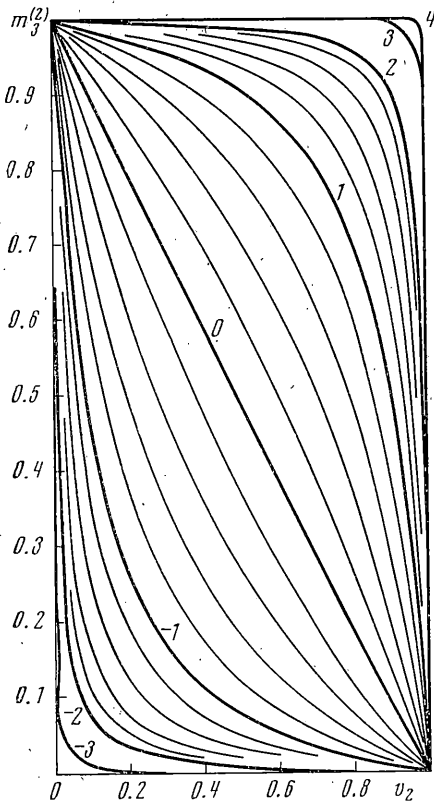
Оценка вклада каждого из слагаемых в третьей из формул (1.6) может быть сделана путем сравнения интенсивностей $m_3^{(k)}$. Зависимости $m_3^{(2)}$ и отношения $m_3^{(1)}/m_3^{(2)}$ от концентрации v_2 приведены соответственно на фиг. 3, а, б. Как и прежде, цифрами у кривых указано значение параметра $z = \lg \beta$. Видно, что при малых β оба слагаемых имеют одинаковый порядок величины, причем их отношение $m_3^{(1)}/m_3^{(2)} \leq 0.33$. При больших β почти во всей области концентраций величина $m_3^{(1)}$ пренебрежимо мала. Семейство кривых $m_3^{(2)}$ оказывается монотонным, при этом убывание $m_3^{(2)}$ с ростом концентрации v_2 — более сильное для малых β . В предельном случае больших β величина $m_3^{(2)} = 1$, т. е. интенсивность релаксации композита такая же, как и чистого вязко-упругого компонента.

Параметры y_2 и y_3 представлены на фиг. 3, в, г. Во всей области изменения β они дают семейство кривых, ограниченных некоторыми предельными кривыми. Величина y_3 мало отличается от единицы. Поэтому при $m_3^{(1)} \ll m_3^{(2)}$ не будет наблюдаться не только дробление, но и сдвиг релаксационного спектра композита относительно спектра связующего.

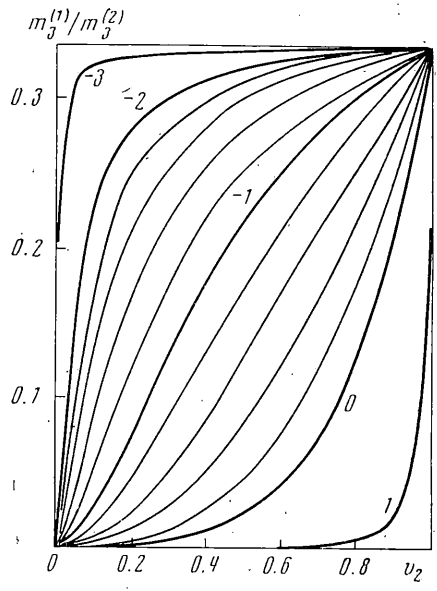
Реологические характеристики модуля Юнга E' , описывающего деформирование вдоль оси Ox_3 , приведены на фиг. 4. При совпадающих модулях сдвига $\mu_1^\infty = \mu_2$ параметр m_4 убывает с ростом v_2 почти линейно, аналогично тому, как близкое к линейному убывание имеет место в этом случае для E . Однако при $\mu_1^\infty \neq \mu_2$ концентрационные зависимости m_4 оказываются существенно иными. В предельном случае бесконечной жесткости упругого компонента $m_4 = 40/91$, т. е. интенсивность релаксации остается конечной и не зависит от концентрации. В другом предельном случае больших β интенсивность релаксации падает вплоть до нуля во всей области концентраций. Последнее очевидно, так как при большой жесткости вязко-упругого компонента почти вся деформация будет приходиться на упругий компонент, и формоизменение вязко-упругого компонента в результате релаксации не скажется заметным образом на полной деформации слоистого материала.

Параметр y_4 при малых β почти во всей области концентраций мало отличается от единицы, т. е. сдвиг релаксационного спектра композита относительно спектра связующего невелик. В другом предельном случае мягкого упругого компонента этот сдвиг может быть существенным, особенно в области близких концентраций компонентов.

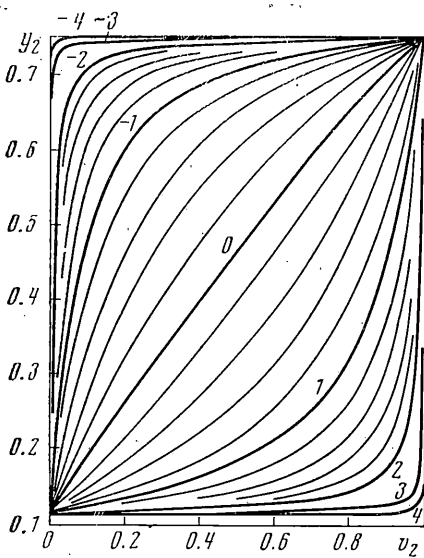
На фиг. 5, а приведены интенсивность релаксации $m_5^{(2)}$ коэффициента Пуассона ν (пунктир), и отношение $m_5^{(1)}/m_5^{(2)}$ (сплошная линия). Интенсивность релаксации m_6 коэффициента Пуассона ν' в функции concentra-



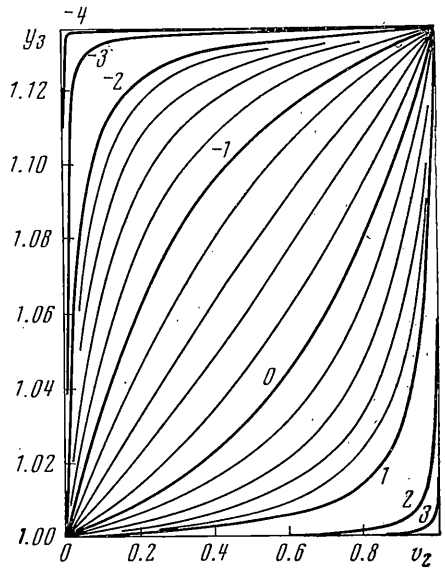
а



б

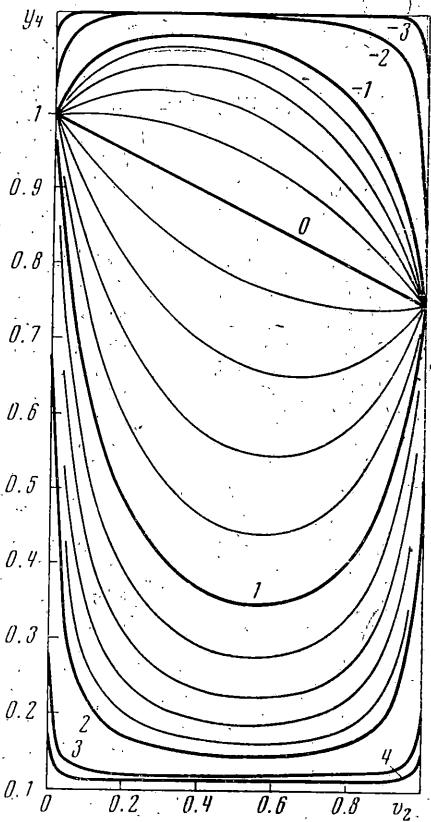
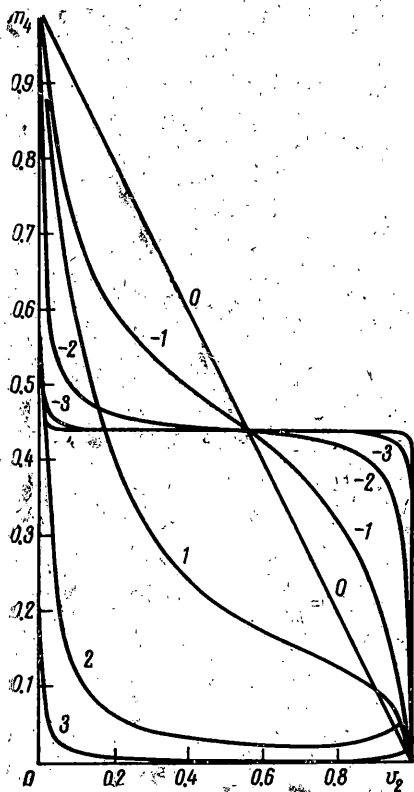


в

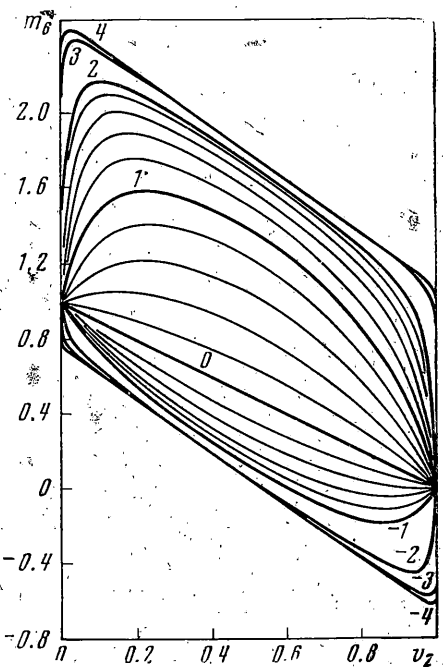
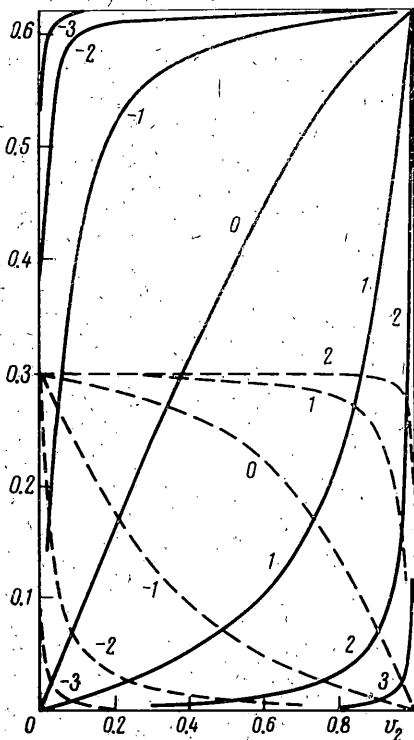


г

Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ции приведена на фиг. 5, б. Видно, что при малых β оба параметра $m_5^{(1)}$ и $m_5^{(2)}$ имеют одинаковый порядок величины, причем $m_5^{(1)}/m_5^{(2)} \leq 0.62$. При больших β слагаемым, содержащим $m_5^{(1)}$ в пятой из формул (1.6) можно пренебречь почти во всей области концентраций. Параметр $m_5^{(2)}$ описывается семейством монотонно убывающих кривых, тогда как зависимость m_6 от концентрации оказывается более сложной. Параметр m_6 в зависимости от концентрации и соотношения между модулями сдвига компонент может быть как положительным, так и отрицательным. Обратим внимание, что величина m_6 может изменяться в довольно широких пределах.

Поступила 10 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. Шермергор Т. Д. Операторное представление упругих модулей анизотропных вязкоупругих сред. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4.
3. Шермергор Т. Д. Эффективные реологические характеристики слоистых материалов. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1.