

УДК 539.376+532.135

О ПРИМЕНЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛОВ

Ю. П. САМАРИН

(Куйбышев)

Рассматривается вопрос об использовании стохастических уравнений состояния в теории ползучести. Предлагается конкретный вид стохастических уравнений. В качестве приложений приводятся решения задач, связанных с прогнозированием ползучести материалов и с расчетами на надежность.

1. Построение стохастических уравнений удобно выполнять, опираясь на какой-либо из вариантов обычных уравнений ползучести. В данной статье отправными являются уравнения [1] с экспоненциальными аппроксимациями функций влияния.

При действии постоянного напряжения вместо средней деформации (по большой совокупности образцов)

$$(1.1) \quad \langle \varepsilon(t) \rangle = \sum_k a_k (1 - e^{-\lambda_k t})$$

рассматривается случайная функция

$$(1.2) \quad \varepsilon(t) = \sum_k A_k(t) (1 - e^{-\lambda_k t})$$

$$(1.3) \quad A_k(t) = A_k + B_k(t), \quad \langle A_k \rangle = a_k, \quad \langle B_k(t) \rangle = 0$$

(A_k — случайные величины, $B_k(t)$ — центрированные случайные функции).

В соответствии с (1.2), (1.3)

$$(1.4) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$$

причем

$$(1.5) \quad \varepsilon_1(t) = \sum_k A_k (1 - e^{-\lambda_k t})$$

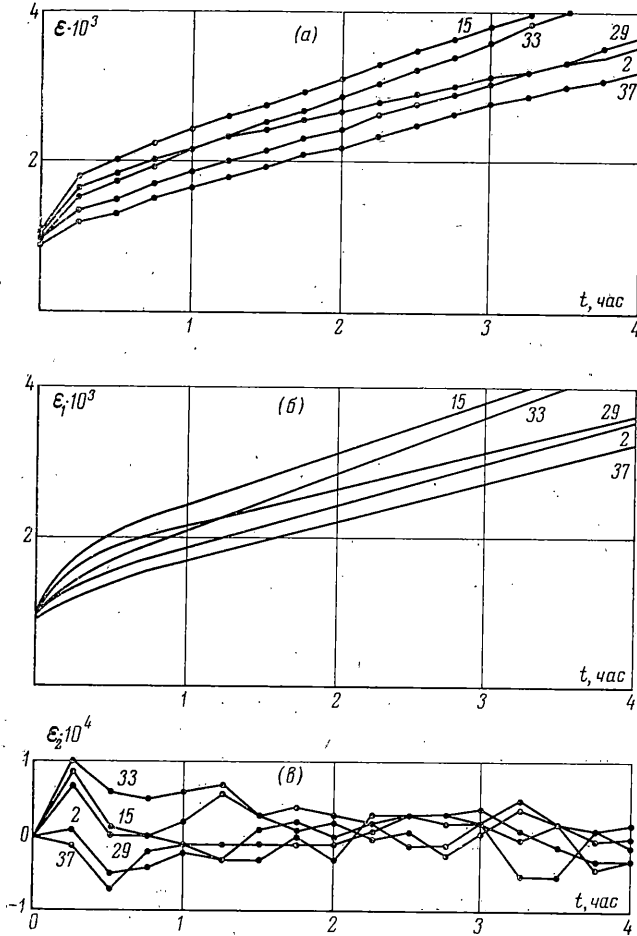
$$(1.6) \quad \varepsilon_2(t) = \sum_k B_k(t) (1 - e^{-\lambda_k t})$$

Поскольку $\langle \varepsilon_2(t) \rangle = 0$, деформацию (1.6) можно рассматривать как «шум», наложенный на деформацию (1.5). Благодаря сходству формы отдельных кривых ползучести (1.4) и усредненной кривой (1.1) можно так подбирать значения случайных величин A_k , что каждая реализация случайной функции (1.5) будет служить удовлетворительной аппроксимацией для соответствующей кривой ползучести. При таком условии значения

шума (1.6) окажутся в среднем существенно меньше деформации (1.5), которая в дальнейшем именуется главной частью деформаций ползучести.

Разбиение полной деформации на главную часть и шум выполняется в следующем порядке:

- 1) по осредненной кривой (1.1) определяют значения λ_k ;
- 2) для каждой реализации деформации (1.4) строят наилучшее в среднем квадратическом приближение вида (1.5); при этом получают статистические ряды для случайных величин A_k ;



Фиг. 1

3) вычисляют разности истинных деформаций и полученных аппроксимаций — это и будут реализации шума.

На фиг. 1 показаны реализации полной деформации (а), ее главной части (б) и шума (в) для сплава ЭИ 437Б при напряжении $\sigma = 16 \text{ кг/мм}^2$ (цифрами обозначены номера пяти реализаций, случайно выбранных из 40 имевшихся в наличии). При этом были вычислены следующие значения λ_k : $\lambda_1 = \infty$ (упругая компонента деформации), $\lambda_2 = 4.4 \text{ час}^{-1}$ и $\lambda_3 \approx 0$. Последнее отвечает установившейся ползучести, так как $A_3(1 - e^{-\lambda_3 t}) \approx Vt$, $V = \lambda_3 A_3$.

Графики на фиг. 1 согласуются с предположением о том, что шум не играет решающей роли в сумме (1.4). Вполне возможно, что происхождение

ние шума обусловлено не столько физическими причинами (пространственная и временная локальность деформаций ползучести), сколько неизбежными ошибками эксперимента (случайные колебания температуры и напряжения в процессе испытаний).

Упомянутые выше статистические ряды для случайных величин A_k , зафиксированные при различных напряжениях, позволяют вычислить статистические оценки математических ожиданий $a_k(\sigma)$ и средних квадратических отклонений $S_k(\sigma)$. Соответствующий анализ опытных данных для сплава ЭИ 437Б при $\sigma=12, 16$ и 20 кг/мм^2 показал, что случайные величины A_k можно считать нормально распределенными и некоррелированными. Последнее означает, что сумма (1.5) является каноническим разложением [2] для случайной функции $\varepsilon_1(t)$.

2. Согласно методу разделения деформации ее главная часть $\varepsilon_1(t)$ может быть представлена суммой [1].

$$(2.1) \quad \varepsilon_1(t) = \xi(t) + \eta_1(t) + \eta_2(t) + \zeta(t).$$

где ξ — упругая деформация, η_1 — деформация вязкого течения, η_2 — деформация вязкого упрочнения, ζ — обратимая деформация. Стохастический аналог уравнений [1] для каждой компоненты деформации имеет вид

$$(2.2) \quad \xi(t) = E^{-1}[\sigma(t)]\sigma(t), \quad \eta_1 = V[\sigma(t)], \quad \eta_2(t) = \sum_k \eta_{2k}(t)$$

$$\eta_{2k}(t) = \begin{cases} \lambda_k \{A_k^{(n)}[\sigma(t)] - \eta_{2k}(t)\}, & A_k^{(n)}[\sigma(t)] \geq \eta_{2k}(t) \\ 0, & A_k^{(n)}[\sigma(t)] < \eta_{2k}(t) \end{cases}$$

$$\zeta(t) = \sum_k \zeta_k(t), \quad \zeta_k(t) = \lambda_k \{A_k^{(c)}[\sigma(t)] - \zeta_k(t)\}$$

При действии постоянного напряжения случайные функции $E^{-1}(\sigma)$, $V(\sigma)$, $A_k^{(n)}(\sigma)$ и $A_k^{(c)}(\sigma)$, называемые в дальнейшем определяющими, обращаются в случайные величины, относительно которых всю необходимую информацию можно получить при испытаниях с разгрузкой (последнее необходимо для рассмотрения $A_k^{(n)}$ и $A_k^{(c)}$, так как при $\sigma = \text{const}$ выявляется лишь сумма $A_k = A_k^{(n)} + A_k^{(c)}$).

В случае переменного напряжения должен быть решен вопрос о том, как изменяются определяющие функции для каждого образца. Поскольку любой реальный образец можно испытать только один раз и узнать все его характеристики при различных напряжениях прямыми наблюдениями невозможно, вводится следующая гипотеза о структуре определяющих функций:

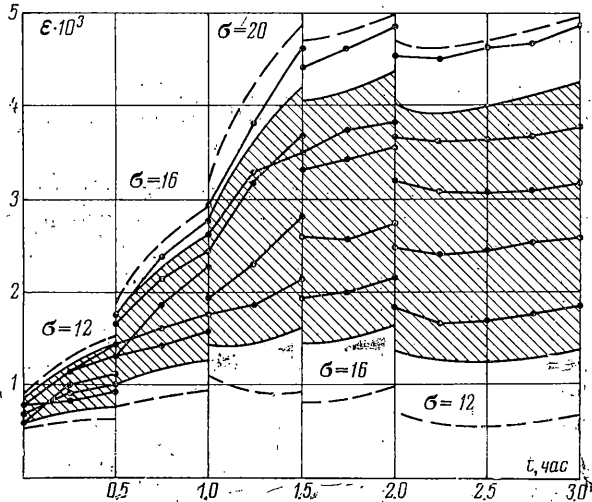
$$(2.3) \quad X(\sigma) = m_x(\sigma) + S_x(\sigma)U$$

где $X(\sigma)$ — любая из определяющих функций, m — символ математического ожидания, U — нормированная случайная величина.

Принимая выражение (2.3), можно рассчитывать на следующие результаты: если какой-либо образец при некотором напряжении имел большую «склонность», чем другие образцы, например к деформации вязкого течения, то это качество образца сохраняется и для других значений напряжения.

Соотношение (2.3) замыкает систему уравнений (2.2). Неслучайные функции вида $m_x(\sigma)$ и $S_x(\sigma)$, а также закон распределения случайной величины U (его можно считать нормальным) определяются по результатам испытаний при постоянном напряжении.

3. Следуя методу Монте-Карло [3], при помощи уравнений (2.2), (2.3) можно моделировать главную часть деформации при произвольном напряжении. Схема этой процедуры очень проста: для получения одной реализации достаточно по таблице нормальных величин [3] выбрать значения U для каждой определяющей функции вида (2.3) и потом решить уравнения (2.2). Заменяя затем значения U следующими числами из таблицы нормальных величин, нетрудно построить вторую, третью и т. д. реализации.



Фиг. 2

Для иллюстрации на фиг. 2 изображены пять реализаций, найденных методом Монте-Карло для сплава ЭИ 437Б (напряжение дано в $\text{кг}/\text{мм}^2$, накопленные деформации показаны через интервалы времени в 15 мин). В целях большей наглядности на главную часть деформации наложен шум, который моделировался как стационарная центрированная случайная функция с малым радиусом корреляции (см. фиг. 1, ϵ): $\epsilon_2(t_i) = S(\sigma(t_i)) U_i$, где $S(\sigma)$ — среднее квадратическое отклонение шума (вычисляется при $\sigma = \text{const}$), U_i — нормированные некоррелированные случайные величины (их значения выбирались по таблице нормальных величин).

Согласованность кривых на фиг. 2 с результатами реальных испытаний, выполненных в тех же условиях, оказалась хорошей. Расчетные и экспериментальные значения деформации при фиксированном времени, согласно критерию Вилькоксона, образовали одну генеральную совокупность.

Применение метода Монте-Карло является общим подходом к решению различных прикладных задач теории ползучести в вероятностной постановке.

4. При помощи стохастических уравнений может быть решена задача о прогнозировании полосы, в которую кривая деформирования попадает с заданной вероятностью.

Действительно, пренебрегая шумом, из уравнений (2.2) при определяющих функциях вида (2.3) нетрудно найти, что в случае активной на-

грузки

$$(4.1) \quad \varepsilon(t) \approx \sum_k \int_0^t [1 - e^{-\lambda_k(t-\tau)}] d\{a_k[\sigma(\tau)] + S_k[\sigma(\tau)] U_k\}$$

(здесь необходимо иметь в виду, что упругая деформация получается при $\lambda = \infty$, а деформация вязкого течения — при $\lambda \approx 0$). Из (4.1) получается выражение для средней деформации

$$(4.2) \quad \langle \varepsilon(t) \rangle = \sum_k \int_0^t [1 - e^{-\lambda_k(t-\tau)}] da_k[\sigma(\tau)]$$

и дисперсии деформации

$$(4.3) \quad S_\varepsilon^2(t) \approx \sum_k \left\{ \int_0^t [1 - e^{-\lambda_k(t-\tau)}] dS_k[\sigma(\tau)] \right\}^2$$

Случай произвольного напряжения отличается от рассмотренного тем, что при уменьшении нагрузки возможно «отключение» некоторых компонент η_{2k} [1], после чего соответствующие слагаемые в (4.2) и (4.3) становятся постоянными.

Для краткости эти подробности в статье не рассматриваются.

Результаты вычислений с учетом отключения деформации вязкого упрочнения показаны на фиг. 2. Расчетная полоса разброса шириной $6S_\varepsilon$ (доверительная вероятность $\beta = 0.997$) показана пунктиром; аналогичная полоса шириной $4S_\varepsilon$ ($\beta = 0.954$) выделена штриховкой. Прогноз разброса хорошо согласуется и с расчетными, и с опытными кривыми.

Аналогично можно рассмотреть задачу о прогнозировании полосы разброса для напряжений, когда полная деформация задана в виде неслучайной

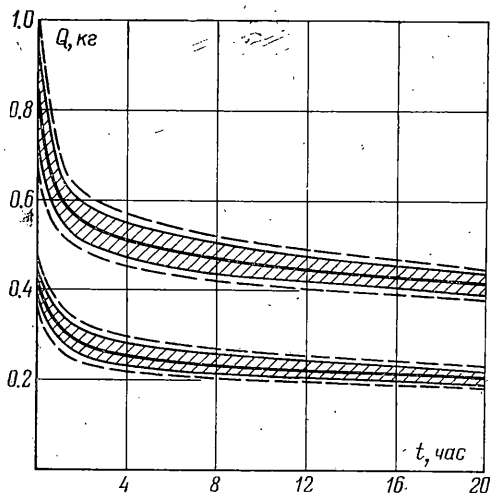
функции. Здесь для получения аналитических решений удобно использовать метод линеаризации [2].

Пусть, например, деформация вязкого упрочнения отсутствует и, кроме того, $a_k(\sigma) = a_k f(\sigma)$. Тогда среднее значение напряжения по методу линеаризации определяется как решение нестохастического уравнения (4.2)

$$(4.4) \quad \langle \sigma(t) \rangle \approx \varphi(t, \lambda_k, a_k)$$

С другой стороны, равенство (4.4) можно истолковать как следствие стохастического соотношения

$$\sigma(t) = \varphi(t, \lambda_k, A_k)$$



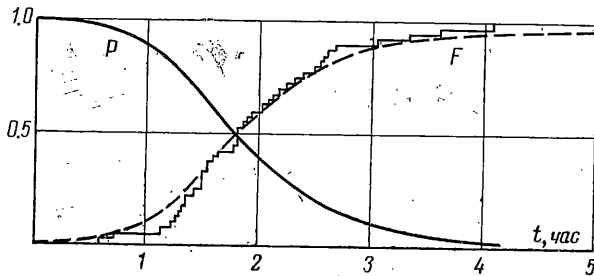
Фиг. 3

отсюда

$$(4.5) \quad S_{\sigma}^2(t) \approx \sum_i \left[\frac{\partial \varphi(t, \lambda_n, a_k)}{\partial a_i} S_i \right]^2$$

причем средние квадратические отклонения S_i по-прежнему могут зависеть от $\langle \sigma \rangle$.

Согласно формулам (4.4), (4.5), нетрудно построить полосу разброса для напряжений. На фиг. 3 приведены результаты таких вычислений для случая релаксации напряжения в поливинилхлоридном пластике (см. [4]); обозначения полос соответствуют фиг. 2). Располагая достоверными полосами типа приведенных на фиг. 2, 3, можно делать более обоснованные выводы о работоспособности изделий, чем это позволяют обычные уравнения ползучести.



Фиг. 4

5. Стохастические уравнения (2.2) дают возможность рассмотреть важную для приложений задачу о расчете кривой надежности изделия, работающего с ограничением по деформации.

Пусть, например, изделие эксплуатируется при постоянном напряжении и скорость ползучести уже стабилизировалась, т. е.

$$(5.1) \quad \varepsilon = C + Vt$$

где C и V — случайные величины.

Если изделие становится неработоспособным при $\varepsilon = h$, то момент его выхода из строя, согласно (5.1), представляет собой случайную величину

$$(5.2) \quad T = (h - C) / V$$

Вероятность безотказной работы за время t

$$(5.3) \quad P(t) = 1 - F(t)$$

где $F(t)$ — функция распределения для T .

Закон распределения $F(t)$ можно вычислить, следуя обычным методам теории вероятностей [2]. Считая, что C и V независимы и имеют нормальное распределение, после некоторых преобразований можно получить следующий результат:

$$(5.4) \quad F(t) \approx \int_0^x \frac{x}{y} \exp\left(x^2 - \frac{1 + \beta^2}{\gamma^2}\right) d\tau, \quad x = \frac{\tau + \alpha\beta}{\gamma\sqrt{\tau^2 + \alpha^2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{\pi}(\tau^2 + \alpha^2)}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{S_c}{S_v}, \quad \beta = \frac{S_c m_v}{S_v(h - m_c)}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{2} S_c}{h - m_c}$$

На фиг. 4 приведены результаты расчетов для сплава ЭИ 437Б при $\sigma=16 \text{ кг/мм}^2$ и $h=0.0025$. Пунктиром показана кривая (5.4); ступенчатая линия отвечает статистической функции распределения, построенной по результатам 40 испытаний. Согласованность расчетной и экспериментальной кривой оказалась хорошей (в этом можно убедиться, например, с помощью критерия Колмогорова). Наконец, сплошная гладкая линия на фиг. 4 выражает кривую надежности (5.3).

Целесообразность подобных расчетов очевидна: прогноз срока службы, согласно осредненной кривой в этих условиях, дает 1.75 час, но надежность при этом составляет лишь 0.53.

Аналогичная задача может быть сформулирована и относительно напряжений. Если, например, в релаксирующем элементе конструкции напряжение не должно быть ниже заданного уровня h , то момент утраты работоспособности тоже будет случайным. Надежность элемента к моменту времени, определяемому по осредненной кривой, на пологом участке линии релаксации будет составлять всего лишь около 0.5. Например, для поливинилхлоридного пластика при $h=0.5 \text{ кг}$ средний срок службы равен 304 мин, а при $t=128 \text{ мин}$ надежность составляет лишь 0.975 (см. фиг. 3).

Поступила 22 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарин Ю. П. Об одном обобщении метода разделения деформации в теории ползучести. Изв. АН СССР: МТТ, 1971, № 3.
2. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
3. Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболев И. М., Срагович В. Г., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1962.
4. Самарин Ю. П., Сорокин О. В. О ползучести поливинилхлоридного пластика при переменных нагрузках. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2.