

УДК 539.374

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

А. М. ПРОЦЕНКО

(Москва)

Рассматриваются краевые задачи упруго-идеально-пластического тела при ассоциированном законе течения. Для случая, когда нагрузка изменяется пропорционально одному параметру, предложен принцип минимума упругого потенциала самонапряжения. С помощью этого принципа рассмотрен ряд краевых задач, в том числе при смешанных краевых условиях. Рассмотрены плоская задача, защемленная пластинка и оболочка вращения. Дан способ разделения краевых условий для смешанных задач. Все задачи приводятся к каноническому виду задачи квадратичного программирования — определение минимального расстояния от начала координат до некоторой выпуклой области, задаваемой условиями пластичности.

Задача о предельном равновесии упруго-пластического тела, нагружаемого пропорционально некоторому параметру p , сводится к экстремальной краевой задаче [1]. При этом можно получить единственное поле напряжений. Здесь подобный подход распространяется на состояния ниже предельного и для определенных режимов сложного нагружения.

Принимаются следующие основные гипотезы: пластическое деформирование происходит без упрочнения и следует ассоциированному закону течения; изотропность сохраняется при любой программе нагружения; поверхность пластичности ограничивает выпуклую область в пространстве напряжений и регулярна почти всюду; деформации и перемещения считаются малыми.

Определения: а) нагружение считается условно простым, если вся внешняя нагрузка изменяется пропорционально одному параметру; б) нагружение считается условно сложным, если состоит из конечного числа различных условно простых нагружений. При условно простом нагружении в некоторых областях тела действительное нагружение может быть далеко не простым.

Для решения краевых задач при условно простом нагружении выдвинут принцип минимума упругого потенциала самонапряжения. При условно сложном нагружении происходит суммирование напряжений для каждого условно простого этапа. Рассматриваются различные случаи краевых условий для плоской задачи, пластинки и оболочки вращения.

1. Пусть упруго-пластическое тело имеет объем V с поверхностью S . На части поверхности S_0 задана внешняя нагрузка в виде pr_i ($i=1, 2, 3$), а на остальной части поверхности S_u заданы условия несмещаемости $u_i=0$ ($i=1, 2, 3$). Случай действия объемной нагрузки и смешанных условий на части поверхности $S_{\sigma u}$ в целях упрощения не рассматриваются, хотя их включение принципиальных трудностей не вызывает.

Обычная задача для упруго-пластического тела заключается в интегрировании системы уравнений, в которой одновременно с уравнениями равновесия, кинематическими и краевыми условиями участвуют уравнения течения. Интегрирование такой системы обычно связано с большим объемом вычислений, но, что самое неприятное, по мере приближения нагрузки к предельной, обусловленность системы ухудшается, а в предельном состоянии эта система превращается в неопределенную, что является признаком предельного состояния — образуется пластический кинематический механизм. Преодоление этих затруднений и сведение задачи к корректной, имеющей единственное решение (если оно существует), предлагается осуществлять следующим способом.

Поле напряжения при условно простом нагружении всегда можно представить в виде суммы упругого решения и самоуравновешенного

$\sigma(p) = ps + \rho(p)$. Здесь s — единичное упругое решение, удовлетворяющее на S_σ условиям $s_{ij}v_j = r_i$, а на S_u условиям несмещаемости; $\rho(p)$ — поле самонапряжения, удовлетворяющее на S_σ однородным условиям $\rho_{ij}v_j = 0$, а на S_u никаких условий нет. Тензоры s и ρ удовлетворяют уравнениям равновесия $s_{ij,j} = \rho_{ij,j} = 0$. Все поля ρ образуют некоторое линейное многообразие W в пространстве напряжений. Вполне очевидно, что W можно считать нормированным и полным пространством.

Уравнения течения в этом случае записываются так

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = A_{ijkl}(s_{kl} + \tau_{kl}) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \tau = \frac{d\rho}{dp}, \quad \sigma^* = s + \tau$$

где A — тензор жесткости, $f(\sigma) \leq 0$ — условия пластичности, $\lambda \geq 0$ — параметр течения.

Предлагается экстремальный принцип: при условно простом нагружении упругий потенциал действительного поля самонапряжения — минимальный из всех допустимых.

Допустимые поля самонапряжений определяются условиями пластичности $f(ps + \rho) \leq 0$ для фиксированного значения нагрузки. Запишем упругий потенциал поля:

$$(1.2) \quad U(\rho) = \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} \rho_{ij} \rho_{kl} dV$$

Для действительного поля ρ^* , согласно предложенному принципу $U(\rho^*) = \inf U(\rho)$ для $\rho \in \Omega_p$, где $\Omega_p = \{\rho: \rho \in W, f(ps + \rho) \leq 0\}$.

В силу выпуклости условий пластичности и выпуклости вверх функционала $U(\rho)$, точка ρ^* (если она существует) единственная и определяется соотношением

$$(1.3) \quad \rho_{ij}^* = -\mu B_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad (B = A^{-1}, \mu \geq 0)$$

Здесь μ — обобщенный множитель Лагранжа и не тождествен множителю λ в (1.1).

Пусть H_A — энергетическое гильбертово пространство со скалярным произведением $(\sigma', \sigma'')_A = (\sigma'_{ij}, A_{ijkl} \sigma''_{kl})$. Если Ω_p определить в H_A , а не W , то это будет выпуклая и замкнутая область. В этих терминах предложенный принцип гласит, что в H_A действительное поле самонапряжения есть точка Ω_p , ближайшая к началу координат: $2U(\rho^*) = \|\rho^*\|_A^2 = \inf \|\rho\|_A^2$ для $\rho \in \Omega_p$.

Подобная формулировка весьма удобна при использовании принципа для решения конкретных задач.

Пусть θ_A — начало координат. Если $\theta_A \in \Omega_p$, то $\rho^* \equiv 0$, и никаких искажений в упругое решение не вносится ($\sigma = ps$). Если θ_A расположена на границе Ω_p , то это означает начало развития пластических деформаций. Если же $\theta_A \in \Omega_p \neq \phi$, то это указывает на развитие пластических деформаций. Случай $\Omega_p = \phi$ говорит о том, что нагрузка p выше предельной и нет никакого статически допустимого поля $\sigma(p)$. Для предельного значения p^* область Ω_p не пуста, так как всегда существует поле $\sigma(p^*)$ и, следовательно, поле $\rho(p^*) = \sigma(p^*) - p^*s$.

2. Для упруго-пластического тела, точнее для такой краевой задачи, существует ряд экстремальных принципов. Один из них — принцип Гринберга о минимуме упругого потенциала для скоростей напряжений $\|\sigma^*\|_A^2 = \inf \|\sigma^*\|_A^2$, где σ^* — возможная скорость напряжений, согласованная с законом течения [2].

Применяя этот принцип для $\sigma^* = s + \tau$ и учитывая, что, во-первых, $(s, \tau)_A = 0$ и, во-вторых, $\|s\|^2 = \inf \|s'\|_A^2$ как решение из теории упругости,

принцип Гринберга принимает такую форму: $\|\tau\|_{\Lambda^2} = \inf \|\tau'\|_{\Lambda^2}$, т. е. формулируется только в скоростях самонапряжения.

Если доказать, что из предложенного принципа следует принцип Гринберга и наоборот, то тем самым будет доказана равносильность принципа минимума упругой энергии самонапряжения другим экстремальным принципам для упруго-пластического тела.

То что из предложенного принципа следует принцип Гринберга, показывается легко. Для этого достаточно рассмотреть малые значения p и тогда $U(\rho) = p^2 U(\tau)$. Обратное доказательство сложнее. Пусть произошло малое изменение внешней нагрузки на величину $\varepsilon > 0$. Для напряжений $\sigma(\varepsilon) = \sigma^0 + \varepsilon(s + \tau)$ должны соблюдаться условия пластичности так же, как для σ^0

$$(2.1) \quad f(\sigma) = f^0 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (s_{ij} + \tau_{ij}) \leq 0, \quad f^0 = f(\sigma^0) \leq 0$$

Для принципа Гринберга можно записать обобщенный функционал Лагранжа

$$(2.2) \quad \Lambda = \frac{1}{2} (\tau, \tau)_{\Lambda} + \left(\lambda, f^0 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (s_{ij} + \tau_{ij}) \right)$$

Из условия для седловой точки следует $\partial \Lambda / \partial \tau_{ij} = 0$ или

$$(2.3) \quad \tau_{ij} = -\varepsilon \lambda B_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$$

Подстановка (2.3) в (2.2) и следующее условие для седловой точки ($\partial \Lambda / \partial \lambda \leq 0$) приводит к эквивалентному (2.1) неравенству

$$(2.4) \quad t(\lambda) = f^0 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} s_{ij} - \varepsilon^2 \lambda c \leq 0, \quad c = B_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$$

Здесь c — положительно определенная квадратичная форма.

Параметр λ определяется из условий дополняющей нежесткости $\lambda t(\lambda) = 0$, а именно

$$(2.5) \quad \lambda = [f^0 + \varepsilon u(s)] \varepsilon^{-2} c^{-1}, \quad u(s) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} s_{ij}$$

Здесь следует учесть, что $f^0 \leq 0$ и если $u(s) < 0$, то это будет разгрузка. Очевидно, что выход на поверхность пластичности может произойти и в случае если f^0 достаточно мало, но не равно нулю, т. е. $-f^0 \leq k \varepsilon u(s)$ при $u(s) \geq 0$ и $0 \leq k \leq 1$. В остальных случаях $\lambda = 0$, и пластичность не возникнет при заданных приращениях, характеризуемых величиной ε . Окончательно получается

$$\lambda = \gamma \varepsilon^{-1} c^{-1} u(s), \quad \gamma = 1 - k \geq 0, \quad u(s) \geq 0$$

Если этот результат подставить в выражение для скорости изменения упругого потенциала самонапряжения, то в результате получается

$$(2.6) \quad U^*(\rho^*) = (\rho^*, \tau)_{\Lambda} = \int \mu B_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} A_{ijst} B_{stuv} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{uv}} c^{-1} u(s) dv = \int \mu \gamma u(s) dv$$

Здесь интегрирование распространяется только на тот объем, где $u(s) \geq 0$. Следовательно, $U^*(\rho^*) \geq 0$, а это означает, что $U(\rho^*)$ есть неубывающая функция параметра нагрузки.

С другой стороны, (2.3) показывает, что скорость самонапряжения пропорциональна скорости пластической деформации ϵ'' . Отсюда получается

$$U^*(\rho^*) = (\rho^*, \tau)_A = (\rho^*, -\gamma \epsilon'')$$

При помощи постулата Друккера получаем соотношение $\rho_{ij}^* \epsilon_{ij}'' \geq \rho_{ij} \epsilon_{ij}''$, где $\rho \in \Omega_p$ и ϵ'' — скорости пластической деформации, соответствующие полю $\sigma = ps + \rho^*$. А так как p и s фиксированы, то ϵ'' соответствует полю ρ^* . Но тогда $U^*(\rho^*)$ минимальна по сравнению с остальными допустимыми $\rho \in \Omega_p$ и тем самым скорость изменения потенциала самонапряжения минимальна. Но эта же скорость неотрицательна, следовательно сама величина $U(\rho^*)$ минимальна. Таким образом, из принципа Гринберга получен принцип минимума потенциала самонапряжения.

Конечно, принцип Гринберга применим при любом нагружении, а не только простом, как предложенный принцип. Однако это преимущество в большинстве случаев только кажущееся, так как интегрирование процесса нагружения почти всегда производится с использованием линеаризации, а следовательно, замены сложного нагружения условно сложным.

3. Первой иллюстрацией применения принципа минимума потенциала самонапряжения является плоская задача для области S с контуром Γ , на котором заданы условия в напряжениях. Условия в перемещениях отсутствуют.

Пусть $\Phi \in W_0^2$ — элемент пространства С. Л. Соболева с условиями на Γ : $\Phi = \partial\Phi / \partial\nu = 0$ [3] (для простоты S считается односвязной), F — функция напряжений единичной упругой задачи. Потенциал самонапряжения записывается так:

$$(3.1) \quad 2U(\Phi) = \int_S (\Delta\Phi)^2 dS = \int_S \Phi \Delta^2 \Phi dS$$

где Δ — оператор Лапласа.

Условия пластичности можно представить неравенством

$$(3.2) \quad f(p, \Phi_{,11}, \Phi_{,22}, \Phi_{,12}) \leq 0$$

Эти условия выделяют выпуклую и замкнутую область $\Omega_p \subset H_A \subset W_0^2$, где энергетическое пространство определено скалярным произведением $(\varphi, \psi)_A = (\Delta\varphi, \Delta\psi)$. Очевидно, что при сделанных предположениях точка Φ^* единственная, для которой $U(\Phi^*) = \inf U(\Phi)$, $\Phi \in \Omega_p$.

Пусть $\{\varphi_i\}$ — нормированные собственные функции бигармонического оператора при граничных условиях на всем контуре $\varphi_i(\Gamma) = \partial\varphi_i(\Gamma) / \partial\nu = 0$ (первая краевая задача). Тогда функционал (3.1) записывается как квадрат нормы

$$(3.3) \quad 2U(\Phi) = \|y\|^2$$

где $y \in l^2$, а функция Φ раскладывается в ряд по собственным функциям оператора

$$\Phi = \sum_i y_i \varphi_i, \quad (\varphi_i, \varphi_j)_A = \delta_{ij}$$

Условия пластичности (3.2) записываются так:

$$(3.4) \quad f(p, y, x) \leq 0, \quad x \in S$$

Это будет континуальная система ограничений для счетного числа переменных. Здесь x — координата точки в S .

Такую форму задачи можно считать канонической и, по-видимому, наиболее простой. Рассмотренный случай краевых условий также наиболее простой, так как связан с определением собственных функций первой краевой задачи для бигармонического оператора.

4. В задаче со смешанными краевыми условиями квадратичный функционал потенциала самонапряжения не приводится к виду (3.1) из-за произвольности граничных условий для Φ на Γ_u . Если попытаться сразу решать задачу о минимуме $U(\Phi) = 1/2 \|\Phi\|_A^2$, то здесь пришлось бы, помимо собственно задачи минимизации квадратичного функционала в области S , решать задачу об оптимальном назначении граничных условий на Γ_u . Последнее обстоятельство чрезвычайно усложняет всю проблему. Подобные осложнения можно преодолеть следующим образом. Пусть функция Ψ — бигармоническая и удовлетворяет граничным условиям

$$(4.1) \quad \Psi(\Gamma) = g(\Gamma), \quad \partial\Psi(\Gamma)/\partial\nu = q(\Gamma)$$

где $g(\Gamma)$ — гладкая на Γ функция и $g(\Gamma_0) = 0$, $q(\Gamma)$ — непрерывная на Γ функция и $q(\Gamma_0) = 0$. В остальном на Γ_u функции g и q — произвольные.

В силу бигармоничности Ψ для любой функции $\Phi^0 \in W_0^2$ с условиями $\Phi^0(\Gamma) = \partial\Phi^0(\Gamma)/\partial\nu = 0$ (на всем контуре Γ) имеет место энергетическая ортогональность

$$(4.2) \quad (\Psi, \Phi^0)_A = \int_S \Phi^0 \Delta^2 \Psi \, dS = 0$$

Все функции самонапряжения представляются в виде суммы

$$(4.3) \quad \Phi = \Psi + \Phi^0$$

Тогда, благодаря свойству (4.2), потенциал самонапряжения разделяется

$$(4.4) \quad 2U(\Phi) = \|\Psi\|_A^2 + \|\Phi^0\|_A^2$$

Если для первого слагаемого применить формулу Грина, то можно записать

$$(4.5) \quad \|\Psi\|_A^2 = (\Delta\Psi, \Delta\Psi) = (\Psi, \Delta^2\Psi) + \int_{\Gamma} \left(q\Delta\Psi - g \frac{\partial}{\partial\nu} \Delta\Psi \right) d\Gamma$$

В силу выбора функций g и q этот интеграл можно вычислять только на Γ_u , при этом Ψ зависит только от g и q , так как $(\Psi, \Delta^2\Psi) = 0$.

В полученном виде функционала (4.4) является суммой функционала, использованного в п. 3, и функционала, определенного только на контуре

$$(4.6) \quad 2U(\Phi) = \|\Phi^0\|_A^2 + \int_{\Gamma_u} \left(q\Delta\Psi - g \frac{\partial}{\partial\nu} \Delta\Psi \right) d\Gamma$$

По-видимому, дальнейшие преобразования этого функционала должны в большей степени отражать конкретные краевые условия и форму контура, нежели общие приемы.

5. После того как рассмотрено условно простое нагружение, переход к условно сложному тривиален. Пусть нагружение состоит из условно простых этапов, так что нагрузка на каждом этапе определяется рекуррентной зависимостью $P^\alpha = P^{\alpha-1} + p r^\alpha$, $P^0 = 0$, где P^α — вектор нагрузки на этапе, p — параметр нагрузки, причем в начале этапа $p = 0$, а в конце $p = 1$.

Ничто не препятствует тому, чтобы поле напряжений представить аналогичным образом

$$(5.1) \quad \sigma^\alpha = \sigma^{\alpha-1} + p s + \rho(p)$$

где $\sigma^{\alpha-1}$ — напряжения к концу этапа $\alpha-1$.

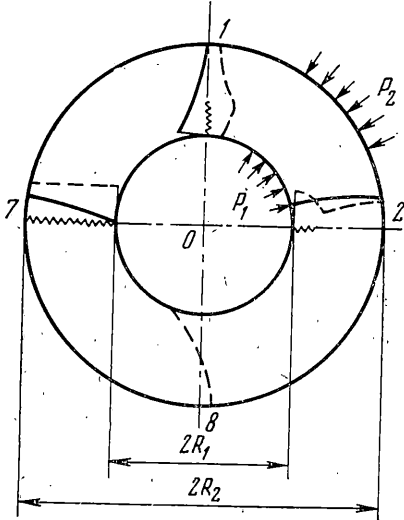
Условия пластичности преобразуются к виду

$$(5.2) \quad f(\sigma^\alpha) = f(\sigma^{\alpha-1}, \rho, p) \leq 0$$

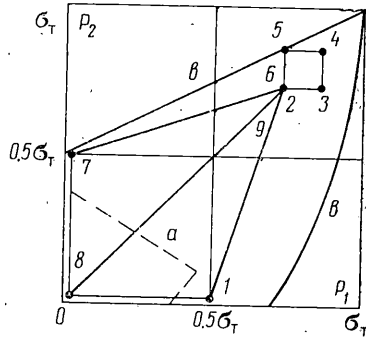
Функционал для потенциала самонапряжения не изменяется. Ниже приводится ряд конкретных примеров.

Кольцо под внешним и внутренним давлением (фиг. 1).

Пусть s_r^ν и s_θ^ν — напряжения из решения задачи Ляме, когда при $\nu=1$ $s_r^1(R_1) = -1$, $s_r^1(R_2) = 0$, а при $\nu=2$ $s_r^2(R_1) = 0$ и $s_r^2(R_2) = -1$. Пусть ρ_r и ρ_θ — самонапряжения,



Фиг. 1



Фиг. 2

удовлетворяющие уравнению равновесия $\rho_\theta = (r\rho_r)'$ и граничным условиям $\rho_r(R_1) = \rho_r(R_2) = 0$. Можно ввести разрешающую функцию

$$(5.3) \quad \rho_r = r^{-1}\Phi, \quad \rho_\theta = \Phi', \quad \Phi(R_1) = \Phi(R_2) = 0$$

Напряжения представляются так:

$$(5.4) \quad \sigma_r^\alpha = \sigma_r^{\alpha-1} + p(k_1^\alpha s_r^{\alpha-1} + k_2^\alpha s_r^\alpha) + r^{-1}\Phi, \quad \sigma_\theta^\alpha = \sigma_\theta^{\alpha-1} + p(k_1^\alpha s_\theta^{\alpha-1} + k_2^\alpha s_\theta^\alpha) + \Phi'$$

где k_1^α и k_2^α — относительные интенсивности прикладываемых давлений P_1 и P_2 на этапе α , причем это есть конечные значения приращений давлений в конце этапа нагружения.

Запишем потенциал самонапряжения с учетом граничных условий

$$(5.5) \quad 2U(\Phi) = \int_{R_1}^{R_2} r[r^{-2}\Phi^2 + (\Phi')^2] dr = \int_{R_1}^{R_2} \Phi(r^{-1}\Phi - \Phi' - r\Phi'') dr$$

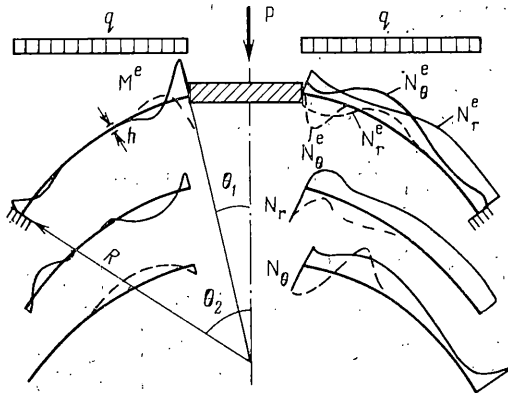
Теперь задача заключается в определении собственных функций оператора, содержащегося в круглых скобках подынтегрального выражения, разложении Φ по этим функциям и подстановке результата в условия пластичности. Для конкретного решения были приняты условия пластичности Треска.

На фиг. 2 показана траектория нагружения: линия a ограничивает область упругой работы, линия b — предельная линия. На фиг. 1 показаны распределения напряжений на ряде этапов, где участки, помеченные волнистой линией, указывают на зоны образования пластических деформаций. Кроме того, σ_r — сплошные линии, а σ_θ — пунктир, определенные численным способом с использованием десяти собственных функций. Для показанной программы нагружения этап 3 (движение из точки 2 в точку 3), этапы 6, 8 и 9 не сопровождались возникновением дополнительных полей самонапряжения. Это значит, что на этих этапах приращение напряжений произошло только за счет упругих деформаций, что фактически вывело кольцо из пластического состояния.

Защемленная круглая пластинка. Пусть пластинка радиуса R , нагруженная равномерной нагрузкой, имеет единичное упругое решение

$$(5.6) \quad M_r^e = [(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2]/16, \quad M_\theta^e = [(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]/16$$

Самоуравновешенные изгибающие моменты, кроме условия конечности и симметрии в центре, не имеют краевых условий. Однако эти моменты можно представить как сумму самоуравновешенных моментов для шарнирно-опертой пластинки ($M_r^\circ(R)=0$) и моментов, вызванных опорным моментом x , приложенным на шарнирном крае. Очевидно, что $M_r^i(r) = M_\theta^i(r) = x$ есть те же изгибающие моменты, которые определяются упругой задачей. Для определения моментов M_r° или M_θ° можно воспользоваться функцией Φ , как в предыдущем примере, с граничным условием



Фиг. 3

$\Phi(R)=0$, т. е. $M_r^\circ = r^{-1}\Phi$, $M_\theta^\circ = \Phi'$, однако это накладывает на Φ дополнительные условия $\Phi(r)/r \rightarrow \Phi'(r)$ при $r \rightarrow 0$. Чтобы избавиться от этого, вводится функция Φ

$$(5.7) \quad M_r^\circ = \Phi, \quad M_\theta^\circ = (r\Phi)', \quad \Phi(R) = 0$$

Тогда получается окончательно

$$(5.8) \quad M_r = pM_r^e + \Phi + x, \quad M_\theta = pM_\theta^e + (r\Phi)' + x$$

Потенциал самонапряжения записывается так:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} 2U(x, \Phi) &= (1-\nu)R^2x^2 + \int_0^R [\Phi^2 + (r\Phi)'^2 - 2\nu\Phi(r\Phi)'] r dr = \\ &= (1-\nu)R^2x^2 + \int_0^R \Phi [r(2\Phi - r\Phi' - r^2\Phi'')] dr \end{aligned}$$

Приведение задачи к канонической форме заключается в определении собственных функций оператора, содержащегося внутри квадратных скобок подынтегрального выражения.

Сферическая оболочка (фиг. 3). Здесь также отсутствуют граничные условия для разрешающей функции уравнений самонапряжения

$$(5.10) \quad M_\theta = \Phi, \quad N_\theta = R^{-1} \operatorname{ctg} \theta \Phi', \quad N_\varphi = R^{-1} \Phi''$$

Для этой задачи отделение краевых условий от самонапряжений на поверхности оболочки производится аналогично предыдущему случаю.

Пусть M_θ^i , N_θ^i и N_φ^i — единичные упругие решения, а M_θ^i , N_θ^i , N_φ^i ($i=1, 2, 3, 4$) — единичные упругие решения оболочки с вырезанной шайбой и лишенной заделки на опорном контуре.

При этом внутренние силы определяются системой четырех функций φ_i ($i=1, 2, 3, 4$).

$$(5.11) \quad M_\theta^i = \varphi_i, \quad N_\theta^i = R^{-1} \operatorname{ctg} \theta \varphi_i', \quad N_\varphi^i = R^{-1} \varphi_i''$$

Для этих функций краевые условия задачи на обоих концах $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ такие, что $\varphi_1(\theta_1) = \varphi_2'(\theta_1) = \varphi_3(\theta_2) = \varphi_4'(\theta_2) = 1$, а остальные значения φ_i и φ_i' на концах равны нулю, например, $\varphi_1'(\theta_1) = \varphi_1(\theta_2) = \varphi_1'(\theta_2) = 0$ и т. д.

Это означает, что φ_1 и φ_3 задают упругое распределение внутренних сил при действии единичных краевых моментов, а φ_2 и φ_4 — то же самое, но при действии единичных нормальных сил на краях. Здесь в силу уравнений равновесия вертикальная равнодействующая равна нулю.

Гладкая функция Φ_0 с условиями на краях $\Phi_0 = \Phi_0' = 0$ также задает поле самонапряжений с нулевыми моментами и нормальными силами на краях. В итоге полная система самонапряжения является суммой всех возможных самонапряжений

$$\Phi = \sum_{i=1}^4 z_i \varphi_i + \Phi_0$$

Потенциал самонапряжения записывается при помощи этих функций

$$(5.12) \quad 2U(\Phi) = (x, Gx) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Phi_0 L \Phi_0 d\theta$$

где (x, Gx) — положительно определенная квадратичная форма, L — дифференциальный оператор четвертого порядка.

$$(5.13) \quad L\Phi_0 = \sin \theta [\beta^4 \Phi_0 + \Phi_0' (1 + \operatorname{cosec}^2 \theta) + \Phi_0'' (2\nu + \operatorname{cosec}^2 \theta) + \Phi_0''' 2(1-\nu) \operatorname{ctg} \theta + \Phi_0^{IV} (1-2\nu \operatorname{ctg} \theta)]$$

Здесь $\beta^4 = 12(1-\nu^2)R^2 h^{-2}$ — декремент затухания краевого эффекта, h — толщина оболочки.

Пусть $\{\psi_i\}$ — система нормированных собственных функций оператора L , тогда функционал (5.12) приводится к виду

$$(5.14) \quad 2U(\Phi) = \sum_{i=1}^4 z_i^2 + \|y\|^2$$

где $x = Tz$, а $T^T G T = E$ — нормальное преобразование квадратичной формы, и

$$\Phi_0 = \sum_i y_i \lambda_i^{-1/2} \psi_i$$

разложение по собственным функциям оператора L .

Условия пластичности записываются уже относительно новых переменных

$$(5.15) \quad f(M_\theta, N_\theta, N_\phi) = f(p, z, y, \theta) \leq 0, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

Подобная задача численно была решена для оболочки. Распределение внутренних сил показано на фиг. 3, где верхний индекс e означает единичное упругое состояние, сплошная линия — эпюры внутренних сил при распределенной нагрузке, близкой к предельной, пунктирная линия — то же самое при сосредоточенной в центре силе.

Можно заметить, что из-за пластических деформаций характер распределения внутренних сил существенно изменяется, особенно мембранные силы вблизи центральной шайбы. Для распределенной нагрузки с ее ростом напряженное состояние приближается к безмоментному, которое по условиям закрепления является допустимым и может описывать предельное состояние.

Автор благодарит Ю. Н. Работнова за полезное обсуждение результатов этой работы на семинаре МГУ.

ЛИТЕРАТУРА

Поступила 13 XII 1972

1. Проценко А. М. Экстремальные краевые задачи в теории пластичности. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5.
2. Greenberg H. Complementary minimum principles for an elastic-plastic material. Quart. Appl. Math., 1949, vol. 7, No. 1.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.