

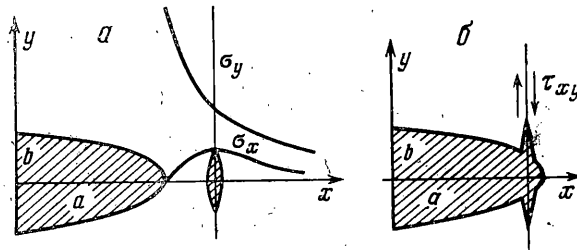
УДК 539.375

ТОРМОЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА

А. Н. ПОЛИЛОВ

(Москва)

В конце тонкой трещины, образующейся в линейно-упругом материале, напряжения неограниченны. Материалы с малой зоной пластичности вблизи кончика трещины являются поэтому хрупкими, крайне чувствительными к наличию трещин. Однако композит из хрупких компонент при наличии между ними относительно непрочной поверхности раздела может быть практически нечувствителен к надрезам и трещинам. По мнению Гордона (см. [1]) причина вязкого поведения таких неоднородных материалов заключается в наличии перед фронтом трещины растягивающих напряжений, параллельных трещине, которые могут разорвать поверхность раздела, и вновь образованная трещина явится тормозом для распространения первоначальной (фиг. 1, а). В работе [1] был проведен численный расчет поля напряжений около



тонкого эллиптического отверстия в изотропной плоскости, на основании которого получено отношение между наибольшим напряжением σ_y и максимальным напряжением σ_x на оси x .

Более детальное аналитическое рассмотрение поля напряжений около тонких надрезов в изотропном и ортотропном случаях показало, что наибольшее напряжение σ_x достигается не во внутренней точке области, а на контуре отверстия. Кроме того, выяснено, что основную опасность представляют касательные напряжения τ_{xy} , достигающие наибольшего значения также на контуре отверстия, поэтому торможение трещины происходит от расслаивания под действием касательных усилий и схематически имеет вид, изображенный на фиг. 1, б.

1. Тонкое эллиптическое отверстие в ортотропной плоскости. Рассматривается растяжение плоскости с эллиптическим отверстием, имеющим полуоси a и b . Согласно [2], решение находится в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Phi_k'(z_k), & \sigma_y &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Phi_k'(z_k) \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Phi_k'(z_k), & z_k &= x + \mu_k y\end{aligned}$$

где Φ_1, Φ_2 — функции напряжений, μ_k — корни характеристического уравнения, получаемого из уравнения совместности деформаций, которое для ортотропного случая при плоско-напряженном состоянии имеет вид

$$\mu^4/E_1 + (1/G_{12} - 2\nu_{21}/E_1)\mu^2 + 1/E_2 = 0$$

«Технические постоянные» выбираются обычным образом (см. [2]): E_1 — модуль упругости в направлении x , E_2 — в направлении y , G_{12} — модуль

сдвига в плоскости xy , ν_{21} — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сужение в направлении x , при растяжении в направлении y . Практически для всех известных ортотропных материалов комплексные параметры являются чисто мнимыми $\mu_k = i\beta_k$, $k=1, 2$ и их легко выразить через «технические постоянные»

$$(1.1) \quad \beta_{1,2} = 2^{-1/2} [E_1 / G_{12} + 2\nu_{21} \pm \sqrt{(E_1 / G_{12} - 2\nu_{21})^2 - 4E_1 / E_2}]^{1/2}$$

В случае равномерного растяжения в направлении малой полуоси b , $\sigma_y^\infty = p$, функции напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_1'(z_1) &= {}^{1/2}pa(a - \beta_1 b)^{-1} \beta_2 (\beta_1 - \beta_2)^{-1} [z_1(z_1^2 - a^2 + \beta_1^2 b^2)^{-1/2} - 1] \\ \Phi_2'(z_2) &= -{}^{1/2}pa(a - \beta_2 b)^{-1} \beta_1 (\beta_1 - \beta_2)^{-1} [z_2(z_2^2 - a^2 + \beta_2^2 b^2)^{-1/2} - 1] \end{aligned}$$

Для нахождения наибольших напряжений на контуре полагается

$$(1.2) \quad z_k = a \cos \alpha + i\beta_k b \sin \alpha \quad (k=1, 2)$$

Если считать трещину тонкой, т. е. положить $b/a = \varepsilon$ малой величиной, выражения для максимальных напряжений запишутся в виде

$$\sigma_{ij*} = \text{const} / \varepsilon + O(1)$$

где индекс звездочка обозначает наибольшее напряжение. Для малых ε основной вклад вносит первый член, поэтому будут существовать пределы отношений наибольших напряжений при $\varepsilon \rightarrow 0$, которые определяют характер разрушения вблизи кончика трещины. Наибольшее растягивающее напряжение достигается на контуре при $\alpha = 0$ и имеет вид

$$(1.3) \quad \sigma_{y*} = p(\beta_1 + \beta_2) (\varepsilon \beta_1 \beta_2)^{-1} + p + O(b/a)$$

С ростом анизотропии, т. е. с уменьшением отношения E_1 / E_2 , β_1 остается конечной величиной ($\beta_1 \rightarrow (E_1 / G_{12} - 2\nu_{21})^{1/2} + O(E_1 / E_2)$), а β_2 становится малой величиной ($\beta_2 \sim (E_1 / E_2)^{1/2}$). Как видно, с ростом анизотропии σ_{y*} растет, но чем меньше ε , чем тоньше щель, тем меньше зона влияния анизотропии на σ_y . Если считать трещину разрезом вдоль оси x , напряжения σ_y вдоль оси y вообще не будут зависеть от упругих свойств материала. Напряжение σ_x имеет единственный максимум на оси x при $x_*^2 = a^2 + b^2 \beta_1^{2/3} \beta_2^{2/3} (\beta_1^{2/3} + \beta_2^{2/3})$.

Обозначая $t = \beta_1 / \beta_2$, можно записать максимальное значение в виде

$$(1.4) \quad \sigma_{x*} = pt(\beta_1 + \beta_2) \varepsilon^{-1} (t^{1/3} + t^{2/3} + 1)^{-3/2} + O(1)$$

Следовательно

$$(1.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_{x*}}{\sigma_{y*}} \right) = \frac{t\beta_1\beta_2}{(t^{1/3} + t^{2/3} + 1)^{3/2}}$$

С ростом анизотропии, т. е. с ростом t , это отношение стремится к нулю. Зависимость этого отношения от t имеет единственный максимум в случае изотропии при $t=1$, равный $1/3\sqrt{3} \approx 0,192$. Однако наибольшее значение σ_x достигается на контуре отверстия. Используя (1.2), σ_x на контуре запишется в виде

$$(1.6) \quad \sigma_x^0 = p \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \left[\frac{\beta_1}{a - \beta_1 b} \left(\frac{\beta_1 b}{\beta_1^2 b^2 \cos^2 \alpha + a \sin^2 \alpha} - 1 \right) - \frac{\beta_2}{a - \beta_2 b} \left(\frac{\beta_2 b}{\beta_2^2 b^2 \cos^2 \alpha + a \sin^2 \alpha} - 1 \right) \right]$$

Анализ порядков малости числителя и знаменателя относительно ε приводит к выводу, что надо искать α_* , при котором σ_x^0 достигает максимального значения на контуре σ_{x*}^0 , из условия

$$(1.7) \quad \cos^2 \alpha_* = 1 - k\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

Условие $\partial \sigma_x^0 / \partial k = 0$, дает $k = \beta_1 \beta_2$

$$(1.8) \quad \sigma_{x*}^0 = p \beta_1 \beta_2 / \varepsilon (\beta_1 + \beta_2) + O(1)$$

$$(1.9) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_{x*}^0 / \sigma_{yx}) = \beta_1 \beta_2 t / (1+t^2)^2$$

Нетрудно показать, что для любых ортотропных материалов $\sigma_{x*}^0 > \sigma_{x*}$. Отношение (1.9) имеет единственный максимум при $t=1$, равный 0.25, и убывает до нуля с ростом анизотропии. Для сильно анизотропных материалов при фиксированном ε напряжение σ_{x*}^0 становится относительно малым и слабо влияет на образование продольных трещин при растяжении образца с поперечным надрезом. Касательное напряжение τ_{xy} также достигает наибольшего значения на контуре отверстия при

$$(1.10) \quad \cos^2 \alpha = 1 - \varepsilon^2 (-\beta_1^2 - \beta_2^2 + \sqrt{\beta_1^4 + \beta_2^4 + 14\beta_1^2 \beta_2^2}) / 6 + o(\varepsilon^2)$$

$$(1.11) \quad \tau_{xy*} = \frac{p}{\varepsilon} \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{t(1+t) (-1-t^2 + \sqrt{t^4 + 14t^2 + 1})^{1/2}}{10t^2 - t^4 - 1 + (1+t^2)\sqrt{t^4 + 14t^2 + 1}} + O(1)$$

Удается показать, что зависимость τ_{xy*} от t для фиксированного ε имеет единственный максимум в случае изотропии $\tau_{xy*} \approx p3\sqrt{3}/8\varepsilon$ при $t=1$.

С ростом анизотропии τ_{xy*} убывает, но стремится к конечному пределу $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{xy*} = p/2\varepsilon$.

Наибольшие касательные напряжения, найденные для изотропного случая, при фиксированной форме отверстия являются верхней оценкой для наибольших касательных напряжений в любом ортотропном материале с погрешностью не более 20%. (Можно отметить, что формулы (1.4)–(1.11) не меняют своего вида при замене β_1 на β_2). Отношение $\sigma_{x*}^0 / \tau_{xy*}$ имеет порядок $1/t$ для больших t . Следовательно, напряженное состояние около кончика трещины в сильно анизотропном материале, например в однонаправленном стеклопластике или углепластике, когда трещина расположена поперек волокон, является близким к растяжению вдоль волокон и сдвигу. Напряжения поперек волокон можно не учитывать. Расслаивание происходит под действием касательных усилий. В ортогонально армированном квазиизотропном материале, когда направления армирования совпадают с осями x и y , напряжение σ_x воспринимается относительно прочными волокнами, и эти напряжения также можно не учитывать.

2. Соотношения между наибольшими напряжениями — характеристика материала. Расслаивание вдоль волокон вблизи трещины будет предшествовать разрыву от нормальных усилий σ_{y*} при условии, что касательные усилия τ_{xy*} с ростом нагрузки раньше достигнут предела прочности на сдвиг $[\tau]$, чем σ_{y*} достигнет предела прочности на растяжение $[\sigma]$, т. е.

$$(2.1) \quad \tau_{xy*} / \sigma_{y*} > [\tau] / [\sigma]$$

Прочность границы раздела на сдвиг $[\tau]$ и прочность на растяжение $[\sigma]$ есть характеристики материала. Чтобы показать, что отношения наибольших напряжений слабо зависят от формы отверстия и от способа нагружения, был рассмотрен ряд задач: растяжение плоскости с эллиптическим отверстием двумя сосредоточенными силами, приложенными симметрично к берегам отверстия, изгиб широкого бруса с эллиптическим отверстием (см. [2, 3]) или с двумя гиперболическими выточками (см. [4]), растяжение пластинки с гиперболическими выточками или с выточкой, имеющей форму координатной линии $u=u_0$ в системе криволинейных координат $x=u+u/(u^2+v^2)$, $y=v-v/(u^2+v^2)$.

Решения для всех этих задач различны, однако пределы отношений наибольших напряжений при стремлении к нулю отношения радиуса кривизны ρ в кончике к размеру отверстия вдоль оси x или к номинальной ширине образца в случае гиперболических выточек остаются одинаковыми. Так, в изотропном случае для тонкой трещины ($b/a \rightarrow 0$)

$$(2.2) \quad \tau_{xy}^* / \sigma_y^* = 3\sqrt{3} / 16 \approx 0.324$$

и это отношение не зависит от способа приложения нагрузки и от выбранной формы отверстия. С ростом b/a от 0 до 1 отношение τ_{xy}^* / σ_y^* меняется незначительно. В изотропном случае для круглого отверстия имеем

$$(2.3) \quad \tau_{xy}^* / \sigma_y^* = 0.29$$

Как видно, отличие от предельно тонкого отверстия порядка 10%. Для отверстия, которое можно представить эллипсом с отношением полуосей $b/a < 1$, τ_{xy}^* / σ_y^* будет еще ближе к значению (2.2). С ростом анизотропии при $\beta_2 \rightarrow 0$ различие в отношении τ_{xy}^* / σ_y^* для разных отверстий убывает. В сильно анизотропном материале это отношение практически не зависит от формы отверстия и является константой материала. Таким образом, условие расслаивания (2.1), выполняемое для случая тонкого надреза, остается справедливым практически для любых концентраторов с погрешностью не более 10%.

3. Оптимальные свойства материала. Условие расслаивания практически не зависит от формы концентратора, поэтому можно ввести понятие оптимальных прочностных и упругих свойств композиционного материала. Чтобы трещина тормозилась и материал вел себя вязко, необходимо, чтобы условие расслаивания (2.1) выполнялось. Однако, чтобы расслаивание начиналось при большей нагрузке, нужно увеличивать прочность пластика на сдвиг до выполнения равенства

$$(3.1) \quad \tau_{xy}^* / \sigma_y^* = [\tau] / [\sigma]$$

В этом случае материал будет наиболее прочен при наличии концентраторов. Примером оптимально «сконструированного» природой материала может служить древесина. Древесина дуба по данным [5] имеет следующие комплексные параметры $\beta_1 \beta_2 = (E_1 / E_2)^{1/2} = 0.28$; $\beta_1 + \beta_2 = (E_1 / G_{12} - 2\nu_{2,1} + \sqrt{E_1 / E_2})^{1/2} = 1.536$.

Отсюда для дуба $\tau_{xy}^* / \sigma_y^* = 0.095$, $[\tau] / [\sigma] = 0.094$, для сосны соответствующие отношения равны 0.14 и 0.093. Отношение прочностей несколько меньше, поэтому расслаивание всегда предшествует разрыву и является наиболее вероятным видом разрушения при наличии концентраторов. Из-за расслаивания древесина практически нечувствительна к концентрации напряжений и не раскалывается, например, от поперечного удара топора.

Для данной прочности волокнистого композита на разрыв и данных упругих свойств можно указать оптимальную прочность связующего на

сдвиг. Например, прочность однонаправленного стеклопластика АГ-4С на разрыв вдоль волокон $54 \text{ кг} \cdot \text{мм}^{-2}$, комплексные параметры для этого материала: $\beta_1=1.6$, $\beta_2=0.33$. Отсюда оптимальная сдвиговая прочность: $[\tau] = [\sigma] \tau_{xy}^* \sigma_x^{*-1} \approx 16 \text{ кг} \cdot \text{мм}^{-2}$. Реальная сдвиговая прочность АГ-4С значительно ниже, поэтому стеклопластик при растяжении вдоль волокон легко расслаивается около разрывов волокон или других концентраторов.

4. Рациональное объемное содержание волокон. При нагружении образцов с концентраторами из однонаправленных стеклопластиков или углепластиков расслаивание начинается при сравнительно низких нагрузках, когда напряжение на волокна меньше предельных, т. е. волокна недогружены. Для данных прочностных свойств компонент можно указать рациональное объемное содержание волокон φ^0 , при котором,

$$(4.1) \quad \tau_{xy}^* / [\tau] = \sigma_b^* / [\sigma_b]$$

где σ_b^* — наибольшее напряжение на волокно вблизи концентратора, $[\sigma_b]$ — средняя прочность волокон. Сделаем ряд допущений, которые не меняют существа дела. Считаем $[\tau]$ и $[\sigma_b]$, не зависящими от φ . Если считать, что усилия в направлении y несут в основном волокна, можно записать $\sigma_b \approx \sigma_y / \varphi$, $E_2 \approx E_b \varphi$.

Считая, что все остальные величины слабо зависят от φ , из формул (1.1), (1.3), (1.11) получаем рациональное объемное содержание $\varphi^0 = ([\tau] / [\sigma])^2 A(\varphi)$, где $A(\varphi)$ — слабо зависящая от φ функция, которую можно оценить в каждом конкретном случае. Для малой объемной доли волокна наиболее вероятен разрыв волокон перед кончиком надреза, при $\varphi = \varphi^0$ разрыв волокна и расслоение равновероятны. С дальнейшим ростом φ расслоение начинается раньше, чем волокна у концентратора получают предельную нагрузку. Значит, в последнем случае волокон в композите — избыток для данной прочности связующего. Рациональное содержание найдется, если связующее не слишком прочное на сдвиг, а именно, если

$$[\tau] \leq [\sigma_b] \varphi_+^{-1/2} [A(\varphi_+)]^{-1/2}$$

где $\varphi_+ \approx 0.9$ — максимально возможная доля волокна, $A(\varphi_+)$ характеризует упругие свойства материала с наибольшей укладкой. При желании можно рассчитать φ^0 без упрощающих допущений, но это усложнит выкладки. Вычисленное φ^0 для однонаправленного стеклопластика оказывается довольно низким 20—30%. Такой материал, вряд ли устроит конструктор из-за своей невысокой жесткости и прочности на разрыв. Чтобы увеличить φ^0 , надо увеличить прочность связующего на сдвиг. Рациональное наполнение для данных компонент не делает материал более прочным, а просто позволяет экономнее использовать наполнитель. Так как волокна остаются дорогостоящим сырьем, учет возможности расслоения композита раньше исчерпания им несущей способности на разрыв может оказаться полезным для расчета деталей, работающих в условиях наличия концентраторов.

Автор благодарит Ю. Н. Работнова за постановку задачи и ценные замечания при обсуждении результатов.

Поступила 3 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Cook J., Gordon J. E. A mechanism for the control of crack propagation in all-brittle systems. Ser. A, 1964, vol. 282, No. 1391.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основы задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
4. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
5. Конструкционные материалы, т. 1. М., «Сов. энциклопедия», 1963.