

УДК 539.375

## РАСТУЩАЯ ТРЕЩИНА ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Л. И. СЛЕПЯН

(Новосибирск)

Рассматривается задача о напряжениях и деформациях у края трещины в идеально упруго-пластическом материале. Предполагается, что под действием нагрузок, приложенных к телу вне трещины, и, возможно, других причин трещина растет, причем настолько медленно, что силы инерции несущественны.

В процессе роста трещины материала в некоторой ее окрестности претерпевает необратимые деформации, что приводит к существенному снижению их концентрации (по сравнению со случаем нагружения тела с фиксированной трещиной).

Соответствующая задача, но применительно к антиплоской деформации, рассматривалась в [1-3]: определены поля напряжений и деформаций, рассматриваемого течения впереди трещины [1], указаны области разгрузки и вторичной пластической деформации<sup>1</sup> (стационарная задача) [2], решена автомодельная (квазистационарная) задача для идеально упруго-пластического материала и для среды с упрочнением [3].

Ниже рассматривается плоская деформация: задача I — растяжение поперек трещины и задача II — сдвиг вдоль трещины.

**1. Постановка задачи.** Пусть трещина — полоса  $|x_1| < l(t)$  ( $dl/dt \geq 0$ ),  $x_2 = 0$ , а тело нагружено вне достаточно большой окрестности трещины так, что осуществляется плоская деформация ( $t$  — время;  $x_i$  — прямоугольные,  $r$ ,  $\theta$  — полярные ( $x_1 - l = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ) лагранжевы координаты;  $u_i$  — компоненты перемещения;  $\sigma_{ij}$  — напряжения). Как и в [1-3], ограничимся геометрически линейной постановкой (исключая п. 3).

При этом решения, асимптотически верные при  $r/l \rightarrow 0$ , окажутся, конечно, недостоверными в некоторой малой области, где величины  $(k/\mu) \ln(l/r)$  ( $(k/\mu) \ln^2(l/r)$ ) — значения деформаций и поворотов — слишком велики ( $k$  — предел текучести при сдвиге,  $\mu$  — модуль сдвига,  $k \ll \mu$ ). Однако в достаточно жестких материалах указанная область (по критерию прочности, приведенному в [3]) сравнима с межатомным расстоянием и ее можно игнорировать.

Будем искать нетривиальное решение автомодельной задачи  $u = bv(x_1/l, x_2/l)$  у края трещины  $x_1 = l$ .

Задача I

$$(1.1) \quad u_1(x_1, -x_2) = u_1(x_1, x_2), \quad u_2(x_1, -x_2) = -u_2(x_1, x_2) \\ \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} > 0 \quad (|x_1| > l, x_2 = 0)$$

Задача II

$$(1.2) \quad u_1(x_1, -x_2) = -u_1(x_1, x_2), \quad u_2(x_1, -x_2) = u_2(x_1, x_2) \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad (|x_1| > l, x_2 = 0)$$

В обеих задачах

$$(1.3) \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \quad (|x_1| < l, x_2 = 0)$$

<sup>1</sup> Утверждение о непрерывности меры несовместности упругих деформаций при переходе в область разгрузки, на котором основано исследование задачи в [2] (стр. 150), вообще говоря, не имеет места. Для рассматриваемой в [2] задачи оно оказывается верным лишь асимптотически при  $r \rightarrow 0$ . В задаче о плоской деформации оно не выполняется.

Ввиду указанной симметрии будем в дальнейшем рассматривать лишь область  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Примем, что в областях, где происходит пластическая деформация, справедливы соотношения ассоциированного закона течения при условии пластичности Треска — Сен-Венана [4]

$$(1.4) \quad \max F_i = k^2, \quad F_i = 1/4 (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12} \sigma_{21} \quad (\sigma_{12} = \sigma_{21})$$

$$F_{2,3} = 1/16 (\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33} \pm 2\sqrt{F_1})^2$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial t} = \frac{l'}{\mu} \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right)$$

$$\lambda_m = \lambda_m(y_1, y_2) \geq 0 \quad (\lambda_m = 0 \text{ при } F_m < k^2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad l' = dl/dt$$

$$u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j, \quad \sigma = 1/3 \sigma_{ii}, \quad y_i = x_i / l$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^p$  и  $\varepsilon_{ij}^e$  — компоненты пластической и упругой деформации,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. При разгрузке

$$(1.5) \quad \sigma_{ij} = 2\mu (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e) + 2\nu\mu (1-2\nu)^{-1} (\varepsilon - \varepsilon^e) \delta_{ij} + \sigma_{ij}^0$$

( $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$ ;  $\varepsilon_{ij}^0, \dots = \varepsilon_{ij}, \dots$  в начале разгрузки)

Везде справедливы уравнения равновесия

$$(1.6) \quad \sigma_{ij,i} = \partial \sigma_{ij} / \partial x_i = 0$$

и совместности полных деформаций

$$(1.7) \quad \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$$

Пусть  $r/l \rightarrow 0$ . Тогда, если  $y_2 \varepsilon_{ij,2}^p / \varepsilon_{ij,1}^p \rightarrow 0$ , то  $\partial \varepsilon_{ij}^p / \partial t = - (x_1 \varepsilon_{ij,1}^p + x_2 \varepsilon_{ij,2}^p) (l'/l) \sim -l' \varepsilon_{ij,1}^p$

Отсюда и из (1.4)

$$(1.8) \quad \partial \varepsilon_{ij}^p / \partial y_1 \sim - (\lambda_m / \mu) \partial F_m / \partial \sigma_{ij}$$

Аналогично устанавливается [3], что

$$(1.9) \quad \varepsilon_{ij,1}^e / \varepsilon_{ij,2}^e \sim -y_2 \rightarrow 0 \quad (r/l \rightarrow 0)$$

вследствие чего при определении асимптотики решения ( $r/l \rightarrow 0$ ) можно полагать, что  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $\sigma_{ij}^e$  зависят лишь от  $x_2$ . Нетрудно видеть, что при этом задача сводится к квазистационарной ( $l(t)$  — параметр). Именно такую задачу и будем рассматривать ниже, опуская, как правило, параметр  $l$  (т. е. заменяя  $y_i$  на  $x_i$ ). Заметим, что полученные решения будут отвечать также и стационарной задаче, если место параметра  $l$  займет соответствующий размер тела. Примером последней может служить задача о растущей полубесконечной трещине в бесконечном слое постоянной ширины.

Будем иметь в виду, что при  $r > a > 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi - a$  компоненты  $u_{i,j}$  ограничены; перемещения — непрерывны. Введем еще естественное предположение о монотонности, а именно, будем полагать, что любая из рассматриваемых величин, ограниченная при  $r > a > 0$ , после умножения на  $r$  является монотонной в некоторой окрестности  $r=0$  ( $\theta = \text{const}$ ).

**2. Напряжения в пластической области. Необходимость разгрузки.** Из условий пластичности, уравнения равновесия

$$(2.1) \quad r \partial \sigma_{r\theta} / \partial r + \partial \sigma_{\theta\theta} / \partial \theta + 2\sigma_{r\theta} = 0$$

и граничного условия  $\sigma_{\theta\theta} = 0$  ( $\theta = \pi$ ) следует, что все компоненты напря-

жений ограничены. Действительно, из-за ограниченности компонентов дивергента (1.4) (и предположения о монотонности)

$$r \partial \sigma_{r\theta} / \partial r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

Тогда из (2.1) и (1.3) следует

$$(2.2) \quad \sigma \sim 2 \int_0^\pi \sigma_{r\theta} d\theta + \sigma - \sigma_{\theta\theta}$$

т. е., что среднее напряжение также ограничено. Положим

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_+, & \sigma_{r\theta} &= k \cos 2\varphi \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} &= \sigma^- = 2k \sin 2\varphi & (k &= \pm \sqrt{k^2}) \end{aligned}$$

При этом условие пластичности  $F_1 = k^2$  удовлетворяется тождественно. Из уравнений равновесия с учетом предположения о монотонности находим асимптотику напряжений ( $r \rightarrow 0$ ): равномерное поле

$$(2.4) \quad \varphi = \theta + \text{const}, \quad \sigma_+ = \text{const}, \quad \sigma_{ij} = \text{const}$$

или центрированное поле линий скольжения

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi &= 0, & \sigma_+ &= -4k\theta + \text{const} \\ \sigma_- &= \sigma_{11} - \sigma_{22} = -2k \sin 2\theta, & \sigma_{12} &= k \cos 2\theta \end{aligned}$$

Условиям относительно напряжений в задаче I можно удовлетворить комбинацией решений (2.4), (2.5). Однако при определении перемещений (с учетом их непрерывности на линиях стыковки указанных полей  $\theta = \pi/4$ ,  $\theta = 3\pi/4$ ) возникает противоречие с законом течения (1.4). Несложный анализ показывает, что в задаче II (так же, как и в задаче I) в некоторой окрестности  $\theta = 0$  должно быть состояние пластичности, но пластическими решениями (2.4), (2.5) нельзя удовлетворить граничные условия (1.2), (1.3). Таким образом, здесь разгрузка необходима. Пусть теперь  $F_1 < k^2$ ,  $F_2 = k^2$ , что, может быть, осуществляется в задаче I, так как в задаче II при  $\theta = 0$   $F_3 = F_2 = 1/4 F_1$ . При этом вследствие ограниченности  $\varepsilon_{33}^p = \lambda_2 k / \mu$  ограничены все компоненты деформации. Тогда, используя соотношения для асимптотик  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , т. е. полагая их здесь функциями  $\theta$ , имеем

$$(2.6) \quad \lambda_2 = \frac{\sin \theta}{2kr} \left( \sigma_{33}' - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) \quad (\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^p + \varepsilon_{33}^e = 0)$$

$$r \varepsilon_{11,1}^p = -(\varepsilon_{11}^p)' \sin \theta = -(\lambda_2 / \mu) \partial F_2 / \partial \sigma_{11}, \quad r \varepsilon_{11,2}^p = (\varepsilon_{11}^p)' \cos \theta$$

$$(2.7) \quad \varepsilon_{11,2}^p = (\lambda_2 / \mu) (\partial F_2 / \partial \sigma_{11}) \text{ctg} \theta$$

( $\sigma_{33}'$ , ..., — производные по аргументу:  $d\sigma_{33}/d\theta$ , ...).

Определив через указанное значение  $\lambda_2$  производные  $\varepsilon_{22,1}$ ,  $\varepsilon_{12,1}$ , подставив их, а также  $\varepsilon_{11,2}$  (см. (2.7)) в уравнение (1.7) и проинтегрировав последнее, найдем

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \lambda_2 k r (1+q) + (\sigma_{+1}' - (3\nu/(1+\nu)) \sigma' + C) \sin \theta &= 0 \\ q = \sigma^- (4F_1)^{-1/2}, & \quad C = \text{const}, \quad \sigma^- = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_+ = \sigma_{11} + \sigma_{22} \end{aligned}$$

Сравнивая (2.6), (2.8), используя условие пластичности  $F_2 = k^2$ , уравнения равновесия и учитывая, что  $C = 0$  для задачи 1, приходим

к уравнению

$$(2.9) \quad \sigma_+' [q^2 + 2(1-2\nu)q + 5 - 4\nu] = 0$$

Выражение в квадратной скобке отлично от нуля, поэтому  $\sigma_+' = 0$  и, следовательно,  $\sigma_{ij} = \text{const}$ . Тот же вывод, конечно, справедлив и при  $F_3 = k^2$ ,  $F_1 < k^2$ . Но асимптотически равномерным полем нельзя удовлетворить граничные условия. Итак, разгрузка необходима.

**3. О напряжениях и деформациях у особой линии**<sup>1</sup>. Для определения характера изменяющегося поля деформаций в области разгрузки докажем вначале утверждение, обобщающее результат работы [5]. Рассмотрим некоторую область, заполненную сплошной средой и примыкающую к особой линии — линии, на которой напряжения и (или) деформации разрывны. Возьмем на указанной линии точку, в некоторой окрестности которой особая линия гладкая, и примем ее за начало координат.

Лагранжевы прямоугольные оси  $x_1, x_2$  расположим в плоскости, перпендикулярной особой линии, ось  $x_3$  — по касательной к ней. Так же, как и выше, введем полярную систему  $r, \theta$ .

Будем полагать, что компоненты тензора Пиола — Кирхгофа  $\sigma_{ij}$  и градиента перемещений  $u_{i,j}$  дифференцируемы вне особой линии и справедливо предположение о монотонности (см. п. 1). Кроме того, полагаем, что вследствие гладкости особой линии при  $r \rightarrow 0$

$$\sigma_{3i,3} = O(|\sigma_{3i}| + \sigma_0), \quad \sigma_0 = \text{const} > 0$$

Здесь и ниже  $x_3 = 0$ . При указанных предположениях справедливо следующее утверждение. Если якобиан

$$(3.1) \quad Q = \det(\partial\sigma_{2j} / \partial u_{i,2}) > \text{const} > 0$$

при произвольном направлении оси  $x_2$ , а асимптотика напряжений (и, следовательно, деформаций) при  $r \rightarrow 0$  зависит от  $\theta$  (не все  $\partial u_{i,j} / \partial \theta = 0$  при  $r = 0$ ), то тензор напряжений или (и) градиент перемещений при  $r = 0$  имеет логарифмическую или более сильную особенность. Заметим, что условие взаимно однозначной связи (3.1) соответствует устойчивому материалу.

*Доказательство.* Предположим, что утверждение не верно

$$(3.2) \quad \sigma_{ij} = o(\ln r), \quad u_{i,j} = o(\ln r) \quad (r \rightarrow 0)$$

Отсюда и из предположений о монотонности и о величине  $\sigma_{3i,3}$  следует, что

$$(3.3) \quad r \partial \sigma_{ij} / \partial r \rightarrow r \partial u_{i,j} / \partial r \rightarrow r \sigma_{3j,3} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

Из уравнений равновесия

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij,i} &= (\partial \sigma_{1j} / \partial r + r^{-1} \partial \sigma_{2j} / \partial \theta) \cos \theta + \\ &+ (\partial \sigma_{2j} / \partial r - r^{-1} \partial \sigma_{1j} / \partial \theta) \sin \theta + \sigma_{3j,3} = 0 \end{aligned}$$

и соотношений (3.3) следует, что

$$(3.5) \quad \cos \theta \partial \sigma_{2j} / \partial \theta - \sin \theta \partial \sigma_{1j} / \partial \theta \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

Положим  $u_i = r f_i(r, \theta, x_3)$ . Тогда

$$(3.6) \quad u_{i,1} = (f_i + r \partial f_i / \partial r) \cos \theta - \sin \theta \partial f_i / \partial \theta$$

<sup>1</sup> Здесь линеаризация не применяется.

$$u_{i,2} = (f_i + r \partial f_i / \partial r) \sin \theta + \cos \theta \partial f_i / \partial \theta$$

$$\frac{\partial u_{i,1}}{\partial \theta} = - \left( f_i + r \frac{\partial f_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial \theta^2} \right) \sin \theta + r \frac{\partial^2 f_i}{\partial r \partial \theta} \cos \theta =$$

$$= r \frac{\partial u_{i,2}}{\partial r} - \left( f_i + 3r \frac{\partial f_i}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial \theta^2} \right) \sin \theta$$

Пусть при  $\theta = \theta_*$  деформация изменяется, т. е. не все  $\partial u_{i,j} / \partial \theta$  стремятся к нулю при  $r \rightarrow 0$ . Положим  $\theta_* = 0$  (и соответственно повернем оси  $x_1, x_2$ ). Тогда на основании (3.3), (3.5), (3.6) имеем

$$(3.7) \quad \partial \sigma_{2j} / \partial \theta \rightarrow \partial u_{i,1} / \partial \theta \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

Кроме того, так как значения  $u_i$  на особой линии не зависят от  $\theta$  (перемещение непрерывно)

$$(3.8) \quad \partial u_{i,3} / \partial \theta \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

Отсюда

$$(3.9) \quad \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial u_{i,2}} \frac{\partial u_{i,2}}{\partial \theta} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

и так как не все  $\partial u_{i,2} / \partial \theta$  стремятся к нулю,  $Q \rightarrow 0$ , что противоречит предположению (3.1). Заметим, что для линейной теории упругости изотропной среды

$$Q = 2\mu^3(1-\nu) / (1-2\nu) > 0$$

Аналогично тому, как это сделано в [5], записываются и другие модификации условия (3.1).

Применительно к трещине в упругой среде приведенное утверждение (и даже более сильное) следует из результата работы [6], очевидно справедливого и при геометрически нелинейной постановке [7]. Упомянутый результат не применим, однако, к данной задаче о растущей трещине в упруго-пластической среде, а также для анализа состояния у других угловых точек или в случае действия разрывной нагрузки. Его нельзя использовать и для суждения о деформациях в (упругой) области разгрузки, примыкающей к краю растущей трещины. Утверждение, доказанное выше, свободно от этих ограничений.

#### 4. Напряжения и деформации в области разгрузки. Положим

$$(4.1) \quad u_1 = u_1^* + \int_0^{x_2} \left( 2\varepsilon_{12}^\circ - \frac{\sigma_{12}^\circ}{\mu} \right) dx_2$$

$$u_2 = u_2^* + \int_0^{x_2} \left( \varepsilon_{22}^\circ + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{11}^\circ - \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \sigma_{22}^\circ \right) dx_2$$

Подставив данные выражения в (1.5), получим

$$(4.2) \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}^* - 2\mu \varepsilon_{11}^\circ / (1-\nu) - \nu \sigma_{22}^\circ / (1-\nu) + \sigma_{11}^\circ$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^*, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^*$$

где  $\sigma_{ij}^*$  выражаются через  $u_i^*$  обычными формулами линейной теории упругости для плоской деформации. Вместе с тем  $\sigma_{ij}^*$ , как видно из (4.2)

( $\varepsilon_{11}^{\circ} = \varepsilon_{11}^{\circ}(x_2), \dots$ ), удовлетворяют уравнениям равновесия. Следовательно, вектор  $u^*$  удовлетворяет однородным уравнениям линейной теории упругости (чего нельзя сказать о векторе  $u$ ). Из (4.1) следует, что на границе, где начинается разгрузка

$$(4.3) \quad u_{1,1}^* = u_{1,1}^{\circ}, \quad u_{2,2}^* = -\nu \varepsilon_{11}^{\circ} / (1-\nu) + (1-2\nu) \sigma_{22}^{\circ} / (2\mu(1-\nu)) \\ u_{1,2}^* = -u_{2,1}^{\circ} + \sigma_{12}^{\circ} / \mu, \quad u_{2,1}^* = u_{2,1}^{\circ}$$

Определим условия, при которых может начаться разгрузка (уменьшение  $F_1$ ), если в пластической области  $F_1 = k^2$ . Последнее условие, как уже отмечалось, выполняется для задачи II. Оно должно выполняться и для задачи I, так как в противном случае деформации ограничены, откуда следует, как нетрудно показать (для задачи I), ограниченность всех компонент  $u_{i,j}$ . Но при этом, как видно из п. 3 и (4.2), (4.3), разгрузка (изменение  $\sigma_{ij}$  при изменении  $x_1$ ) происходить не может. Рассмотрим производную

$$(4.4) \quad 2F_{1,1} = \sigma_- \sigma_{-,1} + 4\sigma_{12} \sigma_{12,1} \quad (\sigma_- = \sigma_{11} - \sigma_{22})$$

Используя формулы [8]

$$(4.5) \quad 2\mu(u_1^* + iu_2^*) = (3-4\nu)\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\psi} \\ -\sigma_-^* + 2i\sigma_{12} = 2(\bar{z}\varphi'' + \psi'), \quad \sigma_+^* = 4\operatorname{Re} \varphi'$$

( $\varphi, \psi$  — аналитические функции  $z = x_1 + ix_2, i = \sqrt{-1}$ ), находим

$$(4.6) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (-\sigma_- + 2i\sigma_{12}) = 2e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho} (\bar{z}\varphi'' + \psi') + 4ie^{-2i\alpha} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi'$$

Здесь  $\rho(x_2), \alpha(x_2)$  — локальные полярные координаты:  $\rho$  — по касательной к границе раздела между областями пластичности и разгрузки,  $\alpha$  — угол, отсчитываемый от оси  $x_1$ . Значения дифференцируемых по  $\rho$  функций в (4.6) определяются соотношениями (4.5). Используя их, формулы (4.3) и учитывая непрерывность перемещений и напряжений на указанной границе, можно выразить искомую производную через производные в пластической области (на границе)

$$(4.7) \quad (1-\nu)F_{1,1} = \sigma^- (\varepsilon_{\rho\rho,1} + (1-2\nu)\sigma_{\alpha\alpha,1}/2) + \sigma_{\rho\alpha} \sigma_{\rho\alpha,1}, \quad \sigma^- = \sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\alpha\alpha}$$

Учтем, что возможно  $F_2 = F_1 = k^2$  (если  $F_2 < k^2$ , то  $\lambda_2 = 0$ ). Тогда в соответствии с (1.4)

$$(4.8) \quad 4\mu\varepsilon_{\rho\rho,1} = -(2\lambda_1 + \lambda_2)\sigma^- - 2(1-2\nu)k\lambda_2 + 2((1-\nu)\sigma_{\rho\rho,1} - \nu\sigma_{\alpha\alpha,1})$$

Из (4.7), (4.8) и (1.4) находим

$$(4.9) \quad 4(1-\nu)F_{1,1} = -(\sigma^-)^2 (2\lambda_1 + \lambda_2) - 2(1-2\nu)k\lambda_2 \sigma^-$$

Видно, что разгрузка не может начаться, если  $\sigma^- > 0, \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ , так как при этом  $F_{1,1} < 0$ . Аналогичным образом находим ( $F_2 = F_1 = k^2, -2k \leq \sigma^- \leq 0$ )

$$(4.10) \quad 4(1-\nu)F_{2,1} = -(\sigma^-)^2 (2\lambda_1 + \lambda_2) - (1-2\nu)k(2\lambda_1 + 3\lambda_2)\sigma^- - \\ - 2(5-4\nu)k^2\lambda_2 \leq -2k[(1-2\nu)\lambda_1\sigma^- + 2(1+\nu)k\lambda_2]$$

В начале разгрузки правые части (4.9), (4.10) должны быть неотрицательными, откуда следует, что если  $\lambda_1 > 0$ , то  $\sigma^- = \lambda_2 = 0$ . Таким образом, разгрузка может начаться, когда в пластической области, либо  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,

либо  $\sigma^- = \lambda_2 = 0$  (как будет видно ниже, в пластической области  $\lambda_1 > 0$ ). В последнем случае разгрузка начинается от характеристики поля напряжений в пластической области ( $|\sigma_{\rho\alpha}| = |k|$ ).

Отсюда, в частности, следует, что если  $\theta_1(r)$ ,  $\theta_2(r)$  — координаты границ области разгрузки, то  $\theta_2(0) > \theta_1(0)$ , т. е. указанные линии не могут касаться одна другой. Действительно, предположим противное и рассмотрим равновесие части области разгрузки  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_*$  ( $\theta_1 \leq \theta_* \leq \theta_2$ ),  $0 \leq r \leq r_*$ . Учитывая ограниченность напряжений, получаем

$$(4.11) \quad \sigma_{\rho\alpha}(\theta_*) \sim \sigma_{\rho\alpha}(\theta_1), \quad \sigma_{\alpha\alpha}(\theta_*) \sim \sigma_{\alpha\alpha}(\theta_1) \quad (\rho \rightarrow 0)$$

Но  $\sigma_{\rho\rho}(\theta_1) = \sigma_{\alpha\alpha}(\theta_1)$  и по условию пластичности  $\sigma^-(\theta_*) = 0$  ( $\sigma_{\rho\alpha}^2 = k^2$ ) напряжения не изменяются, разгрузка не происходит. По той же причине напряжения в пластической области непрерывны (так же, как и в упругой).

Теперь можно заключить, что компоненты  $u_{i,j}^*$  имеют при  $r=0$  логарифмическую особенность (менее сильная противоречит утверждению п. 3, а более сильная приводит к неограниченному изменению напряжений при разгрузке в «ненулевом» секторе  $\theta_2(0) > \theta_1(0)$ ). Полагая в (4.5)  $\varphi = z \ln z \text{ const}$ ,  $\psi = z \ln z \text{ const}$  и используя (4.3), получаем следующие зависимости для  $u_{i,j}^*$ ,  $\sigma_{i,j}^*$  в области разгрузки (здесь слагаемые асимптотически постоянные ( $r \rightarrow 0$ ,  $x_2 = \text{const}$ ) опущены)

$$(4.12) \quad \begin{aligned} u_{1,1}^* &= (4(1-\nu) \ln r - \cos 2\theta) v_1 - (2(1-2\nu)\theta + \sin 2\theta) v_2 \\ u_{1,2}^* &= -(2(3-2\nu)\theta + \sin 2\theta) v_1 - (4(1-\nu) \ln r - \cos 2\theta) v_2 \\ u_{2,1}^* &= (2(1-2\nu)\theta - \sin 2\theta) v_1 + (4(1-\nu) \ln r + \cos 2\theta) v_2 \\ u_{2,2}^* &= -(4\nu \ln r - \cos 2\theta) v_1 - (2(1-2\nu)\theta - \sin 2\theta) v_2 \\ \sigma_{11}^* &= 2\mu [ (4 \ln r - \cos 2\theta) v_1 - (2\theta + \sin 2\theta) v_2 ] \\ \sigma_{22}^* &= 2\mu [ v_1 \cos 2\theta - (2\theta - \sin 2\theta) v_2 ] \\ \sigma_{12}^* &= 2\mu [ -(2\theta + \sin 2\theta) v_1 + v_2 \cos 2\theta ] \\ 4(1-\nu) v_i &= \lim_{r \rightarrow 0} u_{i,1}^* / \ln r \end{aligned}$$

Видно, что в пластической области (на границе с областью разгрузки) одна из компонент  $u_{i,1}$  должна иметь логарифмическую особенность, а другая — не более сильную.

**5. Перемещения в пластической области.** С помощью соотношений (1.4), (1.6), (1.8) находим следующие уравнения:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} (u_{2,11} - u_{2,22}) \sigma_-^2 + 4u_{2,12} \sigma_{12} \sigma_- &= 2k\gamma M \sigma_{12,1} \\ u_{1,1} &= -u_{2,2} + (1-2\nu) (N\sigma_+ - Pk) \\ M &= 4(1-\nu), \quad N = 1 / (2\mu), \quad P = 0 \quad (F_3 < F_2 < F_1 = k^2) \\ M &= \frac{5-4\nu}{1+\nu}, \quad N = \frac{3}{4\mu(1+\nu)}, \quad P = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \quad (F_3 < F_2 = F_1 = k^2) \\ \sigma_+ &= \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \sigma_- = \sigma_{11} - \sigma_{22}, \quad \gamma = k / \mu \end{aligned}$$

Равномерное поле напряжений. Пусть  $\sigma_{12} = 0$ . При этом в задаче I  $u_2 = f(\xi_1) - f(\xi_2)$ ,  $\xi_{1,2} = x_1 \pm x_2$ . Предположим, что на некоторой линии  $x_2 \leq x_1$  ( $\xi_i \geq 0$ ), проходящей через точку  $r=0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Тогда

$$(5.2) \quad u_{2,21} = f''(\xi_1) + f''(\xi_2) = 0$$

Для того чтобы от данной линии началась разгрузка, необходимо

$$(5.3) \quad \begin{aligned} u_{2,22} &= f''(\xi_1) - f''(\xi_2) \rightarrow -\infty \quad (r \rightarrow 0) \\ (u_{2,2} &= -u_{1,1} + \text{const} \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Но (5.3) противоречит (5.2) —  $\lambda_1, \lambda_2$  одновременно нулю не равны — разгрузка может начаться лишь от характеристики. Однако если  $u_{2,2} \sim -u_{1,1} = \infty$  при  $r=0$ , то  $u_{2,2}$  остается бесконечной на всей характеристике  $\xi_2=0$

$$(5.4) \quad u_{2,2}(\xi_1, \xi_2) = f'(\xi_1) + f'(0) = \infty \quad (r \geq 0)$$

Следовательно, от равномерного поля разгрузка не происходит; компоненты  $u_{i,j}$  в равномерном поле ограничены. Аналогичное заключение справедливо и для равномерного поля, соответствующего задаче II, а также для асимптотически равномерного поля.

Для центрированного поля линий скольжения (2.5) уравнение (5.1) приводится к виду (из соотношений (1.4), (2.5) легко устанавливается, что в центрированном поле  $\lambda_2=0$ )

$$(5.5) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r} \right) = -2(1-\nu)\gamma \sin \theta$$

Отсюда

$$(5.6) \quad u_2 = 2(1-\nu)\gamma r \ln r \cos \theta + \varphi(r) + r\psi(\theta)$$

Разгрузка здесь начинается от характеристики (по крайней мере, при  $r \rightarrow 0$ , так как любое направление из точки  $r=0$  — характеристика), поэтому  $u_{i,1} = O(\ln r)$ . Отсюда и из (5.1)

$$(5.7) \quad \begin{aligned} u_1 &\sim 2(1-\nu)\gamma [Br \ln^2 r \sin \theta + (C+2B \ln \sin \theta + \\ &+ A \ln \operatorname{tg}(\theta/2))r \ln r \sin \theta], \quad u_2 \sim 2(1-\nu)\gamma (A + \cos \theta)r \ln r \end{aligned}$$

**6. Задача 1.** Как следует из предыдущих рассуждений, в пластической области напряжения следующие (асимптотика при  $r \rightarrow 0$ ).

При  $\theta \leq \pi/4$

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_0 - k < \sigma_0, \quad \sigma_{22} = \sigma_0 + k, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_0 = \text{const} > 0 \\ \sigma_{33} &= 2\nu\sigma_0 \quad (F_2 < k^2 : \sigma_0 \leq k_0 = k / (1-2\nu)) \\ \sigma_{33} &= \sigma_0 - k \quad (F_2 = k^2 : \sigma_0 \geq k_0) \end{aligned}$$

При  $\theta \geq \pi/4$

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= k(\pi/2 - 2\theta - \sin 2\theta) + \sigma_0 \\ \sigma_{22} &= k(\pi/2 - 2\theta + \sin 2\theta) + \sigma_0 \\ \sigma_{12} &= k \cos 2\theta \\ \sigma_{33} &= \nu\sigma_+ \quad (\sigma_0 \leq k_0), \quad \sigma_{33} = \nu\sigma_+ + (1-2\nu)\sigma_0 - k \quad (\sigma_0 \geq k_0) \end{aligned}$$

Компоненты  $u_{i,j}$  при  $\theta < \pi/4$  ограничены. Учитывая непрерывность перемещений, находим постоянные в (5.7) и  $\lambda_1$

$$(6.3) \quad \begin{aligned} A &= -1/\sqrt{2}, \quad B=0, \quad C = -A \ln \operatorname{tg}(\pi/8) \\ \lambda_1 &= 2\mu u_{2,21} / \sigma_- \sim -2^{-1/2}(1-\nu)(1/r + \delta_1(x_1 - l - x_2)) \ln r \quad (r \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Таким образом, деформации  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  при  $\theta = \pi/4$  разрывны ( $\varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{12}$  непрерывны),  $\lambda_1 > 0$ . Пусть при  $\theta = \theta_1$  начинается разгрузка. Коэффициенты  $v_i$  в (4.12) определяются соотношениями (5.7), (6.3)

$$(6.4) \quad v_1 = 2^{-1/2}\gamma \sin \theta_1, \quad v_2 = 2^{-1/2}\gamma(\sqrt{2} - \cos \theta_1)$$



Из (5.7) видно, что разгрузка не может продолжаться вплоть до  $\theta=\pi$ . Поэтому при  $\theta=\theta_2$  возникает область вторичных пластических деформаций. В последней  $\sigma_{22}=\sigma_{12}=0$ ,  $\sigma_{11}=2k$ . Привлекая (5.7), (6.4), получаем уравнения, правые части которых соответствуют напряжениям при  $\theta=\theta_2$

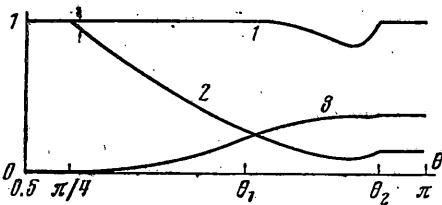
$$(6.5) \quad \frac{\pi}{2} - 2\theta_1 - \sin 2\theta_1 + \frac{\sigma_0}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta_1 \left( 4 \ln \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} - \cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_1 \right) + \\ + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} - \cos \theta_1) (2(\theta_1 - \theta_2) + \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2) = 2 \quad (\sigma_{11})$$

$$\frac{\pi}{2} - 2\theta_1 + \sin 2\theta_1 + \frac{\sigma_0}{k} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta_1 (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) + \\ + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} - \cos \theta_1) (2(\theta_1 - \theta_2) + \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) = 0 \quad (\sigma_{22})$$

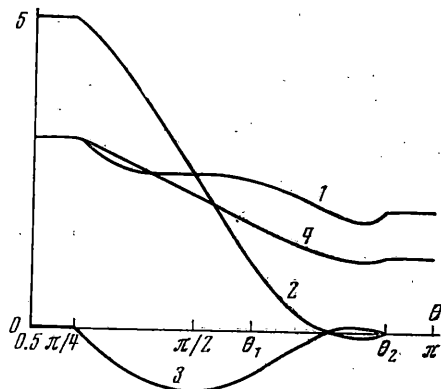
$$\cos 2\theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta_1 (2(\theta_1 - \theta_2) - \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1) + \\ + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} - \cos \theta_1) (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) = 0 \quad (\sigma_{12})$$

Решение данной системы:  $\theta_1 \approx 1.9561$ ,  $\theta_2 \approx 2.8292$ ,  $\sigma_0 \approx 4.1054k$ ,  $\sigma_{11} \approx 3.1054k$ ,  $\sigma_{22} \approx 5.1054k$  ( $\theta \leq \pi/4$ ).

Заметим, что при  $\theta \leq \pi/4$   $F_2 < k^2$ , если  $\nu > \nu_*$ , и  $F_2 = k^2$  при  $\nu \leq \nu_*$ ,  $\nu_* = (1 - k/\sigma_0)/2 \approx 0.37821$ . Левые части (6.5) при замене  $\theta_2$  на  $\theta$  опреде-



Фиг. 1



Фиг. 2

ляют напряжения в области разгрузки. Деформация в области разгрузки претерпевает лишь ограниченное изменение (при  $x_2 = \text{const}$ ). Перемещения определяются с помощью формул (4.1), (4.12), (6.4).

При  $\theta_2 \leq \theta \leq \pi$

$$(6.6) \quad \sigma_{11} = 2k, \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{33} = 2\nu k \quad (\nu \geq \nu_*)$$

$$\sigma_{33} = (1 - 2\nu)(\sigma'_0 - k) \quad (\nu \leq \nu_*)$$

Асимптотика деформаций в этой области в соответствии с законом течения и вследствие их непрерывности (граница  $\theta=\theta_2$  не совпадает с характеристикой) определяется по формулам

$$(6.7) \quad \begin{aligned} u_1 \sim & f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2) + \varphi(x_2) \sim \sqrt{2}(1-\nu)\gamma \{ [\sin \theta_1 \cos \theta + \\ & + (\cos \theta_1 - \sqrt{2}) \sin \theta] r \ln r - [\ln(\operatorname{tg}(\theta_1/2) / \operatorname{tg}(\pi/8))] + \\ & + 2 \cos \theta_1 - \sqrt{2} \} x_2 \ln x_2 \\ u_2 \sim & -f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2) \sim -\sqrt{2}(1-\nu)\gamma [(\cos \theta_1 - \sqrt{2}) \cos \theta + \\ & + \sin \theta_1 \sin \theta] r \ln r \end{aligned}$$

Заметим, что при  $r > 0$  компоненты  $u_{i,j}$  ограничены, за исключением  $u_{1,2}$ . Последняя остается бесконечной на берегу трещины

$$(6.8) \quad \begin{aligned} u_{1,2} \sim & -\sqrt{2}(1-\nu)\gamma [\ln(\operatorname{tg}(\theta_1/2) / \operatorname{tg}(\pi/8)) + 2 \cos \theta_1 - \sqrt{2}] \ln x_2 \\ (x_1 < l, & x_2 \rightarrow 0) \end{aligned}$$

На фиг. 1 показаны графики  $F_i/k^2$ , где  $F_1, F_2, F_3$  — соответственно кривые 1, 2, 3. На фиг. 2 показаны компоненты напряжений  $\sigma_{ij}/k$ , где  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}$  — соответственно кривые 1, 2, 3, 4 ( $\nu = 0.3 < \nu < *$ ).

7. Задача 2. Здесь в окрестности  $\theta = 0$  равномерное поле исключено, так как оно условиям задачи не удовлетворяет (даже если за ним следует центрированное поле, пластические деформации ограничены). Поэтому при  $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} = & -k(2\theta + \sin 2\theta), & \sigma_{12} = & k \cos 2\theta \\ \sigma_{22} = & -k(2\theta - \sin 2\theta), & \sigma_{33} = & \nu \sigma_+ \end{aligned}$$

Из-за ограниченности  $u_{1,2}$  при  $x_2 = 0$  ( $x_1 > l$ )  $B$  равно  $-A/2$ ; перемещения следующие:

$$(7.2) \quad \begin{aligned} u_1 \sim & -2(1-\nu)\gamma A r [^{1/2} \ln^2 r + 2 \ln(\cos(\theta/2)) \ln r] \sin \theta \\ v_1 = & -2A(1-\nu)\gamma \sin \theta_1, & v_2 = & 2(1-\nu)\gamma(A + \cos \theta_1) \end{aligned}$$

(компонента  $u_2$  определена в (5.7)).

Обращаясь теперь к (4.12), получаем следующие уравнения для определения границ области разгрузки ( $\theta_1, \theta_2$ ):

$$(7.3) \quad \begin{aligned} -2\theta_1 - \sin 2\theta_1 + \left( 4 \ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} + \cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1 \right) A \sin \theta_1 - \\ - (2(\theta_2 - \theta_1) + \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) (1 + A \cos \theta_1) = 2 \quad (\sigma_{11}) \\ -2\theta_1 + \sin 2\theta_1 - (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) A \sin \theta_1 - \\ - (2(\theta_2 - \theta_1) - \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1) (1 + A \cos \theta_1) = 0 \quad (\sigma_{22}) \\ \cos 2\theta_1 + (2(\theta_2 - \theta_1) + \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) A \sin \theta_1 + \\ + (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) (1 + A \cos \theta_1) = 0 \quad (\sigma_{12}) \end{aligned}$$

Решение данной системы:  $\theta_1 \approx 0.16696$ ,  $\theta_2 \approx 3.13845$ ,  $A \approx -1.01360$ .

В области разгрузки напряжения определяются левыми частями уравнений (7.3) ( $\theta_2$  заменить на  $\theta$ ), деформации и поворот асимптотически неизменны ( $x_2 = \text{const}$ ). В области вторичной пластической деформации ( $\theta_2 < \theta \leq \pi$ )

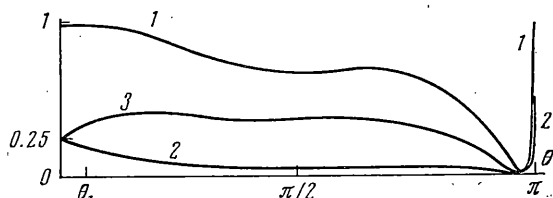
$$(7.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} = & 2k, & \sigma_{22} = & \sigma_{12} = 0, & \sigma_{33} = & 2\nu k \\ u_1 \sim & f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2) + \varphi(x_2) \sim 2(1-\nu)\gamma \{ [A \sin \theta_1 \cos \theta + \\ & + (A \cos \theta_1 - 1) \sin \theta] r \ln r + (x_2/2) \ln^2 x_2 \} \\ u_2 \sim & -f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2) \sim 2(1-\nu)\gamma [(1 - A \cos \theta_1) \cos \theta - A \sin \theta_1 \sin \theta] r \ln r \end{aligned}$$

Во всей области ( $0 \leq \theta \leq \pi$ )  $\varepsilon_{33}^p = \varepsilon_{33}^e = 0$ ,  $\sigma_{33} = \nu \sigma_+$ .

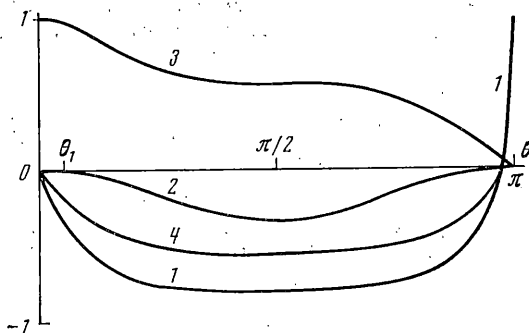
На фиг. 3 кривые 1, 2, 3 показывают графики  $F_1, F_2, F_3$ ; на фиг. 4 гра-

Фиги напряжений  $1/2\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{33}$  показаны соответственно кривыми 1, 2, 3, 4 ( $F_i/k^2$ ,  $\sigma_{ij}/k$ ).

Таким образом, в случае плоской деформации идеально упруго-пластического тела у края растущей трещины деформации имеют логарифмическую особенность, за исключением сдвиговой компоненты (и поворота) в антисимметричной задаче 2, где особенность — квадрат логарифма. В последней задаче так же, как и в симметричной, особенность компоненты



Фиг. 3



Фиг. 4

$u_{1,2}$  сохраняется на берегах трещины и при  $r > 0$ . В симметричной задаче 1 в секторе  $0 \leq \theta < \pi/4$  деформация ограничена, однако там наряду с предельными касательными напряжениями имеет место довольно большое всестороннее растяжение: среднее напряжение  $\sigma \approx 3.7721k$ .

Отметим, что данная задача (для сжимаемого тела) в той же постановке, но при условии пластичности Мизеса неразрешима (нельзя построить согласованное поле напряжений и перемещений, не нарушив условия  $\lambda_1 > 0$ ), что свидетельствует о существенной ограниченности закона изотропного пластического течения — ассоциированного закона течения при условии пластичности Мизеса.

Поступила 31 VII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hult I. A. H. Fatigue crack propagation in torsion. J. Mech. and Phys. Solids, 1957, vol. 6, No. 1.
2. Chitale A. D., McClintock F. A. Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under anti-plane shear. J. Mech. and Phys. Solids, 1974, vol. 19, No. 3.
3. Слепнян Л. И. Деформация у края растущей трещины. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
5. Слепнян Л. И. О деформациях в окрестности особой точки. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
6. Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. Trans. ASME. Ser. E, 1968, vol. 35, No. 4.
7. Chang S. I. Path-independent integral of rupture of perfectly elastic materials. Z. angew. Math. und Phys., 1972, Bd 23, Nr 1.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.