УДК 539.3

МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СТАРЕЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

А. Б. ЕФИМОВ, В. И. МАЛЫЙ

(*Москва*)

При решении граничных задач линейной вязкоупругости широко используется принцип Вольтерра [1-4], согласно которому проблема разделяется на решение соответствующей граничной задачи для упругого тела и расшифровку функций операторов. Эти функции получаются из упругого решения заменой модулей вязко-упругими операторами. Если свойства материала не изменяются во времени, ядра операторов зависят от разности аргументов, и можно применять преобразование Лапласа [2-4]. При расшифровке сложных функций используют приближенные методы, например эффективный метод аппроксимаций [2].

Существенные изменения свойств материалов во времени (старение) могут происходить за счет физико-химических процессов (пластмассы, бетон) или в результате изменения внешних условий – температуры, влажности и т. д. Ядра стареющих материалов неразностные, и операторы некоммутативны. Поэтому для стареющих материалов неприменим принцип Вольтерра и обычные методы решения. Во многих задачах решение при старении можно получить [5], повторяя ход рассуждения упругой задачи с учетом порядка в произведении операторов, так как они образуют некоммутативное кольцо, однако остается проблема расшифровки функций некоммутативных операторов. В работе [6] сформулировано обобщение принципа Вольтерра на стареющие материалы для частного случая зависимости упругого решения от коэффициента Пуассона. Ниже излагается приближенный метод решения задач вязкоупругости со старением – метод аналитического продолжения, дается оценка его погрешности. Приводится обобщение принципа Вольтерра на задачи для стареющих вязко-упругих материалов. Решение вязко-упругой задачи при этом может иметь различные формы. Метод аналитического продолжения уже использовался [7] при численном решении одной осесимметрической задачи со старением.

1. Постановка граничной задачи вязкоупругости. Принцип Вольтерра. Уравнения и граничные условия задачи о равновесии вязко-упругого тела образуют систему

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij,\,j}(\mathbf{r},t)+f_i(\mathbf{r},t)=0, \qquad \mathbf{r}\in\Omega\\
(1.1)\qquad &\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)\cdot n_j(\mathbf{r})=F_i(\mathbf{r},t), \qquad \mathbf{r}\in S_1\\
&\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=(1+\boldsymbol{\nu}_r)^{-1}\cdot\mathbf{E}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)+\delta_{ij}\frac{\boldsymbol{\nu}_r}{(1+\boldsymbol{\nu}_r)(1-2\boldsymbol{\nu}_r)}\mathbf{E}\varepsilon_{kk}(\mathbf{r},t)\\
&\varepsilon_{ij}={}^1/_2\cdot(u_{i,\,j}+u_{j,\,i})
\end{aligned}$$

Здесь Ω – объем тела, S_1 – его поверхность. Операторы $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\nu}_r$ некоммутативные, интегральные общего вида

$$\mathbf{E}\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}K_E(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$$

причем $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\nu}_r$ определяются в опытах на одноосное растяжение – сжатие ($\sigma_{11}=\mathbf{E}\varepsilon_{11}$). $\boldsymbol{\nu}_r$ выражается через оператор поперечной деформации $\boldsymbol{\psi}$, связывающий ε_{22} и σ_{11} ($\varepsilon_{22}=\boldsymbol{\psi}\sigma_{11}$) следующим образом: $\boldsymbol{\nu}_r=-\mathbf{E}\boldsymbol{\psi}$.

Оператор $\mathbf{v}_r$ непосредственно в опытах на одноосное растяжение не определяется и отличается от ν_l, связывающего поперечную деформацию с продольной ($\varepsilon_{22}=-\mathbf{v}_l\varepsilon_{11}$). По определению этих операторов имеем $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{v}_r=$ $=\mathbf{v}_l\mathbf{E}^{-1}=-\boldsymbol{\psi}$.

Если задача смешанная, то S_1 — часть поверхности. На оставшейся части S_2 поверхности тела S имеем граничное условие

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\varphi(\mathbf{r},t),\qquad \mathbf{r}\in S_2$$

Будем считать, что поверхности S_1 и S_2 во времени не меняются. В случае изменяющихся во времени поверхностей $S_1(t)$ и $S_2(t)$ нет общих методов решения системы (1.1). Например, в контактных задачах изменяется область контакта, а следовательно, движется граница, разделяющая области $S_1(t)$ и $S_2(t)$, что приводит к серьезным трудностям [8, 9]. Перейдем от системы (1.1) к уравнениям в перемещениях

$$\Delta\mathbf{E}\mathbf{u}+\frac{1}{1-2\mathbf{v}_r}\nabla\operatorname{div}\mathbf{E}\mathbf{u}+2(1+\mathbf{v}_r)\mathbf{f}=0,\qquad \mathbf{r}\in\Omega \tag{1.2}$$

$$\mathbf{E}\varepsilon_{ij}n_j+\frac{\mathbf{v}_r}{1-2\mathbf{v}_r}\mathbf{E}\varepsilon_{kk}n_i=(1+\mathbf{v}_r)F_i,\qquad \mathbf{r}\in S_1 \tag{1.3}$$

Ограничимся пока первой краевой задачей, когда $S_1=S$, и рассмотрим соответствующую упругую задачу

$$\Delta\mathbf{u}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{2(1+\nu)}{E}\mathbf{f}=0,\qquad \mathbf{r}\in\Omega \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_{ij}n_j+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}n_i=\frac{1+\nu}{E}F_i,\qquad \mathbf{r}\in S \tag{1.5}$$

Существование и свойства решения этой системы исследовались различными путями. Например, в [10–12] решение рассматривалось в пространстве $\mathbf{W}_1$ типа энергетического

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{W}_1}=2\int\limits_\Omega W_1(\mathbf{u})\,d\Omega \tag{1.6}$$

$$2W_1(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}(u_{i,j}+u_{j,i})^2 \tag{1.7}$$

Введем пространство комплексных функций H, действительная и мнимая части которых принадлежат $\mathbf{W}_1$. Используя результаты [10–12] можно показать, что решение задачи (1.4), (1.5) при комплексном ν существует, и как элемент $\mathbf{H}$ аналитически зависит от ν, по крайней мере, в полосе ($-1<\operatorname{Re}\nu<0.5$). Производные $\mathbf{u}$ по координатам — обобщенные функции, аналитические по ν [13]. При гладких внешних нагрузках $\mathbf{u}$ является аналитической функцией и при каждом фиксированном $\mathbf{r}$. Оно представимо рядом Тейлора в окрестности своей регулярной точки ν_0

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},E,\nu)=\frac{1}{E}\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{a}_i(\mathbf{r})(\nu-\nu_0)^i\qquad(0\leqslant\nu_0<0.5)$$

Поскольку граничные условия и массовые силы — функции времени, коэффициенты $\mathbf{a}_i$, как и $\mathbf{u}$, будут зависеть от параметра t

$$(1.8)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{r}, E, \nu, t) = \frac{1}{E} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_i(\mathbf{r}, t)\,(\nu-\nu_0)^i$$

Ряд сходится абсолютно, равномерно в круге сходимости, причем заведомо сходится в круге радиуса R_1, если $R_1 < 0.5-\nu_0$.

Перейдем к системе уравнений вязко-упругой задачи (1.9), (1.3) и рассмотрим операторный ряд

$$(1.9)\qquad \mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\nu}_r, t) = \mathbf{E}^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (\boldsymbol{\nu}_r-\nu_0)^i \mathbf{a}_i(\mathbf{r}, t)$$

который получается, если в упругом решении (1.8) заменить упругие константы операторами вязкоупругости $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\nu}_r$ с учетом порядка в их произведении. Если норма оператора $(\boldsymbol{\nu}_r-\nu_0)$ меньше радиуса круга сходимости R_1, то операторный ряд (1.9) абсолютно сходится и представляет собой функцию операторов $\boldsymbol{\nu}_r$ и $\mathbf{E}$. Эта функция $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\nu}_r, t)$ удовлетворяет системе (1.2), (1.3) поскольку ряд (1.16) является решением (1.4) — (1.7). Вообще аналитическую функцию операторов $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\nu}_r$ [14] в данной задаче следует понимать как ряд (1.19), где $\mathbf{a}_i$ — коэффициенты Тейлора

$$\mathbf{a}_i = \frac{E}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \nu^i} \mathbf{u}(\mathbf{r}, E, \nu, t)\,|_{\nu=\nu_0}$$

Эту функцию можно представить также в виде контурного интеграла по ν от оператора $(\boldsymbol{\nu}_r-\nu)^{-1}$ [15]. В простых случаях, например, если $\mathbf{u}$ — дробно-рациональная функция ν, это выражение сравнительно просто расшифровывается, но в общем случае приходится иметь дело с операторным рядом или интегралом от оператора по некоторому контуру Γ.

Таким образом, показано, что существует решение задачи (1.2), (1.3) в случае некоммутативных операторов. Оно получится заменой в упругом решении упругих констант операторами вязкоупругости в указанном порядке. Это утверждение в случае коммутативных операторов совпадает с принципом Вольтерра [3, 4]. Данный принцип, по существу, основывается на аналитичности по ν упругого решения, по крайней мере в области $(-1 < \operatorname{Re}\nu < 0.5)$. В ходе рассуждений использовалось также неравенство $\|\boldsymbol{\nu}_r-\boldsymbol{\nu}_0\| < (0.5-\nu_0)$, которое требует самостоятельного исследования с привлечением пространств с весовыми нормами.

Аналогично исследуется вторая краевая задача. Здесь удобно использовать не $\boldsymbol{\nu}_r$, а $\boldsymbol{\nu}_l$. Решение представляется рядом

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{\infty} (\boldsymbol{\nu}_l-\nu_0)^i \mathbf{a}_i(\mathbf{r}, t)$$

Решение же смешанной задачи имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (\boldsymbol{\nu}_r-\nu_0)^i \mathbf{a}_i(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=0}^{\infty} (\boldsymbol{\nu}_l-\nu_0)^i \mathbf{c}_i(\mathbf{r}, t)$$

Рассмотрим некоторый параметр напряженно-деформированного состояния $\mathbf{U}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\nu}_r, t)$ (скаляр, вектор или тензор) и пусть этот параметр может быть образован из вектора $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\nu}_r, t)$ с помощью некоторого оператора $\mathbf{M}^{\vee}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\nu}_r)$ по координатам. Если зависимость последнего от $\boldsymbol{\nu}_r$ аналитическая, то снова приходим к аналитической функции от ν_r. Все рассуждения, аналогичные изложенным выше, проходят для функции $\mathbf{U}(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{v}_r, t)$ и, следовательно, справедлив обобщенный принцип Вольтерра. При этом добавляются точки неаналитичности оператора $\mathbf{M}^\vee$, и радиус сходимости ряда Тейлора может измениться, поэтому каждый конкретный случай требует определения особых точек оператора $\mathbf{M}^\vee$. Например, напряжения находятся по формулам (1.3), (1.4) и оператор $\mathbf{M}^\vee$ имеет особые точки $\nu={}^1/_2$, $\nu=-1$, $\nu=\infty$.

2. Метод аналитического продолжения. Операторный ряд Тейлора (1.19) дает в принципе решение любой граничной задачи, если известно соответствующее упругое решение. Однако подобные операторные ряды не представляют интереса для практики, так как вычисление произведения операторов трудоемко, а для больших степеней фактически невыполнимо. Поэтому рассмотрим тот же ряд (1.19) с точки зрения разложения решения вязко-упругой задачи по малому оператору $(\mathbf{v}_r-\nu_0)$ и за приближенное решение примем отрезок из нескольких первых членов ряда

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{r}; \mathbf{E}. \mathbf{v}_r, t)=\mathbf{E}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}(\mathbf{v}_r-\mathbf{v}_0)^i\mathbf{a}_i(\mathbf{r}, t) \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{a}_i$ — коэффициенты Тейлора соответствующей упругой задачи

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{r}, t)=\frac{E}{i!}\frac{\partial^i}{\partial\nu^i}\mathbf{u}(\mathbf{r}, E, \nu, t)\,|_{\nu=\nu_0} \tag{2.2}$$

Если дано аналитическое выражение $\mathbf{u}(\mathbf{r}, E, \nu, t)$, то определение нескольких производных (2.2) низкого порядка не представляет труда. Однако таким образом невозможно оценить производные любого порядка и соответственно оценить точность аппроксимации (2.1). Трудности на этом пути становятся принципиальными при необходимости численно решать упругую задачу. Действительно, численное дифференцирование является некорректной операцией, из-за чего невозможно оценить не только остаток ряда (1.19), но даже и точность определения первых коэффициентов $\mathbf{a}_i(\mathbf{r}, t)$ в аппроксимации (2.1). Эти трудности не возникают, если использовать метод аналитического продолжения упругой задачи. Численно или аналитически ищется решение $\mathbf{u}(\mathbf{r}, E, \nu, t)$ упругой задачи (1.14), (1.15) при комплексных значениях ν, принадлежащих некоторому контуру Γ, охватывающему точку ν_0 в плоскости комплексного переменного ν. Затем производные (2.2) определяются с помощью корректной операции интегрирования по контуру Γ

$$\mathbf{a}_k(\mathbf{r}, \nu_0, t)=\frac{E}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}, \nu, t)}{(\nu-\nu_0)^{k+1}}\,d\nu \tag{2.3}$$

Контур Γ выбирается так, чтобы удобнее было вычислять интегралы (2.3) и радиус R вписанной в Γ окружности с центром ν_0 был больше нормы $\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|$. При этом $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \nu, t)$ представляет собой аналитическое продолжение упругого решения как функции ν с интервала действительной оси $(-1<\nu<{}^1/_2)$ в плоскость комплексных ν. Таким образом, вначале решается упругая задача с комплексными значениями ν, принадлежащими линии Γ. Как правило, это не сложнее решения обычной упругой задачи. Затем по квадратурным формулам численно или аналитически вычисляются интегралы (2.3). В отличие от численного дифференцирования здесь все операции корректны, что позволяет оценить точность используемых приближений.

По большей части следует ограничиваться нулевым и первым членами. Нулевой член ряда Тейлора — это упругое решение с коэффициентом Пуассона ν_0. Следующий линейный по $\boldsymbol{\nu}_r$ член также без труда определяется и имеет вид

$$E^{-1}[\boldsymbol{\nu}_r \mathbf{a}_1(\mathbf{r}, \nu_0, t) - \nu_0 \mathbf{a}_1(\mathbf{r}, \nu_0, t)]$$

Если по заданным массовым и поверхностным силам требуется определить параметр напряженного состояния, то решение зависит от одного оператора $\boldsymbol{\nu}_r$

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}_r, t) = \mathbf{a}_0(\mathbf{r}, \nu_0, t) - \nu_0 \mathbf{a}_1(\mathbf{r}, \nu_0, t) + \boldsymbol{\nu}_r \mathbf{a}_1(\mathbf{r}, \nu_0, t)$$

Часто приходится определять функцию $\mathbf{U}_1$ деформированного состояния (например перемещения в теле) при заданных поверхностных и массовых силах, действующих на тело. Тогда первое приближение имеет вид

$$\mathbf{U}_1(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\nu}_r, t) = E^{-1}\{\mathbf{a}_0(\mathbf{r}, \nu_0, t) - \nu_0 \mathbf{a}_1(\mathbf{r}, \nu_0, t)\} + E^{-1}\boldsymbol{\nu}_r\{\mathbf{a}_1(\mathbf{r}, \nu_0, t)\}$$

В этом решении фигурируют два оператора: оператор $\mathbf{E}^{-1}$, определяемый кривой ползучести при растяжении, и оператор $\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\nu}_r$, равный оператору поперечной деформации $\boldsymbol{\psi}$, который определяется кривой поперечной деформации во времени в опытах на ползучесть. Вместо кривой поперечной деформации может быть использована кривая объемной ползучести, поскольку $\boldsymbol{\psi} = {}^1/_2 \mathbf{E}^{-1} - {}^1/_6 \mathbf{K}^{-1}$. Заметим, что экспериментально найти оператор $\boldsymbol{\psi}$ значительно проще, чем $\boldsymbol{\nu}_r$.

Таким образом, приближенное решение построено. Основным этапом здесь было построение решения соответствующей упругой задачи при значениях ν, принадлежащих контуру Γ комплексной плоскости ν, т. е. определение аналитического продолжения по ν упругого решения. После этого вязко-упругое решение получается квадратурами.

Оценим точность построенного приближенного решения, используя найденное уже аналитическое продолжение упругого решения. Для этого необходимо оценить отброшенные после m-го члены ряда (1.19).

Сначала оценим остаток ряда после $(m+n)$-го члена, а затем и n промежуточных членов. Имеем

$$\max_t |\mathbf{Eu}(\mathbf{r}\ \boldsymbol{\nu}_r, t) - \mathbf{Eu}_{m+n}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}_r, t)| =$$

$$= \max_t \left| \sum_{i=m+n+1}^{\infty} (\boldsymbol{\nu}_r - \nu_0)^i \mathbf{a}_i(\mathbf{r}, \nu_0, t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=m+n+1}^{\infty} \max_t |(\boldsymbol{\nu}_r - \nu_0)^i \mathbf{a}_i(\mathbf{r}, \nu_0, t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=m+n+1}^{\infty} \|\boldsymbol{\nu}_r - \nu_0\|^i \|\mathbf{a}_i(\mathbf{r}, \nu_0, t)\| \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

Норма интегрального оператора $\boldsymbol{\nu}_r$

$$\boldsymbol{\nu}_r \varphi(t) = \nu(t)\varphi(t) + \int_0^t K_\nu(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau$$

отображающего непрерывные функции в непрерывные, имеет вид [14]

$$\|\boldsymbol{\nu}_r - \nu_0\| = \max_t \left[|\nu(t) - \nu_0| + \int_0^t |K_\nu(t, \tau)|\, d\tau \right] \tag{2.4}$$

$$\|\mathbf{a}_i(\mathbf{r}, \nu_0, t)\| = \max_t |\mathbf{a}_i(\mathbf{r}, \nu_0, t_1)| \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

Коэффициенты Тейлора $\mathbf{a}_i$ выражаются через контурные интегралы, но с учетом того, что первые $(m+n)$ членов ряда отброшены:

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{r},\nu_0,t)=\frac{E}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r},\nu,t)-\mathbf{u}_{m+n}(\mathbf{r},\nu,t)}{(\nu-\nu_0)^i}d\nu \qquad (i=m+n+1,\ldots)$$

$$E\mathbf{u}_{m+n}(\mathbf{r},\nu,t)=\sum_{i=0}^{m+n}(\nu-\nu_0)^i\mathbf{a}_i(\mathbf{r},\nu_0,t)$$

Отсюда следует оценка

$$|\mathbf{a}_i(\mathbf{r},\nu_0,t)|\leqslant\frac{\delta(\mathbf{r},\nu_0,t)}{R^i} \qquad (i>m+n)$$

$$\delta(r,\nu_0,t)=\max_\nu|\mathbf{u}(\mathbf{r},\nu,t)-\mathbf{u}_{m+n}(\mathbf{r},\nu,t)| \qquad (\nu\in\Gamma)$$

где R — радиус вписанной в Γ окружности с центром в ν_0.

Теперь оценивается и остаток ряда

$$\max_t\left|\sum_{i=m+n+1}^{\infty}(\mathbf{v}_r-\nu_0)^i\mathbf{a}_i(\mathbf{r},\nu_0,t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{M}(\mathbf{r},\nu_0)\frac{R}{R-\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|}\times\left(\frac{\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|}{R}\right)^{m+n+1}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},\nu_0)=\max_t\delta(\mathbf{r},\nu_0,t) \qquad (0\leqslant t\leqslant T)$$

Для промежуточных n членов ряда имеем

$$\max_t\left|\sum_{i=m+n}^{m+n}(\mathbf{v}_r-\nu_0)^i\mathbf{a}_i(\mathbf{r},\nu_0,t)\right|\leqslant\sum_{i=m+1}^{m+n}\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|^i\cdot\|\mathbf{a}_i(\mathbf{r},\nu_0,t)\|=$$

$$=\sum_{i=m+1}^{m+n}\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|^i\max_t|\mathbf{a}_i(\mathbf{r},\nu_0,t)|$$

причем $\mathbf{a}_i$ вычисляются по формулам (2.3).

Окончательно имеем оценку решения

$$\max_t|\mathbf{Eu}(\mathbf{r},\mathbf{v}_r,t)-\mathbf{Eu}_m(\mathbf{r},\mathbf{v}_r,t)|\leqslant \tag{2.5}$$

$$\leqslant\sum_{i=m+1}^{m+n}\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|^i\max_t|\mathbf{a}_i(\mathbf{r},\nu_0,t)|+$$

$$+\mathbf{M}(\mathbf{r},\nu_0)\frac{R}{R-\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|}\left(\frac{\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|}{R}\right)^{m+n-1}$$

Оценка (2.15) тем лучше, чем больше числа m и n. Можно было бы и не выделять промежуточные n членов ряда ($n=0$), однако описанная процедура улучшает оценку как за счет уменьшения функции $\mathbf{M}$, так и показателя $(m+n-1)$ при малом параметре $\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|/R$.

Оценка (2.15) существенно зависит от выбора контура **Г**. Эта зависимость осуществляется через сомножители

$$\mathrm{M}(\mathbf{r}, \nu_0), \quad \frac{R}{R-\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|} \quad \left(\frac{\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|}{R}\right)^{m+n-1}$$

Для конкретного значения нормы $\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|$ контур нельзя брать слишком узким, так как тогда растет средний сомножитель $R / (R-\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|)$. Если **Г** брать максимально широким, так чтобы R стремился к радиусу сходимости ряда Тейлора, то неограниченно растет первый сомножитель $\mathrm{M}(\mathbf{r}, \nu_0)$. Таким образом, оптимальной оценка будет при некотором среднем положении **Г**. Следует строить оценку для нескольких различных контуров и выбирать тот, который дает наилучшую. Для каждой величины нормы $\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|$ будет свой оптимальный контур **Г**.

Отличительной особенностью данного метода является возможность почти без дополнительных расчетов оценить точность приближенного решения.

Рассмотрим важный класс граничных условий, когда массовые и поверхностные силы или перемещения изменяются пропорционально одному или нескольким параметрам $\psi_i(t)$. Тогда решение вязко-упругой задачи имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r, t) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{u}^j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r)\,\psi_j(t)$$

Повторяя предыдущие рассуждения для каждого оператора $\mathbf{u}^j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r)$, найдем приближенные значения

$$\mathbf{u}_m{}^j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r) = \sum_{i=1}^{m_j} \mathbf{a}_i{}^j(\mathbf{r}, \nu_0)\,(\mathbf{v}-\nu_0)^i$$

и оценку нормы оператора невязки

$$\mathbf{u}^j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r) - \mathbf{u}_m{}^j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r) = \varphi_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r)$$

$$\|\varphi_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r)\| \leqslant \sum_{i=m_j+1}^{m_j+n_j} |\mathbf{a}_i{}^j(\mathbf{r}, \nu_0)|\,\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|^i +$$

$$+\mathbf{M}_j(\mathbf{r}, \nu_0)\frac{R_j}{R_j-\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|}\left(\frac{\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|}{R_j}\right)^{m_j+n_j-1}$$

$$\mathbf{M}_j(\mathbf{r}, \nu_0) = \max_\nu |\mathbf{u}^j(\mathbf{r}, \nu) - \mathbf{u}_{m_j+n_j}(\mathbf{r}, \nu)| \qquad (\nu \in \mathbf{\Gamma})$$

За малый оператор не обязательно принимать разность $(\mathbf{v}_r-\nu_0)$. Все рассуждения допускают обобщение на случай, когда в качестве малого оператора используется любая аналитическая функция $(\mathbf{v}_r-\nu_0)$.

При оценке точности приближенного решения рассматривались непрерывные по времени величины и операторы с абсолютно интегрируемыми ядрами. В этом случае нормы функций и операторов даются соотношениями (2.4). Ограничения типа непрерывности обычно не стеснительны, однако следует отметить, что выбор пространства функций и соответствующего вида норм для операторов в данном методе не абсолютизируется и зависит от постановки конкретной задачи. Например, в некоторых случаях удобно вводить пространства с весовыми нормами.

Описанный метод переносится на задачи для кусочнонеоднородных тел и другие, в которых расшифровываются функции одного или нескольких операторов вязкоупругости. Функция разлагается в ряд, строятся первые коэффициенты Тейлора, а остаток ряда оценивается. В каждом конкретном случае приходится исследовать область аналитичности соответствующего упругого решения.

В некоторых задачах можно определить область аналитичности по ν упругого решения. Тем самым расширяется контур Γ и улучшается оценка погрешности. Например, в задаче о равновесии шара под действием поверхностных сил решение имеет полюса по ν, которые все лежат на отрицательной полуоси. Ближайший из них находится в точке $\nu=-1.2$. В этой задаче можно принять $\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|<1.2+\nu_0$ и строить и оценивать решение, не зная конкретного вида оператора $\mathbf{v}_r$.

Если кроме поверхностных сил или перемещений имеются массовые силы $\mathbf{f}$, заданные, например, своим потенциалом Φ ($\mathbf{f}=\operatorname{grad}\Phi$), то соответствующее силам $\mathbf{F}$ частное решение уравнений теории упругости $\mathbf{u}_1$ имеет вид [16]

$$\mathbf{u}_1=\operatorname{grad}\chi,\qquad \Delta^2\chi=\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)}\Phi. \tag{2.6}$$

Решение задачи $\mathbf{u}$ есть сумма этого частного решения и решения граничной задачи без массовых сил, где из граничных условий исходной задачи вычтено значение $\mathbf{u}_1$ на поверхности. Эти последние имеют множитель $1/(1-\nu)$, из-за чего второе слагаемое в решении, как и (2.16), имеет по ν полюс $\nu=1$. Таким образом, при наличии массовых сил упругое решение имеет полюс $\nu=1$, что может значительно изменить радиус сходимости ряда Тейлора, особенно в первой задаче.

3. Пример. Рассмотрим круглую пластину, защемленную по краю, под действием равномерной нагрузки $p(t)$. Перемещения пластины $w(r,t)$ в упругом случае имеют вид

$$w(r,t)=\frac{3(1-\nu^2)}{16Eh^3}p(t)(R^2-r^2)$$

где h – толщина пластины, R – ее радиус. Согласно обобщенному принципу Вольтерра (1.9), вязко-упругое решение получается заменой E и ν на операторы E и $\mathbf{v}_r$ в следующем порядке:

$$w(r,t)=\frac{3(R^2-r^2)}{16h^3}\mathrm{E}^{-1}(1-\mathbf{v}_r^2)p(t)\equiv w^0(r)\mathrm{E}^{-1}(1-\mathbf{v}_r^2)p(t)$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{E}\frac{w(r,t)}{w^0(r)}\equiv f(t)=[(1-\nu_0^2)+2\nu_0(\mathbf{v}_r-\nu_0)+(\mathbf{v}_r-\nu_0)^2]p(t)$$

В нулевом приближении примем $(1-\mathbf{v}_r^2)\approx(1-\nu_0^2)$ и оценим точность приближенного решения. Норма оператора невязки δ_0 равного

$$\delta_0=(1-\mathbf{v}_r^2)-(1-\nu_0^2)=2\nu_0(\mathbf{v}_r-\nu_{01}+(\mathbf{v}_r-\nu_0)^2$$

дается выражением

$$\|2\nu_0(\mathbf{v}_r-\nu_0)+(\mathbf{v}_r-\nu_0)^2\|\leqslant\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|(2\nu_0+\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|)$$

Рассмотрим относительную ошибку η_0

$$\eta_0=\frac{\|\delta_0\|}{\|1-\nu_0^2\|}\leqslant\frac{\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|(2\nu_0+\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|)}{1-\nu_0^2}$$

Легко видеть, что при реальных параметрах вязко-упругих материалов ошибка η_0 может меняться в широких пределах. Например, в случае $\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|=0.25$; $\nu_0=0.25$ она достигает 20%. Следует отметить, что подобная погрешность может иметь место и в прогибах, причем в важном случае ступенчатой нагрузки $p(t)=H(t)p_0$.

Рассмотрим следующее приближение:

$$(1-\mathbf{v}_r^2)\cong(1-\nu_0^2)+2\nu_0(\mathbf{v}_r-\nu_0)=1+\nu_0^2+2\nu_0\mathbf{v}_r$$

Норма оператора невязки оценивается просто

$$\|\delta_1\|=\|(\mathbf{v}_r-\nu_0)^2\|\leqslant\|\mathbf{v}_r-\nu_0\|^2$$

а относительная ошибка η_1 в том же случае менее 8%.

Разобранный элементарный пример интересен тем, что, по существу, исследовался оператор изгибной жесткости, который фигурирует во всех расчетах пластин и оболочек. При этом обнаружено, что ошибка широко распространенного нулевого приближения может быть значительной. Если известна кривая объемной ползучести или кривая поперечной деформации в опыте на одноосную ползучесть, то легко определяется первое приближение, точность которого в несколько раз выше.

Поступила 25 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volterra V.* Leçons sur les fonctions des lignes, Paris, 1913.
2. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
3. *Бленд Д. Р.* Линейная теория вязкоупругости. М., Изд-во иностр. лит., 1965.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
5. *Ефимов А. Б.* Некоторые квазистатические задачи для вязкоупругого полупространства. Механика полимеров, 1966, № 3.
6. *Харлаб В. Д.* Распространение принципа Вольтерра на случай некоммутативных операторов. В сб.: Прочность и пластичность, М., «Наука», 1971.
7. *Ефимов А. Б., Малый В. И.* О приближенном решении задач линейной вязкоупругости. ПММ, 1971, т. 35, № 1.
8. *Lee E. H., Radok J. R. M.* The contact problem for viscoelastic bodies. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 3.
9. *Ефимов А. Б.* Осесимметрическая контактная задача для линейно вязко-упругих тел. Вестн. МГУ. Сер. механ.-матем., 1966, № 2.
10. *Михлин С. Г.* О функциях Коссера. В сб.: Проблемы математического анализа. Изд-во ЛГУ, 1966.
11. *Михлин С. Г.* Дальнейшее исследование функций Коссера. Вестн. ЛГУ, 1967, № 7.
12. *Михлин С. Г.* Некоторые свойства спектра Коссера пространственных и плоских задач теории упругости. Вестн. ЛГУ, 1970, № 7.
13. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
14. Функциональный анализ. СМБ, М., «Наука», 1972.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
16. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.