1974 МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА № 1

УДК 539.375

# ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПОПЕРЕЧНАЯ ТРЕЩИНА В ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЕ

**А. И. ЗОБНИН, Е. В. ЛОМАКИН**

(*Москва*)

Широкое использование в конструкциях элементов из анизотропных материалов приводит к необходимости изучения поведения этих элементов при нагрузках, близких к критическим. Для подобных исследований необходимо знать зависимость коэффициента интенсивности напряжений $K_{\text{I}}$ от относительных размеров тела, включая и длину трещины ($K$-тарировка) при различных видах нагружения. В данной работе получена тарировочная зависимость для растяжения полосы ширины $2b$ с центральной поперечной трещиной длины $2l$, противоположные берега которой загружены равными и противоположно направленными нагрузками $p(x)$.

В изотропном случае существует ряд решений подобной задачи [1–5].

В [3] использовался метод разложения комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили в ряды по степеням $\lambda=l/b$. В [4] применялся метод интегральных преобразований, сводящий решение исходной задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, разложение ядра которого по степеням $\lambda$ приводит к рекуррентному соотношению, позволяющему последовательно вычислять точные коэффициенты ряда $K_{\text{I}}(\lambda)$. В [5] предложено в качестве первого приближения взять решение задачи о бесконечном теле с периодической системой трещин, у которых смещение берегов считается заданным. Возникающие невязки в граничных условиях на кромках полосы ликвидируются наложением соответствующего решения задачи о ненадрезанной полосе. Требование того, чтобы сумма вкладов от этих двух решений в нормальное напряжение на берегах трещины равнялась $-p(x)$, приводит к сингулярному интегральному уравнению относительно смещения берегов трещины.

Численное решение задачи о центральной поперечной трещине в пластинке конечной длины $2L$ [6–10] показало, что при $L>2b$ влияние границ, параллельных трещине, на величину $K_{\text{I}}$ весьма мало и решение хорошо согласуется с решением задачи о бесконечной полосе.

Известно, что в бесконечном ортотропном теле с системой коллинеарных трещин, загруженных по берегам самоуравновешенными нагрузками, коэффициенты интенсивности напряжений вблизи концов трещин будут такими же, как в изотропном случае [7]. Решение задачи о достаточно длинной пластинке ($L\sim 3b$) из существенно ортотропного материала также показывает, что влияние анизотропии на $K_{\text{I}}$ незначительно [7]. Подобного вывода для короткой пластинки ($L\sim b$) сделать нельзя [7, 9].

В связи со сказанным возникает вопрос о пределах применимости изотропной $K$-тарировки для полосы из анизотропного материала. Авторами построена тарировочная зависимость для ортотропной полосы с центральной поперечной трещиной. В качестве метода решения использовалась некоторая комбинация методов, примененных в работах [4, 5].

1. Рассмотрим полосу (фиг. 1) $-b\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<y<+\infty$ с трещиной $-l<x<l$, $y=0$. Предположим, что оси ортотропии параллельны осям $Ox$ и $Oy$. В этом случае напряженное состояние описывается [11] двумя аналитическими функциями $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, где $z_1=x+\mu_1 y$, $z_2=x+\mu_2 y$. Параметры $\mu_1$, $\mu_2$, $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ являются корнями характеристического уравнения

$$\beta_{11}\mu^4+(2\beta_{12}+\beta_{66})\mu^2+\beta_{22}=0$$

где $\beta_{ij}=a_{ij}-a_{i3}a_{j3}a_{33}^{-1}$ при плоской деформации и $\beta_{ij}=a_{ij}$ — при плоском напряженном состоянии ($a_{ij}$ — коэффициенты деформации).

Пусть корни характеристического уравнения чисто мнимые и различные, т. е. $\mu_1=i\beta_1$, $\mu_2=i\beta_2$ и $\beta_2>\beta_1>0$. Это условие выполняется для большинства реальных материалов [11].

Граничные условия задачи имеют вид

(1.1) $\sigma_y(x,0)=-p(x),\quad \tau_{xy}(x,0)=0,\qquad |x|<l$

(1.2) $\sigma_x(\pm b,y)=\tau_{xy}(\pm b,y)=0,\qquad -\infty<|y|<+\infty$

В дальнейшем предполагается, что $p(x)=p(-x)$. В силу симметрии задачи относительно оси $Ox$ к граничным можно добавить следующие условия:

$$\tau_{xy}(x,0)=0,\qquad |x|\leqslant b$$
$$v(x,0)=0,\qquad l<|x|\leqslant b$$

Обозначим вертикальные смещения берегов разреза

(1.3) $v(x,\pm 0)=\pm f(x),\qquad |x|<l\qquad (f(x)=f(-x))$

Решение исходной задачи (1.1), (1.2) построим как сумму решений двух задач [5]:

1. $\sigma_{ij}^{(1)}, v_i^{(1)}$ — решение задачи о бесконечном теле с трещиной, на берегах которой заданы смещения (1.3) и отсутствуют сдвиговые напряжения (1.1).

2. $\sigma_{ij}^{(2)}, v_i^{(2)}$ — решение задачи о ненадрезанной полосе с заданными на кромках $x=\pm b$ напряжениями, определяемыми из решения задачи 1.

(1.4) $\sigma_x^{(2)}(\pm b,y)=-\sigma_x^{(1)}(\pm b,y)$

$$\tau_{xy}^{(2)}(\pm b,y)=-\tau_{xy}^{(1)}(\pm b,y)$$

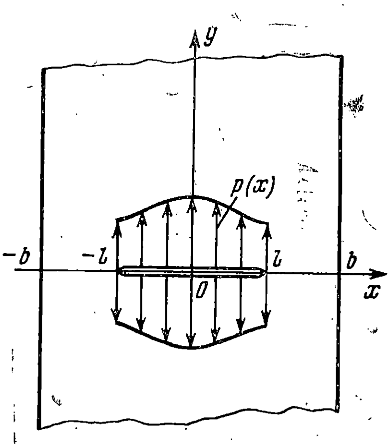
В силу симметрии задач 1 и 2 относительно оси $Ox$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x,0)=0$$
$$v^{(2)}(x,0)=0,\qquad |x|\leqslant b$$

Потребуем, чтобы на берегах трещины выполнялось условие

(1.5) $\sigma_y^{(1)}(x,0)+\sigma_y^{(2)}(x,0)=$

$$=-p(x),\qquad |x|<l$$




Фиг. 1

Тогда $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)},\quad v_i=v_i^{(1)}+v_i^{(2)}$

будет решением исходной задачи (1.1), (1.2).

Построим решение задачи 1. В силу симметрии можно ограничиться рассмотрением нижней полуплоскости. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$\tau_{xy}(x,0)=0,\qquad -\infty<x<+\infty,\qquad v(x,0)=\begin{cases}-f(x), & |x|<l\\ 0, & |x|>l\end{cases}$$

Данная задача приводится [12] к частному случаю задачи Римана — Гильберта для функции

$$w_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_y(\xi,0)\,d\xi}{\xi-z}$$

с граничным условием

$$\operatorname{Re} w_1(x-i0)=\begin{cases}-\pi\beta_1\beta_2 f'(x)\,/\,(\beta_1+\beta_2)\beta_{22}, & |x|<l\\ 0, & |x|>l\end{cases}$$

Решением этой задачи служит функция

$$w_1(z)=-\frac{i\beta_1\beta_2}{(\beta_1+\beta_2)\beta_{22}}\int_{-l}^{l}\frac{f'(\xi)\,d\xi}{\xi-z} \tag{1.6}$$

Напряжение $\sigma_y$ на оси $y=0$ найдем, применив к (1.6) формулу Сохоцкого — Племеля

$$\sigma_y^{(1)}(x,0)=\frac{\beta_1\beta_2}{\pi(\beta_1+\beta_2)\beta_{22}}\int_{-l}^{l}\frac{f'(\xi)\,d\xi}{\xi-x} \tag{1.7}$$

Величины $\sigma_x^{(1)}(\pm b,y)$ и $\tau_{xy}^{(1)}(\pm b,y)$, необходимые для определения граничных условий (1.4) задачи 2, получим, выразив по известным формулам [12] через функцию $w_1(z)$ сначала комплексные потенциалы $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, а затем напряжения $\sigma_x$ и $\tau_{xy}$

$$\begin{aligned}\Phi_1'(z_1)&=\beta_2[2\pi i(\beta_2-\beta_1)]^{-1}w_1(z_1)\\ \Phi_2'(z_2)&=-\beta_1[2\pi i(\beta_2-\beta_1)]^{-1}w_2(z_2)\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x&=-2\operatorname{Re}[\beta_1^2\Phi_1'(z_1)+\beta_2^2\Phi_2'(z_2)]\\ \tau_{xy}&=2\operatorname{Im}[\beta_1\Phi_1'(z_1)+\beta_2\Phi_2'(z_2)]\end{aligned} \tag{1.9}$$

Подставляя (1.6) и (1.8) в (1.9), получим

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1)}(x,y)&=A\int_{-l}^{l}f'(\xi)(\xi-x)\left[\frac{\beta_1}{(\xi-x)^2+\beta_1^2y^2}-\frac{\beta_2}{(\xi-x)^2+\beta_2^2y^2}\right]d\xi\\ \tau_{xy}^{(1)}(x,y)&=-A\int_{-l}^{l}f'(\xi)\,y\left[\frac{\beta_1}{(\xi-x)^2+\beta_1^2y^2}-\frac{\beta_2}{(\xi-x)^2+\beta_2^2y^2}\right]d\xi\end{aligned} \tag{1.10}$$

где $A=\beta_1^2\beta_2^2[\pi\beta_{22}(\beta_2^2-\beta_1^2)]^{-1}$.

Из (1.10) следует, что

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1)}(b,y)&=\sigma_x^{(1)}(-b,y)={}^1/_2[\sigma_x^{(1)}(b,y)+\sigma_x^{(1)}(-b,y)]\\ \tau_{xy}^{(1)}(b,y)&=-\tau_{xy}^{(1)}(-b,y)={}^1/_2[\tau_{xy}^{(1)}(b,y)-\tau_{xy}^{(1)}(-b,y)]\end{aligned} \tag{1.11}$$

Это означает, что нагрузка в задаче 2 для ненадрезанной полосы является симметричной. Решение такой задачи легко получить методом интегральных преобразований аналогично соответствующему решению для изотропной полосы [13]. Применяя к полученным выражениям компонент $\sigma^{(1)}(x,y)$ преобразование Фурье по $y$ с параметром $\omega$, получим для образов $\Sigma_{ij}(x, \omega)$

$$\Sigma_x(x,\omega)=\pi A\int_{-l} f'(\xi)\operatorname{sgn}(\xi-x)\times \tag{1.12}$$
$$\times\left[\exp\left(-\frac{|\omega(\xi-x)|}{\beta_1}\right)-\exp\left(-\frac{|\omega(\xi-x)|}{\beta_2}\right)\right]d\xi$$

Из (1.12) с помощью (1.11) представим граничное условие задачи 2 в симметризованной форме

$$\Sigma_x(b,\omega)=-\pi A\int_{-l}^{l} f'(\xi)\left[\exp\left(\frac{-|\omega|b}{\beta_1}\right)\operatorname{sh}\frac{|\omega|\xi}{\beta_1}-\right.$$
$$\left.-\exp\left(\frac{-|\omega|b}{\beta_2}\right)\operatorname{sh}\frac{|\omega|\xi}{\beta_2}\right]d\xi$$

Аналогичные вычисления для $\tau_{xy}^{(1)}(x, y)$ дают

$$\Sigma_{xy}(b,\omega)=\pi iA\operatorname{sgn}\omega\int_{-l}^{l} f'(\xi)\left[\frac{1}{\beta_1}\exp\left(\frac{-|\omega|b}{\beta_1}\right)\operatorname{sh}\frac{|\omega|\xi}{\beta_1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\beta_2}\exp\left(\frac{-|\omega|b}{\beta_2}\right)\operatorname{sh}\frac{|\omega|\xi}{\beta_2}\right]d\xi$$

Решение задачи о ненадрезанной полосе имеет вид

$$\Sigma_y(x,\omega)=(\Delta_1\Sigma_x(b,\omega)+i\Delta_2\Sigma_{xy}(b,\omega))\Delta^{-1} \tag{1.13}$$

где

$$\Delta_1=\beta_1^{-2}\beta_2^{-1}\operatorname{sh}(\omega b/\beta_2)\operatorname{ch}(\omega x/\beta_1)-\beta_1^{-1}\beta_2^{-2}\operatorname{sh}(\omega b/\beta_1)\operatorname{ch}(\omega x/\beta_2)$$
$$\Delta_2=\beta_1^{-2}\operatorname{ch}(\omega b/\beta_2)\operatorname{ch}(\omega x/\beta_1)-\beta_2^{-2}\operatorname{ch}(\omega b/\beta_1)\operatorname{ch}(\omega x/\beta_2)$$
$$\Delta=\beta_2^{-1}\operatorname{sh}(\omega b/\beta_2)\operatorname{ch}(\omega b/\beta_1)-\beta_1^{-1}\operatorname{sh}(\omega b/\beta_1)\operatorname{ch}(\omega b/\beta_2)$$

Применяя к (1.13) формулу обращения и вводя безразмерные параметры $u=\omega b/\beta_1$, $t=x/l$, $s=\xi/l$, $\lambda=l/b$, $k=\beta_1/\beta_2$, получим

$$\sigma_y^{(2)}(t,0)=-\frac{\beta_1}{(1+k)\beta_{22}}\int_{-1}^{1} f'(sl)K(s,t,\lambda)\,ds \tag{1.14}$$

$$K(s,t,\lambda)=\int_0^\infty M(s,t,\lambda,u)\,du \tag{1.15}$$

$$M(s,t,\lambda,u)=2\lambda[k(\exp(-u)\operatorname{sh}us\lambda-\exp(-ku)\operatorname{sh}kus\lambda)\times$$
$$\times(\operatorname{sh}ku\operatorname{ch}ut\lambda-k\operatorname{sh}u\operatorname{ch}kut\lambda)+(\exp(-u)\operatorname{sh}us\lambda-$$
$$-k\exp(-ku)\operatorname{sh}kus\lambda)(\operatorname{ch}ku\operatorname{ch}ut\lambda-k^2\operatorname{ch}u\operatorname{ch}kut\lambda)]\times$$
$$\times[(1-k)((1-k)\operatorname{sh}(1+k)u+(1+k)\operatorname{sh}(1-k)u)]^{-1}$$

Подставив (1.7) и (1.14) в условие (1.5) и обозначив $p(x)=pq(t)$, $q(t)$ — безразмерная функция и $g(s)=\beta_1 f'(sl)[\pi\beta_{22}(1+k)p]^{-1}$ получим сингулярное интегральное уравнение относительно $g(s)$

$$\int_{-1}^{1} g(s)\left[\frac{1}{s-t}-K(s,t,\lambda)\right]ds=-q(t) \tag{1.16}$$

Это уравнение будем решать методом, аналогичным методу, использованному в [4].

Регуляризуем уравнение (1.16) по методу Карлемана [14], применив к обеим частям оператор

$$\varphi(t)=-\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v-t}\psi(v)\,dv$$

обратный оператору

$$\psi(t)=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)\,ds}{s-t}$$

в результате чего получим для $g(t)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$g(t)+\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}g(s)\left[\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v-t}K(s,v,\lambda)\,dv\right]ds=Q(t) \tag{1.17}$$

где

$$Q(t)=\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v-t}q(v)\,dv$$

Разложим $K(s,t,\lambda)$ и $g(t)$ по степеням $\lambda$, причем в силу симметрии задачи по $x$ разложение должно идти по четным степеням. Из (1.14) следует, что разложение ядра $K$ начнется с $\lambda^2$

$$K(s,t,\lambda)=\lambda^2\sum_{p,q=0}^{\infty}k_{pq}s^{2p+1}t^{2q}\lambda^{2p+2q}=\lambda^2\sum_{j=0}^{\infty}K_j(s,t)\lambda^{2i} \tag{1.18}$$

$$K_j(s,t)=\sum_{p=0}^{j}k_{p,j-p}s^{2p+1}t^{2j-2p},\qquad g(t)=\sum_{i=0}^{\infty}g_i(t)\lambda^{2i}$$

Подстановка (1.18) в (1.17) дает рекуррентное соотношение для $g_i(t)$

$$g_0(t)=Q(t),\quad g_i(t)=-\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-t^2}}\times \tag{1.19}$$

$$\times\sum_{j=0}^{i-1}\left\{\int_{-1}^{1}g_{i-j-1}(s)\left[\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v-t}K_j(s,v)\,dv\right]ds\right\}_{(i=1,\,2,\,\ldots)}$$

Из (1.19) следует, что $g(t)=h(t)(1-t^2)^{-1/2}$, $g_i(t)=h_i(t)(1-t^2)^{-1/2}$, где $h(t)$, $h_i(t)$ — функции, регулярные при $|t|\leqslant1$. Учитывая (1.18), преобразуем (1.19)

$$h_0(t)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}}{v-t}q(v)\,dv \tag{1.20}$$

$$h_i(t) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{m=0} k_{j-m,\, m} l_m(t) H_{i-j-1,\, j-m} \qquad (i=1,2\ldots)$$

где

$$H_{\alpha\beta} = 2\int_0^{\pi/2} h_\alpha(\sin w)(\sin w)^{2\beta+1}\, dw, \qquad l_m(t) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-v^2}}{v-t} v^{2m}\, dv$$

Соотношения (1.20) дают возможность сделать расчет тарировочной кривой

$$K_{\mathrm{I}}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i} K_{\mathrm{I}}^{(i)} = K_{\mathrm{I}}^{(0)} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2i} N_i, \qquad N_i = \frac{K_{\mathrm{I}}^{(i)}}{K_{\mathrm{I}}^{(0)}} \tag{1.21}$$

Из (1.9) следует, что при $|t|>1$ функция $\sigma_y(t,0)$ имеет особенность в точках $|t|=1$

$$\sigma_y(t,0) = p\int_{-1}^{1} \frac{h(s)\, ds}{\sqrt{1-s^2}(s-t)} \tag{1.22}$$

Подставляя (1.20) в (1.22) и используя определение коэффициента интенсивности напряжений

$$K_{\mathrm{I}} = \lim_{t\to 1} [\sigma_y(t,0)\sqrt{2\pi l(t-1)}]$$

получим выражения для коэффициентов ряда (1.21)

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)} = p\sqrt{\frac{l}{\pi}} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}\, q(v)\, dv \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{1.23}$$

$$K_{\mathrm{I}}^{(i)} = -p\sqrt{\pi l} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{m=0}^{j} k_{j-m,\, m} \tilde{H}_{i-j-1,\, j-m} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

Для вычисления коэффициентов $k_{pq}$ можно в силу равномерной сходимости интеграла (1.15) провести разложение подынтегральной функции в ряд по $s$ и $t$, который затем почленно проинтегрировать

$$k_{pq} = \int_0^{\infty} m_{pq}\, du, \qquad M(s,t,\lambda,u) = \sum_{p,q=0}^{\infty} m_{pq} s^{2p+1} t^{2q} \lambda^{2p+2q+1} \tag{1.24}$$

$$m_{pq} = \frac{2}{1-k} \frac{[k(\exp(-u) - k^{2p+1}\exp(-ku))(\operatorname{sh} ku - k^{2q+1}\operatorname{sh} u) + (\exp(-u) - k^{2p+2}\exp(-ku))(\operatorname{ch} ku - k^{2q+2}\operatorname{ch} u)]\, u^{2p+2q+1}}{[(1-k)\operatorname{sh}(1+k)u + (1+k)\operatorname{sh}(1-k)u]\,(2p+1)!\,(2q)!}$$

Зная упругие постоянные $k_{pq}$ материала, можно с помощью соотношений (1.20) и (1.23) рассчитать зависимость $K_{\mathrm{I}}(\lambda)$ для любого вида симметричной по $x$ нагрузки $p(x)$, причем $k_{pq}$ зависит только от одной упругой константы $k=\beta_1/\beta_2$ $(0<k\leqslant 1)$. Отметим, что $K_{\mathrm{I}}$ зависит от упругих свойств материала также только через $k$ ($K_{\mathrm{I}}^{(0)}$ — коэффициент интенсивности напряжений для бесконечного тела от упругих свойств, естественно, не зависит [7]). Указанное свойство делает практически возможным

исследование влияния анизотропии материала на $K_I$ для всего класса ортотропных материалов.

Подробные расчеты проводились для двух важных видов нагружения — равномерной нагрузки и сосредоточенной силы.

В случае $p(x)=p_0=\text{const}$

$$K_I^{(0)}=p_0\sqrt{\pi l},\quad N_1=k_{00}/2,\quad N_2={}^1/_8[2k_{00}^2+3k_{10}+2k_{01}]$$

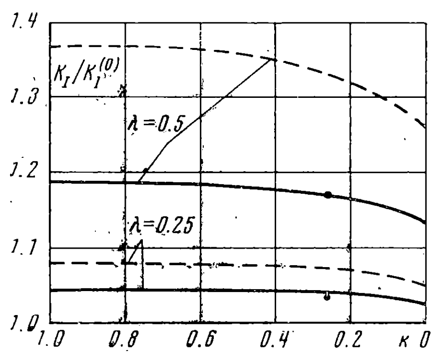
$$N_3={}^1/_{16}[2k_{00}^3+6k_{10}k_{00}+3k_{01}k_{00}+5k_{20}+3k_{11}+3k_{02}]$$

В случае сосредоточенной силы $p(x)=P\delta(0)/l$

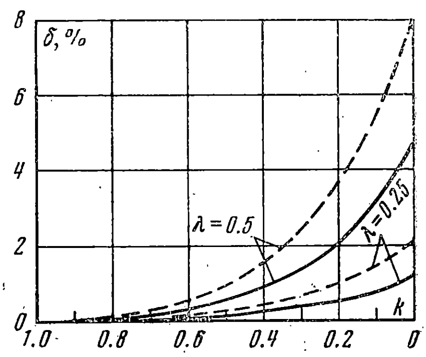
$$K_I^{(0)}=P/\sqrt{\pi l},\quad N_1=k_{00},\quad N_2={}^1/_2[k_{00}^2+k_{10}+k_{01}]$$

$$N_3={}^1/_8[2k_{00}^3+5k_{10}k_{00}+3k_{01}k_{00}+3k_{20}+2k_{11}+3k_{02}]$$

Ограничимся тремя членами тарировочного ряда. В предположении [3] о поведении его коэффициентов погрешность в вычислении $K_I$ не превысит 0.3% при $\lambda\leqslant 0.5$ для рассмотренных случаев.




Фиг. 2




Фиг. 3

В табл. 1 даны величины $N_i$ для случая равномерной нагрузки при различных значениях $k$, в табл. 2 — то же для случая сосредоточенной силы. Несмотря на то, что коэффициенты $k_{pq}$ значительно меняются с изменением $k$, величины $K_I^{(i)}$ меняются мало.

На фиг. 2 приведены графики зависимостей $K_I(k)$ при $\lambda=0.25$ и $\lambda=0.5$ для равномерной нагрузки — сплошная линия и сосредоточенной силы — пунктирная. Они показывают слабую зависимость $K_I$ от степени анизо-

*Таблица 1*

| $k$ | 0.01 | 0.06 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_1$ | 0.417 | 0.446 | 0.469 | 0.507 | 0.536 | 0.556 | 0.572 |
| $N_2$ | 0.329 | 0.364 | 0.386 | 0.426 | 0.450 | 0.461 | 0.471 |
| $N_3$ | 0.282 | 0.317 | 0.337 | 0.368 | 0.382 | 0.386 | 0.392 |
| $k$ | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.99 | 1 [3, 4] | |
| $N_1$ | 0.582 | 0.588 | 0.592 | 0.594 | 0.595 | 0.595 | |
| $N_2$ | 0.476 | 0.478 | 0.480 | 0.481 | 0.481 | 0.481 | |
| $N_3$ | 0.394 | 0.395 | 0.396 | 0.396 | 0.396 | 0.396 | |

тропии. На этой же фигуре точками отмечены значения, полученные в работе [7]. На фиг. 3 даны графики относительной погрешности $\delta$, получающейся при использовании изотропной тарировки для ортотропного материала.

Вычисленные по литературным данным значения $k$ для ряда распространенных анизотропных материалов лежат в следующих пределах: древесина 0.2—0.5 [7, 11, 15], стеклопластик 0.25—0.3 [15, 16], углепластик 0.1—0.2 [15, 17]. Эти величины получены для плоского напряженного состояния, при переходе к плоской деформации значение $k$ несколько изменяется (для углепластика [17], например, с 0.17 до 0.15).

Таким образом, согласно фиг. 2, видно, что применение изотропной тарировки для случая равномерной нагрузки даст ошибку при $\lambda \leqslant 0.25$ для

*Таблица 2*

| $k$ | 0.01 | 0.06 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_1$ | 0.835 | 0.891 | 0.932 | 1.014 | 1.073 | 1.112 | 1.144 |
| $N_2$ | 0.624 | 0.691 | 0.735 | 0.815 | 0.863 | 0.888 | 0.910 |
| $N_3$ | 0.500 | 0.564 | 0.600 | 0.649 | 0.666 | 0.666 | 0.670 |
| $k$ | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.99 | 1 [4] | |
| $N_1$ | 1.164 | 1.177 | 1.184 | 1.188 | 1.190 | 1.190 | |
| $N_2$ | 0.921 | 0.928 | 0.932 | 0.933 | 0.934 | 0.934 | |
| $N_3$ | 0.669 | 0.668 | 0.667 | 0.666 | 0.666 | — | |

древесины и стеклопластика менее 0.6%, для углепластика от 0.5% до 1%, а при $\lambda \leqslant 0.5$ соответственно менее 2.2% и от 2.2% до 3.3%.

Приведенные данные дают основания для использования изотропной $K$-тарировки при вычислении коэффициента интенсивности напряжений даже для сильно анизотропных материалов. В практическом отношении применение изотропной тарировки проще анизотропной, так как при этом не требуется знания полной системы упругих констант материала.

Поступила 5 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Irwin G. B.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 3.
2. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 3.
3. *Isida M.* Stress intensity factors for tension of an eccentrically cracked strip. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3.
4. *Гольдштейн Р. В., Рысков И. Н., Салганик Р. Л.* Центральная поперечная трещина в упругой полосе. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
5. *Bueckner H. F.* Weight function for the notched bar. Z. angew. Math. und Mech., 1971, Bd 51, H 2.
6. *Hayes D. J.* A practical application of Bueckner's formulation for determining stress intensity factors for cracked bodies. Internat. J. Fracture Mech., 1972, vol. 8, No. 2.
7. *Walsh P. F.* Linear fracture mechanics in ortotropic materials. Engng Fracture Mech., 1972, vol. 4, No. 3.
8. *Bowie O. L., Neal D. M.* A note on the central crack in a uniformly stressed strip. Engng Fracture Mech., 1970, vol. 2, No. 2.
9. *Bowie O. L., Freese C. E.* Central crack in plane ortotropic rectangular sheet. Internat. J. Fracture Mech., 1972, vol. 8, No. 1.

10. *Wilson W. K.* Numerical method for determining stress intensity factors of an interior crack in a finite plate. Trans. ASME, Ser. D. J. Basic Engng, 1971, vol. 93, No. 4.
11. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.– Л., Гостехиздат, 1950.
12. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.– Л., Гостехиздат, 1953.
13. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.– Л., Изд-во АН СССР, 1963.
14. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
15. *Harrison N. L.* Strain energy release rate for turning cracks. Fibre Sci. and Technology, 1972, vol. 5, No. 3.
16. *Gandhi K. R.* Analysis of an inclined crack centrally placed in an ortotropic rectangular plate. J. Strain Analysis, 1972, vol. 7, No. 3.
17. *Kelly A.* Interface effects and the work of fracture of a fibrous composite. Proc. Roy. Soc. London A, 1970, No. 319.