

УДК 539.374

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ МЕХАНИЗМОВ УПРУГОСТИ, ВЯЗКОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

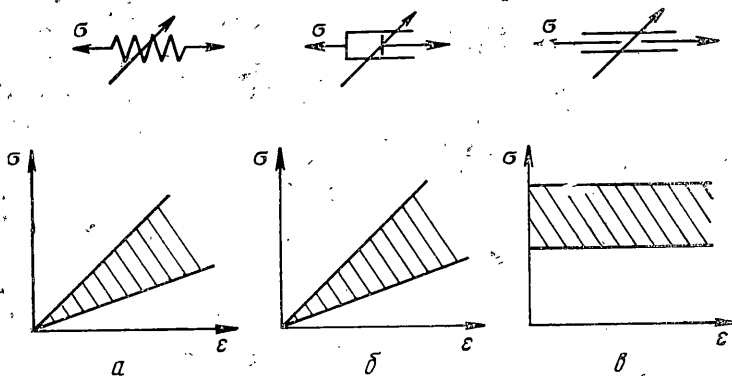
И. А. БЕРЕЖНОЙ, Н. В. ГЕРАСИМОВ, Д. Д. ИВЛЕВ

(Куйбышев, Москва)

Построению широкого класса моделей сложных сред посвящены работы [1, 2], в которых рассматриваются модели на основе комбинаций трех фундаментальных механизмов: упругого, вязкого и пластического. Многие нелинейные эффекты могут быть учтены, если определяющим параметрам приписать зависимость, например от инвариантов соответствующих тензоров. В последние годы внимание исследователей привлекли среды, свойства которых нельзя описать на основе комбинаций трех фундаментальных зависимостей с фиксированными определяющими параметрами. К таким средам можно, например, отнести твердые тела, для которых обнаружены эффекты электро- и магнитострикции. Описать свойства таких сред, с точки зрения континуальной механики, можно, рассматривая их как упругие тела с жесткостью, зависящей от напряженности электрического и магнитного полей. Получены жидкости, вязкость которых зависит от напряженности магнитного [3] и электрического [4, 5] полей. Рассматривая модель Ньютона и Максвелла с переменной вязкостью, можно описать некоторые свойства таких жидкостей.

1. Рассмотрим механизм (элемент) упругости, вязкости и пластичности с переменными определяющими параметрами. Свойство переменности определяющих параметров символически будем обозначать перечеркиванием соответствующего элемента стрелкой, как это показано на фиг. 1, *a* — *в*.

В отличие от механизмов с фиксированными определяющими параметрами рассматриваемые механизмы характеризуются для мгновенно фиксированных значений переменных пучками в заштрихованных областях.



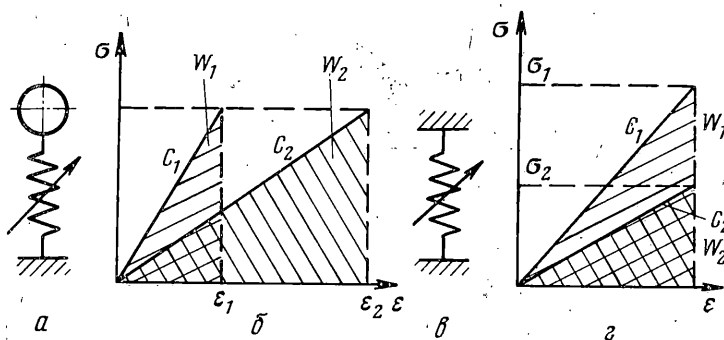
Фиг. 1

Отметим некоторые свойства этих механизмов.

При наличии деформации упругого элемента изменение жесткости требует дополнительного внешнего источника и потребителя энергии. Это следует из того факта, что внутренняя энергия W нагруженного упругого элемента меняется при изменении жесткости (фиг. 2), и это изменение возможно только при подводе и отводе энергии. Так при постоянной нагрузке

(фиг. 2, а, б) увеличение жесткости сопровождается подводом энергии, а уменьшение жесткости — отводом энергии. При постоянной деформации (фиг. 2, в, г) увеличение жесткости так же связано с подводом энергии, а уменьшение жесткости — с отводом энергии.

Упругий элемент с переменной жесткостью перестает быть консервативным, на замкнутом цикле деформирования он может производить и рассеивать энергию. Например, если упругий элемент нагрузить периодической силой и с тем же периодом изменять жесткость, то сдвигом фазы между законом изменения нагрузки и изменением жесткости можно управлять



Фиг. 2

величиной и знаком работы, производимой упругим элементом за цикл деформирования. Когда нагрузка изменяется по закону $\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi)$, а жесткость — $c(t) = c_0(1 + \lambda \sin \omega t)$, работа силы упругости за период T определится выражением

$$(1.1) \quad A = \int_0^T \varepsilon(t) c(t) \dot{\varepsilon}(t) dt = \frac{\pi \sigma_0^2 \psi(\lambda)}{c_0} \sin 2\varphi$$

$$\psi(\lambda) = (1 + \lambda^{-2} + \lambda^{-3})(1 - \lambda^2)^{-1/2} - (2 + 3\lambda)(1 - \lambda^2)^{-3/2} - \lambda^{-2} - \lambda^{-3}$$

Отсюда непосредственно видна связь величины и знака работы с фазовым сдвигом φ .

Таким образом, изменением жесткости можно управлять подводом и отводом энергии в механической системе. С этих позиций тепловую машину — двигатель внутреннего сгорания — можно рассматривать как упругий элемент с переменной жесткостью, который за цикл совершает отрицательную работу.

Остановимся теперь на свойствах вязкого элемента.

На изменение вязкости в элементе вязкого сопротивления работа не затрачивается. При положительной вязкости элемент вязкого сопротивления всегда рассеивает энергию и диссипация механической энергии D , которая в общем случае определяется скалярным произведением вектора обобщенной скорости на вектор обобщенной силы, всегда положительна. При $\mu(t) > 0$ $D = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} > 0$, и работа силы вязкого сопротивления при деформационном нагружении

$$A = \int_0^t \varepsilon^2(t) \mu(t) dt > 0$$

При силовом нагружении работа также больше нуля

$$A = \int_0^t \sigma^2(t) \mu^{-1}(t) dt > 0$$

Если вязкий элемент нагрузить симметричной периодической силой и с тем же периодом изменять коэффициент вязкости, то появляется постоянная составляющая скорости деформации вязкого элемента, величина и знак которой зависят от фазы между законом изменения нагрузки и законом изменения вязкости. Например, при нагрузке $\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi)$ и законе изменения вязкости $\mu(t) = \mu_0(1 + \lambda \sin \omega t)$ постоянная составляющая скорости деформации $\langle \dot{\epsilon} \rangle$ определяется выражением

$$(1.2) \quad \langle \dot{\epsilon} \rangle = - \frac{\sigma_0 \lambda}{\mu_0(1 + \sqrt{1 - \lambda^2} - \lambda)} \cos \varphi$$

Отсюда видно, что величина и знак постоянной составляющей $\langle \dot{\epsilon} \rangle$ зависят от фазы φ .

При действии на вязкий элемент симметричной периодической деформационной нагрузки изменением вязкости можно получить несимметричную силу в вязком элементе, постоянная составляющая которой будет зависеть от фазовых соотношений между законом изменения нагрузки и законом изменения вязкости. Когда деформационная нагрузка изменяется по закону $\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t + \varphi)$, а вязкость $\mu(t) = \mu_0(1 + \lambda \sin \omega t)$, то постоянная составляющая $\langle \sigma \rangle$ будет

$$(1.3) \quad \langle \sigma \rangle = -1/2 \epsilon_0 \mu_0 \lambda \sin \varphi$$

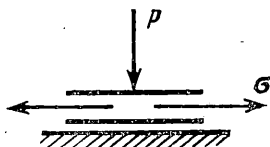
Сравнивая вязкий элемент с постоянной вязкостью и вязкий элемент с переменной вязкостью, отметим, что оба они при положительном коэффициенте вязкости всегда рассеивают энергию. Однако возможность создания несимметричной силы в вязком элементе при его деформировании придает его свойствам существенное отличие, позволяющее устойчивые колебания некоторых систем сделать неустойчивыми и наоборот.

Например, свободные колебания маятника на вращающемся валу при отсутствии трения не затухают. Если между валом и маятником ввести вязкий элемент, то маятник остановится. Если же ввести элемент с переменной вязкостью, то в зависимости от закона изменения вязкости колебания маятника можно сделать непрерывно нарастающими или погасить их.

Рассмотрим пластический элемент. Механизм изменения силы сухого трения можно представить как показано на фиг. 3. При постоянном коэффициенте трения сила сухого трения пропорциональна силе нормального давления P .

Так как сила P перпендикулярна движению, то она работы не производит, и, следовательно, на изменение силы трения работа не затрачивается.

Поскольку закон изменения силы нормального давления P произволен, то элементом пластичности с переменной силой сухого трения можно воспроизвести вязкий элемент как с постоянной, так и с переменной вязкостью. Поэтому все свойства вязкого элемента остаются в силе для элемента пластичности с переменной силой сухого трения.



Фиг. 3

2. Рассмотрим поведение моделей сложных сред на примере хорошо изученных моделей Фойгта и Максвелла, приписав упругому и вязкому механизмам зависимость от некоторого параметра χ_i , которым может быть время или напряженность электрического или магнитного полей. Инерционными свойствами элементов моделей будем пренебрегать.

Полагая также, что внешняя нагрузка $\sigma(\chi_i)$ зависит от времени или других параметров, получим дифференциальное уравнение движения для обобщенной модели Фойгта (фиг. 4, а) в виде

$$(2.1) \quad \mu(t)\varepsilon' + c(t)\varepsilon = \sigma(t)$$

Это линейное неоднородное уравнение для случая независимых μ и c параметров или нелинейное уравнение, когда вязкость или упругость становятся зависимыми от деформаций или скоростей деформаций. Если $\mu(t)$, $c(t)$, $\sigma(t)$ непрерывны в интервале $[0, +\infty)$ и в нем $\mu(t)$ не обращается

в нуль, то будем иметь единственное решение для задачи Коши в виде

$$(2.2) \quad \varepsilon(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{c(t)}{\mu(t)} dt\right) \left[\varepsilon(0) + \int_{t_0}^t \frac{\sigma(t)}{\mu(t)} \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{c(t)}{\mu(t)} dt\right) dt \right]$$

Для модели Максвелла с переменными вязкостью и упругостью (фиг. 4, б) уравнение деформаций будет иметь вид

$$(2.3) \quad \varepsilon'(t) = \frac{1}{c(t)} \sigma' + \left(\frac{1}{\mu(t)} - \frac{c'(t)}{c^2(t)} \right) \sigma$$

Общее решение уравнения (2.3) в области $(0 \leq t < \infty, -\infty < \varepsilon < \infty)$ будет определяться выражением

$$(2.4) \quad \sigma = \exp\left[-\int_0^t \left(\frac{c(t)}{\mu(t)} - \frac{c'(t)}{c(t)}\right) dt\right] \left\{ \sigma(0) + \int_0^t \varepsilon'(t) c(t) \exp\left[\int_0^t \left(\frac{c(t)}{\mu(t)} - \frac{c'(t)}{c(t)}\right) dt\right] dt \right\}$$

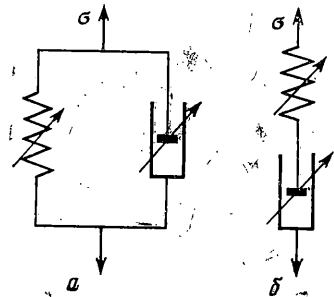
Рассмотрим поведение обобщенной модели Фойгта (фиг. 4, а), когда ее определяющие параметры зависят от времени и изменяются по закону

$$(2.5) \quad \mu(t) = \mu_0(1 + \lambda_1 \sin \omega t), \quad c(t) = c_0[1 + \lambda_2 \sin(\omega t + \varphi_2)]$$

где λ_1 и $\lambda_2 \in [0, 1)$.

В этом случае можно получить общее решение однородного уравнения (2.1), определяющее свободное движение обобщенной модели Фойгта (при $\sigma(t) = 0$)

$$(2.6) \quad \varepsilon^o(t) = \varepsilon(0) (1 + \lambda_1 \sin \omega t) - \frac{c_0 \lambda_2 \sin \varphi_2}{\mu_0 \omega \lambda_1} \exp\left\{-\frac{c_0}{\mu_0} \left[\frac{\lambda_2 \cos \varphi_2}{\lambda_1} t - \frac{2}{\omega \sqrt{1 - \lambda_2^2}} \left(\frac{\lambda_2 \cos \varphi_2}{\lambda_1} - 1 \right) \left(\text{Arctg} \frac{\text{tg}^{1/2} \omega t + \lambda_1}{\sqrt{1 - \lambda_1^2}} - \text{arctg} \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \right) \right]\right\}$$

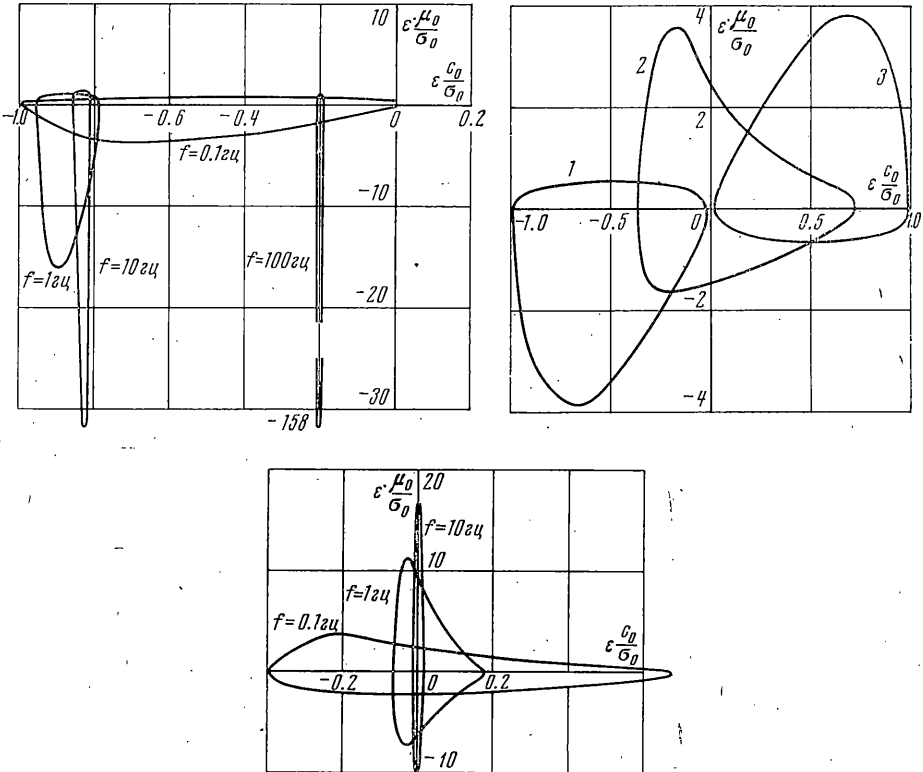


Фиг. 4

Условие устойчивости этого решения имеет вид

$$(2.7) \quad \lambda_2 \cos \varphi_2 \leq (1 + \sqrt{1 - \lambda_1^2}) \lambda_1^{-1}$$

При λ_1 и $\lambda_2 \in [0, 1)$ это условие выполняется всегда, и тривиальное равновесное состояние обобщенной модели Фойгта всегда устойчиво.



Фиг. 5

При действии внешней гармонической нагрузки

$$(2.8) \quad \sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

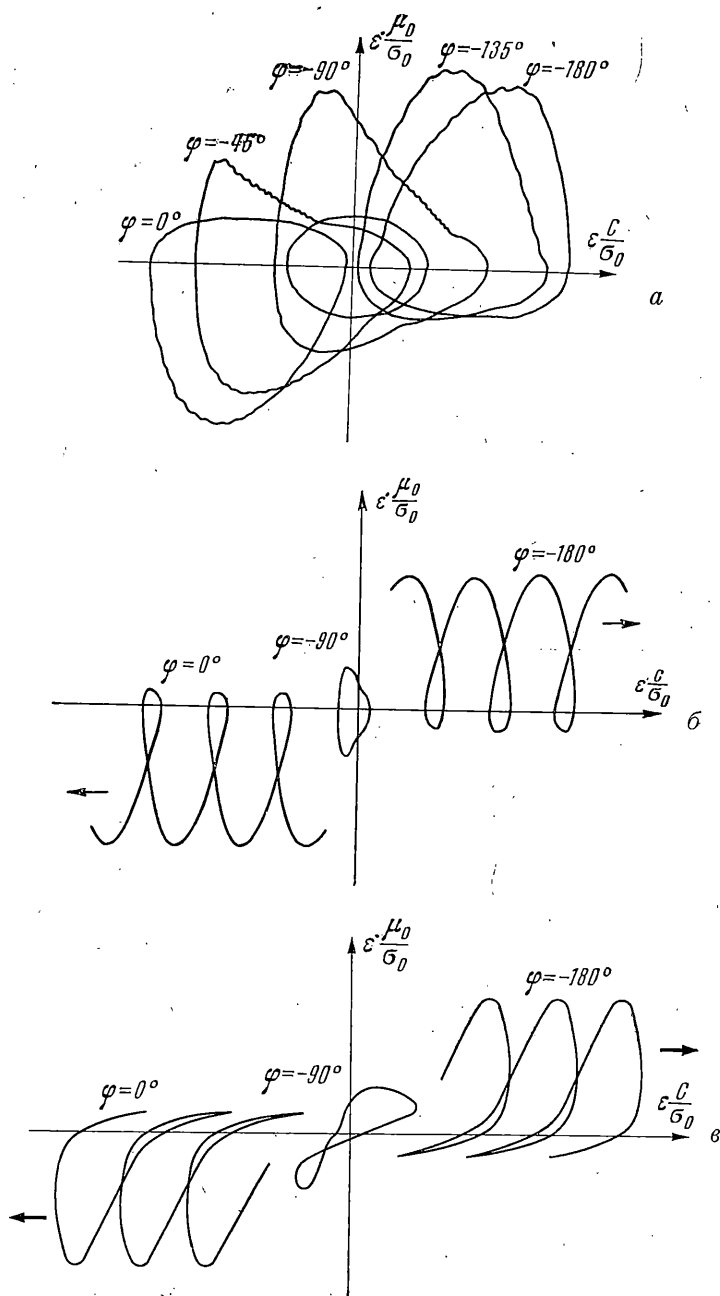
общее решение уравнения (2.1) с определяющими параметрами (2.5) примет вид

$$(2.9) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon^\circ(t) \left[1 + \int \frac{\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi)}{\mu_0 \varepsilon^\circ(t) (1 + \lambda_1 \sin \omega t)} dt \right]$$

где $\varepsilon^\circ(t)$ — общее решение однородного уравнения (2.1), определяемое выражением (2.6).

На фиг. 5, а приведено семейство фазовых траекторий установившегося деформирования обобщенной модели Фойгта, когда нагрузка изменяется по закону (2.6), определяющие параметры по (2.5) при $\varphi = 0, \varphi_2 = 0, \lambda_1 = 0.99, \lambda_2 = 0$ для различных частот $f = \omega / 2\pi$. В качестве фазовых координат приняты критерии подобия — безразмерная скорость деформации $\varepsilon \mu_0 / \sigma_0$ и безразмерная деформация $\varepsilon c_0 / \sigma_0$.

Отметим, что в отличие от фазовых траекторий модели Фойгта с фиксированной вязкостью, которыми являются семейство симметричных отно-



Фиг. 6

сительно осей $\varepsilon\sigma_0/\sigma_0$, $\varepsilon\mu_0/\sigma_0$ эллипсов, фазовые траектории несимметричны и смещены вдоль оси $\varepsilon\sigma_0/\sigma_0$ влево. Таким образом, модель Фойгта при циклическом силовом нагружении (2.8) и циклическом изменении вязкости (2.5) приобретает постоянную составляющую деформации. Причем величина этой постоянной составляющей зависит от частоты. На фиг. 5, б приведены фазовые траектории, определяющие движение модели при частоте $f=0.1$ гц для трех фиксированных значений $\varphi=0^{\circ(1)}$, $\varphi=-90^{\circ(2)}$,

$\varphi = -180^\circ$ ⁽³⁾. Отсюда видно, что при рассматриваемых условиях нагружения обобщенная модель Фойгта приобретает постоянную составляющую деформации, величина и знак которой зависят от сдвига фаз между напряжением и вязкостью: когда сдвиг фазы равен нулю, имеет место деформация сжатия, когда сдвиг фазы равен $\varphi = -90^\circ$, постоянная составляющая отсутствует, и когда $\varphi = -180^\circ$, имеет место деформация растяжения. На фигуре 5, *в* приведены фазовые траектории, определяющие движение модели при $\varphi = -90^\circ$ в зависимости от частоты. Фазовые траектории, приведенные на фиг. 6, *а-в*, получены численным методом на ЭЦВМ. На фиг. 6, *а* показано семейство фазовых траекторий, полученных на АВМ для модели Фойгта с переменной вязкостью при фиксированной частоте, когда сдвиг фазы изменяется от $\varphi = 0^\circ$ до $\varphi = -180^\circ$. В центре эллипса для классического элемента Фойгта при $\lambda_1 = 0$, причем полуоси эллипса имеют величину $(\varepsilon \sigma_0 / \sigma_0)_{\max} = 0.4$, $(\varepsilon^* \mu_0 / \sigma_0)_{\max} = 1$.

Рассмотрим поведение обобщенной модели Максвелла (фиг. 4, *б*) при изменении ее параметров по закону (2.5).

При условиях нагружения (2.8) уравнение (2.3) примет вид

$$(2.10) \quad \varepsilon^* = \frac{\sigma_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)}{c_0 [1 + \lambda_2 \sin(\omega t + \varphi_2)]} + \left\{ \frac{1}{\mu_0 (1 + \lambda_1 \sin \omega t)} - \frac{\omega \lambda_2 \cos(\omega t + \varphi)}{c_0 [1 + \lambda_2 \sin(\omega t + \varphi_2)]^2} \right\} \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

и решение для него при $\varphi_2 = \varphi$ запишется в виде

$$(2.11) \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0 \cos \varphi}{\mu_0 \lambda_1} \left(t - \frac{2}{\omega \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} \omega/2t + \lambda_1}{\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \right) + \frac{\sigma_0 \sin \varphi}{\mu_0 \omega \lambda_1} \ln(1 + \lambda_1 \sin \omega t) + \frac{\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi)}{c_0 [1 + \lambda_2 \sin(\omega t + \varphi)]} + c$$

где c — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Постоянная составляющая скорости деформации при $\varphi_2 = \varphi$ будет

$$(2.12) \quad \langle \varepsilon^* \rangle = - \frac{\sigma_0 \lambda_1}{\mu_0 (1 + \sqrt{1 - \lambda_1^2} - \lambda_1^2)} \cos \varphi$$

Отметим интересные свойства такой модели. При гармоническом силовом нагружении (2.8) и изменении определяющих параметров по (2.5) модель Максвелла деформируется с некоторой постоянной составляющей скорости, определяемой (2.12), т. е. при неограниченном времени деформации могут стать сколь угодно велики. Причем величина и знак постоянной составляющей зависят от сдвига фазы φ .

На фиг. 6, *б* приведены фазовые траектории, иллюстрирующие влияние угла сдвига фазы на движение модели для значения жесткости, равной бесконечности при $\lambda_2 = 0$. В этом случае модель Максвелла вырождается в модель Ньютона. Когда $\varphi = 0^\circ$, фазовая траектория незамкнута и изображающая точка циклически движется вдоль оси деформаций в сторону сжатия. Когда сдвиг фазы равен $\varphi = -180^\circ$, то имеет место аналогичная картина, но элемент Максвелла — Ньютона приобретает деформацию растяжения. При сдвиге фазы $\varphi = -90^\circ$ имеет место замкнутая фазовая траектория. На

Фиг. 6, в приведены фазовые траектории для конкретного конечного значения жесткости при $\lambda_2 = 0$, из которых следует, что жесткость не приводит к существенным качественным изменениям поведения модели Максвелла.

Следуя работе [4], можно обобщить рассмотренные модели на случаи многомерной среды и тем самым получить модели сплошной среды с более сложными свойствами. Кроме того, из рассмотренных примеров моделей Фойгта и Максвелла с переменными определяющими параметрами следуют эффекты, отличные от ранее известных. Можно указать на некоторые их полезные технические приложения. Например, можно вызвать направленное течение электровязкой или магнитовязкой жидкости вдоль трубопровода, совершающего осевое гармоническое движение и находящегося в электрическом или магнитном поле.

Поступила 18 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Иелес Д. Д. К теории сложных сред. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.
2. Иелес Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
3. Neuringer J., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
4. Klass D. L., Martinek T. W. Electroviscous Fluids. I. Rheological Properties. J. Appl. Phys., 1967, vol. 38, No. 1.
5. Klass D. L., Martinek T. W. Electroviscous fluids. II. Electrical properties. J. Appl. Phys., 1967, vol. 38, No. 1.