

УДК 539.3

## ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ВИНТА

А. Я. АЛЕКСАНДРОВ, Ю. И. СОЛОВЬЕВ

(Новосибирск)

В работах [1-4] был предложен метод решения пространственных задач теории упругости для тел вращения и некоторых классов неосесимметричных тел, основанный на использовании связей между пространственными и определенными вспомогательными состояниями. Эти связи позволяют выразить компоненты напряжения и перемещения пространственного состояния через аналитические функции комплексного переменного.

Ниже указанный метод применен для решения задачи о напряженном состоянии упругого винтообразного тела, когда напряжения постоянны вдоль винтовых линий внутри тела. Аналитические функции, разрешающие задачу, представлены в форме тригонометрических рядов, коэффициенты которых находятся по методу наименьших квадратов.

Приведен числовой расчет напряжений в спиральном сверле, нагруженном продольной силой и крутящим моментом.

1. Рассмотрим упругий винт, нагруженный на бесконечности продольной силой  $N$  и крутящим моментом  $M$ .

Для построения решения воспользуемся связями между пространственными и вспомогательными двумерными состояниями, полученными в [2-4] путем интегральных наложений при вращении и продольном смещении вспомогательных состояний.

Приведем формулы, выражающие эту связь

$$(1.1) \quad w(z, r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_x(x, y) d\omega$$

$$u(z, r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_y \cos \beta - u_\eta \sin \beta) d\omega$$

$$v(z, r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_y \sin \beta + u_\eta \cos \beta) d\omega$$

$$\sigma_z(z, r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_x(x, y) d\omega \quad (\beta = \omega - \theta)$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sigma_y + \sigma_\eta) d\omega \quad (\sigma_\eta = \nu \sigma_x + \nu \sigma_y)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(\sigma_y - \sigma_\eta) \cos 2\beta - 2\tau_{y\eta} \sin 2\beta] d\omega$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [(\sigma_y - \sigma_\eta) \sin 2\beta + 2\tau_{y\eta} \cos 2\beta] d\omega$$

$$\tau_{zr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\tau_{xy} \cos \beta - \tau_{x\eta} \sin \beta) d\omega$$

$$\tau_{z\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\tau_{xy} \sin \beta + \tau_{x\eta} \cos \beta) d\omega$$

Здесь в левых частях равенств стоят компоненты напряжения и перемещения пространственного состояния (в данном случае, упругого винта), зависящие от неподвижных цилиндрических координат  $z, r, \theta$  ( $z$  — ось винта). В правых частях равенств находятся, во-первых, напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_\eta, \tau_{xy}$  и перемещения  $u_x, u_y$  первого вспомогательного состояния — плоской деформации некоторого цилиндрического тела, объемлющего упругий винт (в данном случае, за это тело можно принять рифленую бесконечную пластину), во-вторых, напряжения  $\tau_{x\eta}, \tau_{y\eta}$  и перемещение  $u_\eta$  второго вспомогательного состояния — «депланации» этого тела (пластины). Все напряжения и перемещения, стоящие в правых частях равенств (1.1), зависят от двух координат  $x, y$  (ось  $x$  совпадает с  $z$ , плоскость  $xy$  является плоскостью поперечного сечения пластины, ось  $\eta$  перпендикулярна этой плоскости).

Полагаем, что при выполнении наложений пластина постепенно поворачивается вокруг оси  $z$  относительно первоначального положения и одновременно смещается вдоль этой оси пропорционально углу поворота  $\omega$  с коэффициентом пропорциональности  $k = h/2\pi$ , где  $h$  — шаг винта.

Тогда

$$x = z + k\omega = z_0 + k\beta \quad (z_0 = z + k\theta), \quad y = r \cos \beta$$

Будем считать, что напряжения и перемещения пластины являются функциями периодическими относительно координаты  $x$  с периодом  $h$ . Вследствие этого в формулах (1.1) можно перейти к интегрированию по переменной  $\beta$ , оставляя прежние пределы интегрирования.

Кроме того, в данном случае возможно ввести условие «четности по полупериоду», полагая, что при замене  $x$  на  $x + h/2$ , а  $y$  на  $-y$  напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_\eta, \tau_{y\eta}$  и перемещение  $u_x$  сохраняют свою величину и свой знак, а  $\tau_{xy}, \tau_{x\eta}, u_y, u_\eta$  меняют знак на противоположный.

Выразим компоненты вспомогательных состояний через аналитические функции  $\varphi, \psi, \chi$  комплексного переменного  $\zeta = x + iy$  при помощи формул Колосова

$$(1.2) \quad \begin{aligned} 2Gu_x &= \operatorname{Re} (\kappa\varphi - \bar{\zeta}\varphi' - \psi) = \operatorname{Re} [\kappa\varphi + (\zeta - \bar{\zeta})\varphi' - \psi_0] \\ 2Gu_y &= \operatorname{Re} i^{-1}(\kappa\varphi + \bar{\zeta}\varphi' + \psi) = \operatorname{Re} i^{-1}[\kappa\varphi - (\zeta - \bar{\zeta})\varphi' + \psi_0] \\ 2Gu_\eta &= -\operatorname{Re} i^{-1}\chi \quad (\kappa = 3 - 4\nu, \psi_0 = \zeta\varphi' + \psi) \\ \sigma_x &= \operatorname{Re} [3\varphi' + (\zeta - \bar{\zeta})\varphi'' - \psi_0'], \quad \sigma_\eta = 4\nu \operatorname{Re} \varphi' \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} [\varphi' - (\zeta - \bar{\zeta})\varphi'' + \psi_0'], \quad \tau_{x\eta} = -1/2 \operatorname{Re} i^{-1}\chi' \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} i^{-1}[-\varphi' - (\zeta - \bar{\zeta})\varphi'' + \psi_0'], \quad \tau_{y\eta} = -1/2 \operatorname{Re} \chi' \end{aligned}$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $G$  — модуль сдвига.

В силу свойств периодичности и четности по полупериоду будем иметь

$$(1.3) \quad \overline{\varphi(\zeta)} = \varphi(\bar{\zeta} + h/2), \quad \overline{\psi_0(\zeta)} = \psi_0(\bar{\zeta} + h/2) \quad \overline{\chi(\zeta)} = \chi(\bar{\zeta} + h/2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1) и добавляя к полученным выражениям слабые, соответствующие аксиальному  $p_0$  и радиальному  $q_0$  растяжению цилиндра, а также его кручению  $t_0$ , будем иметь

$$(1.4) \quad \begin{aligned} 2Gw &= a_0 z + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\kappa\varphi + 2ir\varphi' \cos \beta - \psi_0] d\beta \\ 2Gu &= b_0 r + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \{[\kappa\varphi - 2ir\varphi' \cos \beta + \psi_0] \cos \beta + \chi \sin \beta\} d\beta \\ 2Gv &= 2t_0 z r + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \{[\kappa\varphi - 2ir\varphi' \cos \beta + \psi_0] \sin \beta - \chi \cos \beta\} d\beta \\ \sigma_z &= p_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [3\varphi' + 2ir\varphi'' \cos \beta - \psi_0'] d\beta \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= 2q_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(1+4\nu)\varphi' - 2ir\varphi'' \cos \beta + \psi_0'] d\beta \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{[(1-4\nu)\varphi' - 2ir\varphi'' \cos \beta + \psi_0'] \cos 2\beta + \chi' \sin 2\beta\} d\beta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \{[(1-4\nu)\varphi' - 2ir\varphi'' \cos \beta + \psi_0'] \sin 2\beta - \chi' \cos 2\beta\} d\beta \\ \tau_{zr} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left\{ [\varphi' + 2ir\varphi'' \cos \beta - \psi_0'] \cos \beta - \frac{1}{2} \chi' \cos \beta \right\} d\beta \\ \tau_{z\theta} &= t_0 r - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left\{ [\varphi' + 2ir\varphi'' \cos \beta - \psi_0'] \sin \beta + \frac{1}{2} \chi' \cos \beta \right\} d\beta \end{aligned}$$

Здесь

$$\varphi = \varphi(\xi), \quad \psi_0 = \psi_0(\xi), \quad \chi = \chi(\xi), \quad \xi = z_0 + k\beta + ir \cos \beta$$

$$a_0 = \frac{1}{1+\nu} (p_0 - 2\nu q_0), \quad b_0 = \frac{1}{1+\nu} [q_0(1-\nu) - \nu p_0]$$

Символы  $\text{Re}$  в (1.4) опущены, ибо и без них вследствие (1.3) интегралы являются вещественными величинами.

Легко видеть, что выражения для напряжений (после того как интегрирование по  $\beta$  выполнено) зависят только от  $z_0$  и  $r$ . Поэтому они постоянны вдоль любой винтовой линии, которая имеет уравнение  $r = \text{const}$ ,  $z_0 = z + k\theta = \text{const}$ . Таким образом, выражения (1.4) определяют двумерное напряженное состояние (зависящее от  $z_0$  и  $r$ ) упругого винта.

Если положительным направлением отсчета угла  $\theta$  считается такое, что при взгляде с конца оси  $z$  оно совпадает с направлением движения часовой стрелки, то винт будет правым, в противном случае — левым.

2. Произведем разложение функции комплексного переменного в тригонометрические ряды

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \left[ a_n^s \sin n \left( \frac{\xi}{k} + \frac{\pi}{2} \right) + a_n^c \cos n \left( \frac{\xi}{k} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ \psi_0(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \left[ b_n^s \sin n \left( \frac{\xi}{k} + \frac{\pi}{2} \right) + b_n^c \cos n \left( \frac{\xi}{k} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ \chi(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \left[ -c_n^s \cos n \left( \frac{\xi}{k} + \frac{\pi}{2} \right) + c_n^c \sin n \left( \frac{\xi}{k} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

где  $a_n^{s,c}$ ,  $b_n^{s,c}$ ,  $c_n^{s,c}$  — вещественные коэффициенты.

Подставляя (2.1) в (1.4) и производя интегрирование, получим следующие формулы перемещений и напряжений:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} 2Gw &= a_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_{n1}^s(r) \sin \frac{nz_0}{k} + f_{n1}^c(r) \cos \frac{nz_0}{k} \right] \\ 2Gu &= b_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_{n2}^s(r) \cos \frac{nz_0}{k} - f_{n2}^c(r) \sin \frac{nz_0}{k} \right] \\ 2Gv &= 2t_0 z r - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_{n3}^s(r) \sin \frac{nz_0}{k} + f_{n3}^c(r) \cos \frac{nz_0}{k} \right] \\ \sigma_z &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k} \left[ f_{n4}^s(r) \cos \frac{nz_0}{k} - f_{n4}^c(r) \sin \frac{nz_0}{k} \right] \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= 2q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k} \left[ f_{n5}^s(r) \cos \frac{nz_0}{k} - f_{n5}^c(r) \sin \frac{nz_0}{k} \right] \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2k} \left[ f_{n6}^s(r) \cos \frac{nz_0}{k} - f_{n6}^c(r) \sin \frac{nz_0}{k} \right] \\ \tau_{r\theta} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4k} \left[ f_{n7}^s(r) \sin \frac{nz_0}{k} + f_{n7}^c(r) \cos \frac{nz_0}{k} \right] \\ \tau_{zr} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2k} \left[ f_{n8}^s(r) \sin \frac{nz_0}{k} + f_{n8}^c(r) \cos \frac{nz_0}{k} \right] \\ \tau_{z\theta} &= t_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2k} \left[ f_{n9}^s(r) \cos \frac{nz_0}{k} - f_{n9}^c(r) \sin \frac{nz_0}{k} \right] \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad f_{n1}^{s,c}(r) &= (\kappa a_n^{s,c} - b_n^{s,c}) I_n + a_n^{s,c} \mu (I_{n-1} + I_{n+1}) \\
 f_{n2}^{s,c}(r) &= 1/2 (\kappa a_n^{s,c} + b_n^{s,c}) (I_{n-1} + I_{n+1}) - 1/2 a_n^{s,c} \mu (I_{|n-2|} + 2I_n + I_{n+2}) + \\
 &+ 1/2 c_n^{s,c} (I_{n-1} - I_{n+1}) \\
 f_{n3}^{s,c}(r) &= 1/2 (\kappa a_n^{s,c} + b_n^{s,c}) (I_{n-1} - I_{n+1}) - 1/2 a_n^{s,c} \mu (I_{|n-2|} - I_{n+2}) + \\
 &+ 1/2 c_n^{s,c} (I_{n-1} + I_{n+1}) \\
 f_{n4}^{s,c}(r) &= (3a_n^{s,c} - b_n^{s,c}) I_n + a_n^{s,c} \mu (I_{n-1} + I_{n+1}) \\
 f_{n5}^{s,c}(r) &= [(1+4\nu) a_n^{s,c} + b_n^{s,c}] I_n - a_n^{s,c} \mu (I_{n-1} + I_{n+1}) \\
 f_{n6}^{s,c}(r) &= [(1-4\nu) a_n^{s,c} + b_n^{s,c}] (I_{|n-2|} + I_{n+2}) - \\
 &- a_n^{s,c} \mu (I_{|n-3|} + I_{n-1} + I_{n+1} + I_{n+3}) + c_n^{s,c} (I_{|n-2|} - I_{n+2}) \\
 f_{n7}^{s,c}(r) &= [(1-4\nu) a_n^{s,c} + b_n^{s,c}] (I_{|n-2|} - I_{n+2}) - \\
 &- a_n^{s,c} \mu (I_{|n-3|} + I_{n-1} - I_{n+1} - I_{n+3}) + c_n^{s,c} (I_{|n-2|} + I_{n+2}) \\
 f_{n8}^{s,c}(r) &= (a_n^{s,c} - b_n^{s,c}) (I_{n-1} + I_{n+1}) + a_n^{s,c} \mu (I_{|n-2|} + 2I_n + I_{n+2}) - 1/2 c_n^{s,c} (I_{n-1} - I_{n+1}) \\
 f_{n9}^{s,c}(r) &= (a_n^{s,c} - b_n^{s,c}) (I_{n-1} - I_{n+1}) + a_n^{s,c} \mu (I_{|n-2|} - I_{n+2}) - \\
 &- 1/2 c_n^{s,c} (I_{n-1} + I_{n+1}) \quad \mu = nr/k, \quad I_n = I_n(\mu)
 \end{aligned}$$

где  $I$  — модифицированные функции Бесселя. При вычислении интегралов вместо  $\xi$  подставлялось его выражение через  $\beta$  и использовались квадратуры, вытекающие из известных формул (см. [5], № 3.937).

Внешние силы  $p_z$ ,  $p_r$ ,  $p_\theta$ , действующие на поверхность винта, связаны с внутренними напряжениями известными формулами

$$(2.4) \quad p_z = \sigma_z l_1 + \tau_{zr} l_2 + \tau_{z\theta} l_3, \quad p_r = \tau_{rz} l_1 + \sigma_r l_2 + \tau_{r\theta} l_3, \quad p_\theta = \tau_{\theta z} l_1 + \tau_{\theta r} l_2 + \sigma_\theta l_3$$

где  $l_m$  ( $m=1, 2, 3$ ) — направляющие косинусы нормали к поверхности.

Пусть поверхность винта задана уравнением

$$(2.5) \quad r = f(z_0), \quad (z_0 = z + k\theta)$$

Тогда направляющие косинусы определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad l_1 &= -D^{-1} f'(z_0), \quad l_2 = D^{-1}, \quad l_3 = -k f'(z_0) / r D \\
 D &= \pm \sqrt{1 + (1 + k^2 / r^2) [f'(z_0)]^2}
 \end{aligned}$$

Заметим, что функция  $f(z_0)$  является периодической с периодом  $h$ . Если в (2.5) положить  $\theta=0$  или  $\theta=\pi$ , то получится уравнение контура осевого сечения. Если положить  $z=0$ , то (2.5) становится уравнением контура поперечного сечения в полярных координатах.

Подставляя (2.2) в (2.4), получим выражения внешних сил  $p_z$ ,  $p_r$ ,  $p_\theta$  в форме рядов. Очевидно, эти силы будут постоянны вдоль винтовых линий.

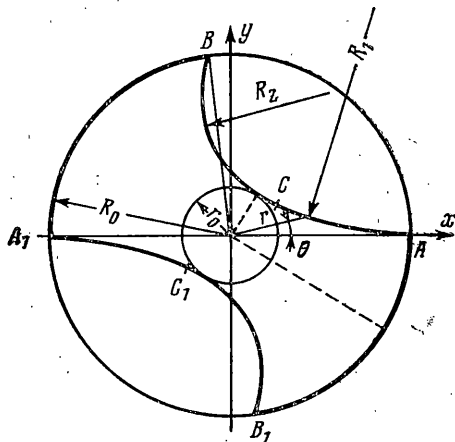
Если внешние силы заданы, то равенства (2.4) можно использовать для определения коэффициентов рядов (кроме  $p_0$  и  $t_0$ ) по методу наименьших квадратов или другими методами. Коэффициенты  $p_0$  и  $t_0$  определим, при-

равнивая главные вектор и момент сил, действующих в поперечном сечении, величинам  $N$  и  $M$ . Таким образом, граничные условия по торцам удовлетворяются в интегральном смысле.

3. Были произведены числовые расчеты напряжений в спиральном сверле (фиг. 1), боковая поверхность которого свободна от нагрузок, а концевые сечения загружены продольной силой и крутящим моментом.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 2 показано сечение сверла плоскостью, перпендикулярной оси  $z$ .

В данном случае сверло представляет собой двухзаходный винт, и его поперечное сечение симметрично относительно точки  $O$  — центра окружности радиуса  $R_0$ . Контур сечения состоит из двух дуг  $B_1A$  и  $BA_1$  этой окружности, и двух кривых  $ACB$  и  $A_1C_1B_1$  внутри окружности, которые с достаточной точностью могут быть аппроксимированы дугами радиусов  $R_1$  и  $R_2$ .

Легко записать в полярных координатах параметрические уравнения контура вида  $r=F_1(t)$ ,  $\theta=F_2(t)$ , где переменный параметр  $t$  пропорционален длине дуги контура и изменяется от  $-1$  до  $+1$  в пределах полуконтура. Принимая  $z_0=kF_2(t)$ , получим параметрические уравнения винтовой поверхности.

Поскольку винт двухзаходный и оба его витка находятся в одинаковых условиях, то в разложениях (2.1) используются лишь четные члены.

Коэффициенты рядов определяются из условия минимума интеграла

$$(3.1) \quad I = \int_{-1}^{+1} (p_z^2 + p_r^2 + p_\theta^2) dt$$

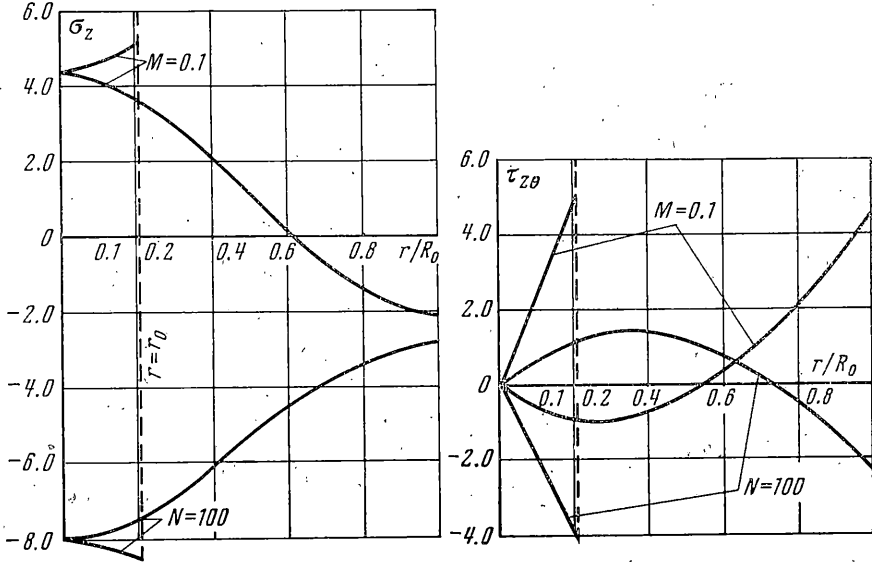
Удерживая члены рядов (2.1) вплоть до  $n=18$  и приравнивая нулю производные  $\partial I / \partial q_0$ ,  $\partial I / \partial a_2^s$ ,  $\partial I / \partial a_2^c$ , ...,  $\partial I / \partial c_{18}^c$ , получаем систему 55 алгебраических уравнений, которая дополняется еще двумя уравнениями, вытекающими из условий в сечении  $z=0$

$$(3.2) \quad \iint_{(\Omega)} \sigma_z r dr d\theta = -N, \quad \iint_{(\Omega)} \tau_{z\theta} r^2 dr d\theta = M$$

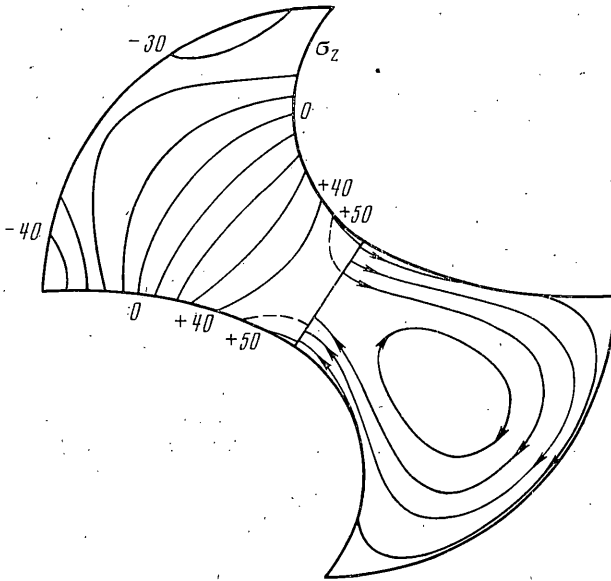
где  $\Omega$  — область, занятая поперечным сечением.

Числовые расчеты производились при следующих данных:  $R_0=3.81$ ,  $r_0=0.80$ ,  $R_1=5.78$ ,  $R_2=2.09$ ,  $\angle AOB=90^\circ$ , шаг винта  $h=49.47$  (размеры в мм). Площадь сечения  $22.54 \text{ мм}^2$ ; коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ ,  $G=8.1 \cdot 10^3 \text{ кг/мм}^2$ ,  $N=100 \text{ кг}$ ,  $M=1000 \text{ кг/мм}$ .

На фиг. 3 приведены эпюры напряжений  $\sigma_z$  и  $\tau_{z\theta}$  в сечении  $z=0$  вдоль линий, показанных на фиг. 2 пунктиром — по направлению наименьшего размера и по пер-



Фиг. 3



Фиг. 4

пендикулярно к нему. Значения напряжений даны в  $\text{кг/мм}^2$ . Как видно из фиг. 3 распределение по сечению нормальных напряжений  $\sigma_z$  даже для случая действия лишь продольной силы  $N$  носит неравномерный характер: по оси сверла напряжения значительно выше, чем по внешней границе. Это объясняется большей жесткостью сердцевины сверла по сравнению с остальной его частью, которая работает как спиральная пружина и имеет большую податливость.

Напряжения  $\sigma_z$  при действии крутящего момента  $M$  имеют разные знаки в различных частях сечения. В рассматриваемом случае крутящий момент вызывает раскручивание спирали, поэтому сердцевина сверла растянута, а перья сжаты. Эшора нормальных напряжений является самоуравновешенной.

Касательные напряжения  $\tau_{z\theta}$  возникают как при действии момента  $M$ , так и при действии силы  $N$ . В последнем случае их знак меняется с изменением  $r$ , а эшора является самоуравновешенной. Заметим, что и при действии момента  $M$  напряжения  $\tau_{z\theta}$  оказываются знакопеременными.

На фиг. 4 для случая действия крутящего момента  $M=1$  кгм показаны линии уровня напряжения  $\sigma_z$  (верхняя часть) и траектории полных касательных напряжений  $\tau=(\tau_{z\theta}^2+\tau_{zr}^2)^{0.5}$  (нижняя часть). Как видно из фиг. 4, кроме траекторий, проходящих вдоль контура сечения, будут траектории, замыкающиеся в пределах полусечения. Заметим, что траектория направлена вдоль касательной к контуру сечения лишь для цилиндрического (или призматического) тела, а в данном случае, когда поверхность сверла имеет винтовой характер и наклонена к плоскости поперечного сечения, указанное свойство не имеет места.

Точность расчета проверялась путем вычисления напряжений  $p_z, p_r, p_\theta$  по формулам (2.4) в точках поверхности сверла. Величины этих напряжений не превышали 5% от наибольшего напряжения в сечении. Исключение составляли лишь угловые точки сечения, где точное выполнение граничных условий при решении в рядах затруднительно.

Приведем величины, характеризующие деформативность тела: относительное продольное удлинение  $\epsilon_z$  и относительный угол закручивания  $\phi$  элемента, расположенного на оси сверла. При  $N=100$  кг получилось  $\epsilon_z=-3.8 \times 10^{-4}$ ,  $\phi=-1.9 \times 10^{-4}$ ; при  $M=1$  кгм:  $\epsilon_z=19.5 \times 10^{-4}$ ,  $\phi=30.9 \times 10^{-4}$ .

Поступила 15 III 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Об обобщении метода решения осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций на пространственные задачи без осевой симметрии. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
2. Александров А. Я. О распространении метода решения пространственных задач теории упругости для тел вращения при помощи аналитических функций на некоторые неосесимметричные тела. Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., вып. 96, Механика деформируемого тела и расчет сооружений, 1970.
3. Александров А. Я. Решение пространственных задач теории упругости при помощи аналитических функций и контурных интегралов для некоторых неосесимметричных тел. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 5.
4. Александров А. Я. Решение некоторых классов трехмерных задач теории упругости при помощи аналитических функций. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.