УДК 534

ОДНА ВИБРАЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ИГРОВОЙ ПОСТАНОВКЕ

В. Г. САРАНЧУК

(*Ленинград*)

Рассматривается игровая постановка задачи виброзащиты. Для решения ее используются принцип неухудшения позиции и понятие области достижимости, изложенные в книге [1]. Построение областей достижимости осуществлено методами вариационного исчисления. Решение задачи получено в чистых стратегиях.

1. В многочисленных работах (например [2, 3]) были поставлены и изучались вопросы оптимальной виброзащиты для детерминированных и случайных внешних воздействий. Постановка и решение таких задач целесообразны, когда имеется достаточная информация о характере возмущений, действующих на систему. На практике же бывают случаи, когда заранее неизвестен вид действующего возмущения или информация о внешнем воздействии не является полной. Например, заранее известны только ограничения на амплитуду возмущения. В таких случаях встает задача: для наихудшего из возможных воздействий найти оптимальную защиту. Данным классом задач занимается теория игр.

Пусть имеется механическая система, поведение которой описывается уравнением вида

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{u}+\mathbf{v} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — n-мерный фазовый вектор системы, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — n-мерная вектор-функция фазовых координат, вектор $\mathbf{u}$ описывает управление, формируемое защитой, $\mathbf{v}$ описывает внешнее воздействие на данную систему. Считаем, что векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ не могут принимать значений, превосходящих заданные пределы. Эти ограничения на управления $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ зададим в виде

$$\mathbf{u}\in U, \qquad \mathbf{v}\in V \tag{1.2}$$

Символы U и V обозначают некоторые ограниченные множества в соответствующих векторных пространствах. Множества U и V описывают возможности, которыми располагают игроки, соответственно защита и нападение.

В качестве функции выигрыша возьмем величину

$$I=\max_t|Q(\mathbf{x})| \tag{1.3}$$

где Q — скалярная функция от компонент фазового вектора $\mathbf{x}(t)$. Задача нападения — выбором $\mathbf{v}$ максимизировать функционал (1.3), а задача защиты — минимизировать его. В результате должна быть найдена величина

$$\min_{\mathbf{u}}\max_{\mathbf{v}}\max_t|Q(\mathbf{x})| \tag{1.4}$$

Полная формулировка игровой задачи должна включать описание той информации, которой располагают игроки в каждый текущий момент времени t при выборе управлений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Обычно такую информацию составляют сведения о позиции $\mathbf{x}(t)$, которая реализовалась в данный момент времени. В данной задаче такой информацией располагает только первый игрок (защита), так что его закон управления можно задать функцией $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))$. Второй игрок (нападение) не располагает информацией о текущем состоянии системы. Но тем не менее в его арсенале может находиться наиболее опасное для нашей системы воздействие и защита должна это учитывать.

2. Рассмотрим вибрационную систему с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнениями

$$(2.1) \qquad x_1{}^{\bullet}=x_2, \qquad x_2{}^{\bullet}=-k^2x_1-2nx_2+u+v$$

Здесь x_1 — абсолютное (относительное) перемещение амортизируемого объекта, k — собственная частота системы, n — коэффициент затухания. Для данной системы управление, которым располагает защита, описывается скалярной функцией фазовых координат и времени $u(x_1, x_2, t)$. На эту функцию наложено условие вида

$$(2.2) \qquad |u|\leqslant U_0$$

означающее ограниченность энергетических возможностей защиты. Функция $v(t)$ описывает внешнее воздействие на систему. Характер внешнего воздействия заранее неизвестен, известно только, что по амплитуде оно ограничено величиной

$$(2.3) \qquad |v(t)|\leqslant V_0$$

Величины U_0 и V_0 — константы. Заметим, что нетривиальным является только случай, когда $U_0\leqslant V_0$.

В качестве «платы» возьмем негладкий функционал вида

$$(2.4) \qquad I=\max_t|x_1(t)|$$

Выпишем также функционал

$$(2.5) \qquad I_1=x_1{}^2(t_1)$$

с дополнительным условием

$$(2.6) \qquad x_1{}^2(t_1)-x_1{}^2(t)\geqslant 0$$

означающим, что в точке t_1 должен находиться абсолютный максимум функции $x_1{}^2(t)$ на рассматриваемом интервале. Функционал (2.5) с условием (2.6) эквивалентен функционалу (2.4).

Рассмотрим только периодические, периода 2π управления u и v, подчиняющиеся дополнительным условиям $u(t)=-u(t+\pi)$; $v(t)=-v(t+\pi)$. Тогда периодическое решение уравнений (2.1) должно удовлетворять условиям

$$(2.7) \qquad x_1(t)=-x_1(t+\pi), \qquad x_2(t)=-x_2(t+\pi)$$

Сказанное позволяет ограничиться рассмотрением решения на интервале $[0, \pi]$.

Ставится следующая задача. Среди периодических непрерывных функций x_1, x_2 и кусочно-непрерывных управлений u и v, удовлетворяющих условиям (2.1) — (2.3), (2.6), найти такие, которые сообщают минимум по u, максимум по v функционалу (2.5).

Положив в уравнениях (2.1) $u=0$, исследуем возможности, которыми располагает второй игрок. Для этого построим область достижимости второго игрока. Под областью достижимости второго игрока будем понимать множество значений вещественных чисел, которые может принимать решение $x_1(t)$ уравнений (2.1) при любых допустимых управлениях $v(t)$, краевых условиях (2.7) и нулевом управлении $u(t)=0$. Для построения области достижимости достаточно найти ее границу. Тогда объединение множества, окаймленного границей, и границы будет областью достижимости. Для нахождения границы достаточно решить следующую вариационную задачу.

Среди периодических непрерывных функций x_1 и x_2 и кусочно-непрерывных управлений v, удовлетворяющих на отрезке $[0, \pi]$ уравнениям (2.1) и соотношению (2.3), а на концах и в промежуточных точках — зависимостям (2.6) и (2.7), найти такие, которые сообщают максимум функционалу (2.5).

Для решения задачи воспользуемся результатами статьи [4]. На основании ее построим функции

$$H=\lambda_1 x_2+\lambda_2(-k^2x_1-2nx_2+v)+\mu(v^2+v_1^2-V_0^2) \tag{2.8}$$
$$\varphi=-x_1^2(t_1)+\rho_1[x_1(t_0)+x_1(T)]+\rho_2[x_2(t_0)+x_2(T)]+\rho_3 x_2(t_1)$$

Выражение $v^2+v_1^2-V_0^2=0$ эквивалентно условию (2.3). Здесь $v_1(t)$ — вспомогательная функция.

С помощью введенных функций составим уравнения сопряженной системы

$$\lambda_1^\cdot=k^2\lambda_2,\quad \lambda_2^\cdot=-\lambda_1+2n\lambda_2,\quad \lambda_2+2\mu v=0,\quad 2\mu v_1=0 \tag{2.9}$$

а также краевые и промежуточные условия для множителей Лагранжа

$$\lambda_1(t_0)=\rho_1,\quad \lambda_1(T)=-\rho_1,\quad \lambda_2(t_0)=\rho_2,\quad \lambda_2(T)=-\rho_2 \tag{2.10}$$
$$\lambda_1(t_1-0)-\lambda_1(t_1+0)=2x_1(t_1),\quad \lambda_2(t_1-0)-\lambda_2(t_1+0)=-\rho_3$$
$$H(t_1-0)=H(t_1+0)$$

Неравенство Вейерштрасса в указанной задаче имеет вид

$$\lambda_2 v\leqslant\lambda_2 v' \tag{2.11}$$

Здесь v — управление, сообщающее максимум функционалу I_1, $v'\neq v$ — любое допустимое управление. Из неравенства (2.11) и двух последних соотношений (2.9) следует, что в оптимальном режиме должно выполняться равенство

$$v(t)=V_0 \operatorname{sign}\lambda_2(t) \tag{2.12}$$

Решив уравнения (2.9) при условиях (2.10), найдем выражение для множителя λ_2. Для $n>k$ оно имеет вид

$$\lambda_2=4x_1(t_1)L(n,k,T)e^{nt}\operatorname{sh}(\sqrt{n^2-k^2}\,t),\quad t\in[0,t_1] \tag{2.13}$$
$$\lambda_2=-4x_1(t_1)L(n,k,T)e^{n(t-T)}\operatorname{sh}(\sqrt{n^2-k^2}\,(t-T)),\quad t\in[t, T]$$

а для $n<k$ соответственно

$$\lambda_2=4x_1(t_1)Lje^{nt}\sin(\sqrt{k^2-n^2}\,t),\quad t\in[0,t_1] \tag{2.14}$$
$$\lambda_2=-4x_1(t_1)Lje^{n(t-T)}\sin(\sqrt{k^2-n^2}\,(t-T)),\quad t\in[t_1,T]$$
$$L=[(\gamma_1-\gamma_2)e^{\gamma_1t_1}(1+e^{-\gamma_1T})]^{-1},\quad \gamma_1=n+\sqrt{n^2-k^2},\quad \gamma_2=n-\sqrt{n^2-k^2}$$

Здесь j — мнимая единица, $T=\pi$.

Формула для определения значения t_1 имеет вид

$$e^{(\gamma_2-\gamma_1)t_1}=(1+e^{-\gamma_1T})/(1+e^{-\gamma_2T}) \tag{2.15}$$

Подставив оптимальное управление (2.12) в уравнение (2.1), можно найти максимальное значение перемещения $|x_1(t_1)|_v=\max_v\max_t|x_1(t)|$.

Тогда область достижимости второго игрока определится соотношением

(2.16) $\Omega_2=\{x_1(t):\ |x_1(t)|\leqslant|x_1(t_1)|_v\}$

Также находится область достижимости для первого игрока. Для этого нужно положить в уравнениях (2.1) $v=0$ и решить аналогичную вариационную задачу. В результате можно вычислить значение $|x_1(t_1)|_u=$ $=\max_u\max_t|x_1(t)|$.

Тогда область достижимости первого игрока определится выражением

(2.17) $\Omega_1=\{x_1(t):\ |x_1(t)|\leqslant|x_1(t_1)|_u\}$

Области достижимости (2.16) и (2.17) представляют собой отрезки прямой x_1, причем отрезок (2.16) больше и перекрывает отрезок (2.17).

Из анализа областей достижимости следует, что второй игрок может нанести максимальный «ущерб», если выберет управление, при котором достигается граничная точка отрезка (2.16). Соответственно первый игрок, чтобы максимально уменьшить ущерб, должен нацеливаться на соответствующую граничную точку отрезка (2.17).

Все это легко увидеть, рассуждая от противного.

Таким образом, при оптимальном поведении обоих игроков имеем

(2.18) $\min_u\max_v\max_t|x_1(t)|=|x_1(t_1)|_v-|x_1(t_1)|_u$

Данная величина легко вычисляется и может служить оценкой при конструировании устройства, создающего оптимальную защиту.

Так для $n=0$ и интервалов изменения собственной частоты $2p<k<$ $<2p+1$ $(p=1,2,3,\ldots)$ формула (2.18) имеет вид

(2.19) $$\min_u\max_v\max_t|x_1(t)|=\left|\frac{V_0-U_0}{k^2}\left[\frac{(-1)^{p+1}(2p+1)}{\cos k\pi/2}+1\right]\right|$$

Соответственно для интервалов $2p+1<k<2(p+1)$ $(p=0,1,2,\ldots)$ имеем

(2.20) $$\min_u\max_v\max_t|x_1(t)|=\left|\frac{V_0-U_0}{k^2}\left[\frac{(-1)^{p}(2p+1)}{\cos k\pi/2}-1\right]\right|$$

Несложно получить формулы и для других значений параметра n.

Из анализа областей достижимости нетрудно установить, что рассматриваемая игра не является регулярной [1], так как в областях достижимости имеются две равноправных точки, куда могут нацеливаться игроки. Поэтому теоретически в чистых стратегиях данная задача решена быть не может. Однако реальные устройства амортизации как пассивные, так и активные могут быть сделаны только так, что ответная реакция на внешнее возмущение начинается с некоторым запаздыванием. И при этом автоматически учитывается информация не только о координатах системы, но и о направлении внешнего воздействия. Таким образом, уже через бесконечно малый интервал времени после начала процесса останется одна точка, куда должны нацеливаться игроки при оптимальном поведении, и тем самым задача станет регулярной. В этом случае можно получить решение задачи в чистых стратегиях. Однако при этом игроки не смогут «выработать» точно значение функционала, определяемое формулой (2.18). Может быть получено только близкое к (2.18) значение, с любой наперед заданной точностью.

Приведем описание чистой стратегии, реализующей оптимальное решение с точки зрения первого игрока при оптимальном поведении второго игрока. Для параметров системы, подчиняющихся условиям $k>n$ и $0<k<k_1$, имеем

$$(2.21)\qquad u=-U_0\,\mathrm{sign}\,(x_2{}^\circ x_1+x_1{}^\circ x_2)$$

$$x_1{}^\circ=(V_0-U_0)k^{-2}(k^2-n^2)^{-1/2}A^{-1}[\sin((k^2-n^2)^{1/2}\pi)-(k^2-n^2)^{1/2}\mathrm{sh}\,n\pi]$$

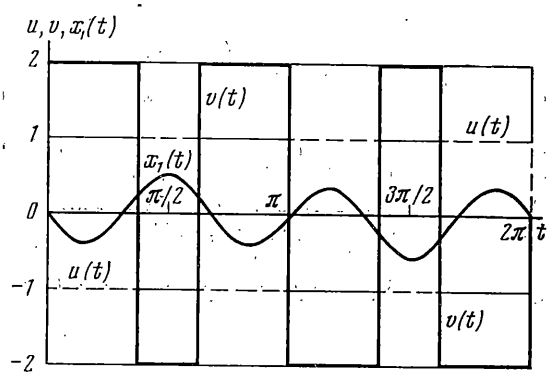
$$x_2{}^\circ=-(V_0-U_0)(k^2-n^2)^{-1/2}A^{-1}\sin((k^2-n^2)^{1/2}\pi),\ A=\mathrm{sh}n\pi+\cos((k^2-n^2)^{1/2}\pi)$$

При $n>k$ оптимальное управление также определяется по формуле (2.21), но $x_1{}^\circ$ и $x_2{}^\circ$ даются соотношениями

$$x_1{}^\circ=(V_0-U_0)[n\,\mathrm{sh}((n^2-k^2)^{1/2}\pi)+(n^2-k^2)^{1/2}\mathrm{sh}\,n\pi]k^{-2}(n^2-k^2)^{-1/2}B^{-1}$$

$$x_2{}^\circ=-(V_0-U_0)(n^2-k^2)^{-1/2}B^{-1}\mathrm{sh}((n^2-k^2)^{1/2}\pi),\ B=\mathrm{ch}\,n\pi+\mathrm{ch}((n^2-k^2)^{1/2}\pi)$$

При других соотношениях параметров n и k оптимальные стратегии не удается задать в виде удобной формулы, но их можно привести графически или в таблицах.



Фиг. 1

На фиг. 1 приведены графики оптимальных управлений $u(t)$, $v(t)$ и решения уравнений (1.1) $x_1(t)$ для значений параметров $n=0$, $k=2.5$.

3. Рассмотрим виброударную систему с одной степенью свободы, описываемую теми же уравнениями движения (2.1) с ограничениями на управления (2.2), (2.3) и функционалом (2.5). Однако вместо периодических исследуются решения с нулевыми начальными условиями

$$(3.1)\qquad x_1(0)=0,\qquad x_2(0)=0$$

и внешним воздействием

$$(3.2)\qquad v(t)=\begin{cases}\neq 0 & \text{при } t\in[0,\ T]\\ \equiv 0 & \text{при } t>T\end{cases}$$

Решение задачи рассматривается на интервале $[0, T]$. Изучается игровая задача, аналогичная рассмотренной в п. 2. Область достижимости второго игрока находится в результате решения оптимальной задачи по методике п. 2, но с соответствующими изменениями. Так, теперь функция φ примет вид

$$(3.3)\qquad \varphi=-x_1{}^2(T)+\rho_1x_1(t_0)+\rho_2x_2(t_0)$$

При этом краевые условия (2.10) заменяются условиями

(3.4) $\lambda_1(t_0)=\rho_1,\quad \lambda_1(T)=2x_1(T),\quad \lambda_2(t_0)=\rho_2,\quad \lambda_2(T)=0$

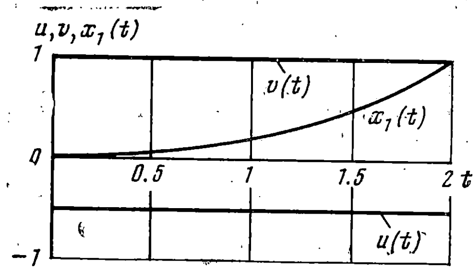
Оптимальное управление v определится по формуле (2.12), в которой множитель λ_2 имеет вид

(3.5) $\lambda_2=-2x_1(T)f_1(n,\ k,\ T)\,\mathrm{sh}\,((n^2-k^2)^{1/2}(t-T)),\quad n>k$

(3.6) $\lambda_2=-2x_1(T)f_2(n,k,T)\sin((k^2-n^2)^{1/2}(t-T)),\quad n<k$

Здесь f_1 и f_2 — функции, не влияющие на знак $\lambda_2(t)$.

Подставив оптимальное управление (2.12) в уравнения (2.1), найдем формулу, определяющую величину $x_1(T)$. Вычислив максимум функции $|x_1(T)|$ по T в интервале $[0,T]$, определим величину $\max_v\max_t|x_1(t)|$. Исходный максимум находится в некоторой точке t_1 (причем не обязательно $t_1=T$), и величина t_1 не зависит от ограничения V_0. Подставив найденную величину $\max_v\max_t|x_1(t)|$ в формулу (2.16), найдем область достижимости второго игрока. Аналогично определяется область достижимости первого игрока. При оптимальном поведении обоих игроков справедлива формула (2.18).

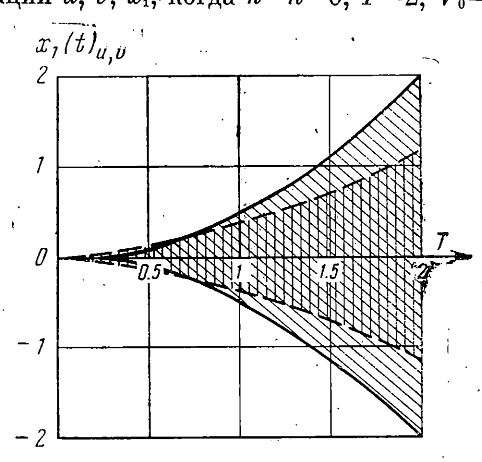


Фиг. 2

В результате анализа можно установить, что при следующих значениях параметров: 1) $k=n=0$, 2) $k<n$, 3) $0<k<(n^2+\pi^2/T^2)^{1/2}$, оптимальная стратегия первого игрока (при оптимальном поведении второго) определяется по формуле

(3.7) $u=-U_0\,\mathrm{sign}\,x_1$

При других соотношениях параметров n и k оптимальные стратегии не удается описать в виде удобной формулы. На фиг. 2 приведены графики оптимальных функций u, v, x_1, когда $k=n=0$, $T=2$, $V_0=1$, $U_0=0.5$.



Фиг. 3

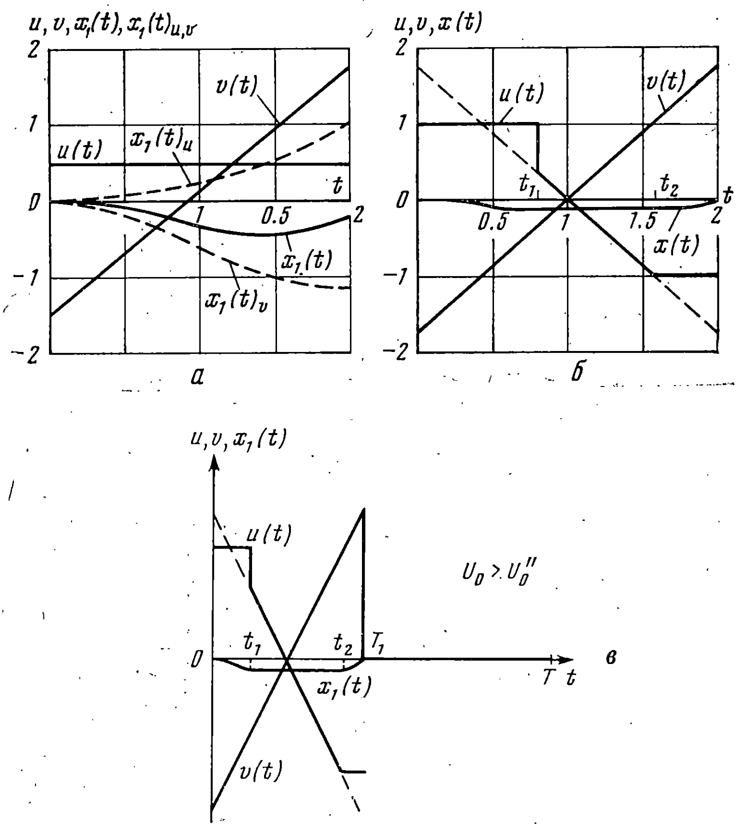
Анализ игровых задач п. 2 и 3 показывает, что формально они могут быть сведены к оптимизационным задачам. Это следует из подобия ограничений на управления, а также из того факта, что положение абсолютного максимума функции $x_1^2(t)$ (см. формулу (2.15)) не зависит от величины ограничения V_0. Сведение игровых задач к оптимизационным осуществляется заменой суммы управления и возмущения на новую функцию w, модуль которой ограничен величиной $V_0 - U_0$. При этом будет выполняться равенство

$$\min_u \max_v I_1 = \max_w I_1$$

4. Рассмотрим пример, когда о внешнем воздействии имеется более подробная информация, чем в первых двух задачах. Пусть ограничения на v задаются двумя интегральными соотношениями вида

$$\int_0^T v(t)\,dt = 0, \qquad \int_0^T v^2\,dt = m_1 \tag{4.1}$$

Изучим игровую задачу, сформулированную в п. 3, с учетом следующих изменений. В уравнениях (2.1) положим $k=n=0$. На управление v вместо условий (2.3) наложены ограничения (4.1).



Фиг. 4

Найдем область достижимости второго игрока уже известным приемом. Для этого построим [4] функции

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 v + r_1 v + r_2 v^2 \tag{4.2}$$

$$\varphi = -x_1^2(t') + \rho_1 x_1(0) + \rho_2 x_2(0) + \rho_3 x_2(t') \tag{4.3}$$

из которых необходимые условия максимума функционала $x_1^2(t')$ можно получить в виде

(4.4) $\lambda_1^\bullet=0, \quad \lambda_2^\bullet=-\lambda_1, \quad \partial H / \partial v=\lambda_2+r_1+2r_2v=0$

(4.5) $\lambda_1(0)=\rho_1, \quad \lambda_2(0)=\rho_2, \quad \lambda_1(T)=0, \quad \lambda_2(T)=0$

(4.6) $\lambda_1(t'-0)-\lambda_1(t'+0)=2x_1(t'), \quad \lambda_2(t'-0)-\lambda_2(t'+0)=-\rho_3$

$H(t'-0)=H(t'+0)$

Анализ формул (4.1), (4.4)–(4.6) показывает, что должно выполняться равенство $t'=T$, где T – конец рассматриваемого интервала. Оптимальное управление v определяется по формуле

(4.7) $v=(12m_1/T^3)^{1/2}(t-T/2)$

Подставив (4.7) в (2.1), найдем величину $\max_v \max_t |x_1(t)|=|x_1(T)|$, причем область достижимости определится по формуле (2.16). Область достижимости первого игрока уже определена в п. 3. На фиг. 3 показано, как изменяются области достижимости первого (наклонная штриховка) и второго (прямая штриховка) игроков при изменении T для случая $m_1=2$, $U_0=1$.

Анализ областей достижимости показывает, что в данной задаче возможны оптимальные режимы трех видов.

Первый вариант $0<U_0<U_0'$ иллюстрируется фиг. 4, *а*, где представлены кривые для $m_1=2$, $T=2$, $U_0=0.5$. В этом случае v определяется по формуле (4.7), $u=U_0$, а

(4.8) $\min_u \max_v \max_t|x_1(t)|={}^1/_6T^2q(1-U_0 / q)^3, \qquad q=(3m_1 / T)^{1/2}$

Положение абсолютного максимума функции $x_1^2(t)$ определяется по формуле

(4.9) $t_1=T(1-U_0 / q)$

Второй вариант $U_0'<U_0<U_0''$ иллюстрируется фиг. 4, *б*, причем $m_1=2$, $T=2$, $U_0=1$. В этом случае v также определяется по формуле (4.7). Управление u равно $u=U_0$ при $t\in[0, t_1)$; $u=-v$ при $t\in(t_1, t_2)$; $u=-U_0$ при $t\in(t_2, T)$. Здесь $[t_1, t_2]$ – отрезок, во всех точках которого функция $x_1^2(t)$ имеет абсолютный максимум. Справедливы также формулы (4.8), (4.9).

Величины U_0' и U_0'' определяются из выражений

(4.10) $(1-U_0' / q)^3=3U_0' / q-1, \qquad U_0''={}^1/_2q$

Третий вариант $U_0>U_0''$ иллюстрируется фиг. 4, *в*. Здесь v на интервале $(0, T_1)$ определяется по формуле (4.7), в которой T заменяется на $T_1=3m_1 / 4U_0^2$. На интервале (T_1, T) управление $v\equiv0$. Управление u равно: $u=U_0$, когда $t\in(0, t_1)$; $u=-v$, при $t\in(t_1, t_2)$; $u=-U_0$ при $t\in(t_2, T_1)$. На интервале (T_1, T) управление u можно выбрать, например, из соображений минимизации времени, за которое фазовые координаты системы обращаются в нуль. В третьем варианте также справедливы формулы (4.8), (4.9), если в них T заменить на $T_1=3m_1 / 4U_0^2$.

Оптимальная стратегия первого игрока (при оптимальном поведении второго) для случая $0<U_0<{}^1/_3q$ задается формулой (3.7).

В остальных случаях для описания оптимальной стратегии необходимо привлекать информацию о внешнем воздействии.

Автор благодарит Ю. П. Максимовича за помощь в работе.

Поступила 14 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Ларин В. Б.* Аналитическое конструирование системы виброизоляции приборов на движущихся объектах. Прикл. механ. 1966, т. 2, вып. 3.
3. *Гурецкий В. В.* Об одной задаче оптимального управления. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1.
4. *Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.