

## ОБ ОДНОМ СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ СИММЕТРИЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В. Н. СОШНИКОВ, Н. В. ФЕДОРОВА

(Москва)

Рассматривается симметричный летательный аппарат, вращающийся относительно продольной оси, называемый аппаратом «безэлеронной схемы». Основы теории свободного движения и движения таких аппаратов при постоянном сигнале управления изложены в [1, 2]. Анализ зависимости характера движения от характеристик реального сигнала управления и поиск сочетания факторов, приводящего к неустойчивости с помощью вычислительных машин, оказывается недостаточно эффективным из-за многообразия управляющих сигналов и параметров, определяющих пространственное движение аппарата. Эффективность поисков повышается, если известна качественная картина движения. Эффективность поисков повышается, если известно особенностей движения, поэтому здесь рассматриваются лишь основные силовые факторы и совокупность гармонических сигналов различной амплитуды и частоты, приближенно отражающая колебательный характер реального сигнала управления. При этих условиях в работе определяется один из возможных классов стационарных движений и приводятся результаты исследования их устойчивости.

1. При построении математической модели летательного аппарата в работе приняты постоянными модуль вектора скорости полета, характеристики воздушной среды и масса аппарата; сила веса пренебрежимо мала по сравнению с аэродинамической силой; аэродинамические коэффициенты представляются двумя членами разложения в ряд Тейлора; тригонометрические функции углов атаки и скольжения представляются линейными членами разложения в ряд Тейлора; процессы отклонения рулей описываются линейными дифференциальными уравнениями.

С учетом принятых допущений и свойств коэффициентов, вытекающих из симметрии, уравнения движения аппарата имеют вид

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad \alpha_1 \dot{\phantom{x}} &= \omega_1 - \alpha_2 \omega_3 - Y \alpha_1 - Y_3 \delta_1 - Y_0 \alpha_2 \omega_3 \\
 \alpha_2 \dot{\phantom{x}} &= \omega_2 + \alpha_1 \omega_3 - Y \alpha_2 - Y_3 \delta_2 + Y_0 \alpha_1 \omega_3 \\
 \omega_1 \dot{\phantom{x}} &= -A \omega_3 \omega_2 + m_0 \alpha_1 + m_0 \omega_1 + m_3 \delta_1 + m_\alpha \alpha_1 \dot{\phantom{x}} + m_3 \delta_1 \dot{\phantom{x}} - m \alpha_2 \omega_3 \\
 \omega_2 \dot{\phantom{x}} &= A \omega_3 \omega_1 + m_0 \alpha_2 + m_0 \omega_2 + m_3 \delta_2 + m_\alpha \alpha_2 \dot{\phantom{x}} + m_3 \delta_2 \dot{\phantom{x}} + m \alpha_1 \omega_3 \\
 \omega_3 \dot{\phantom{x}} &= m_3 \omega_3 + B (\alpha_1 \delta_2 - \alpha_2 \delta_1) + m_0
 \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы атаки и скольжения,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — углы отклонения рулей высоты и направления,  $\omega_3$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_1$  — проекции вектора угловой скорости на главные центральные оси инерции летательного аппарата, имеющие моменты инерции  $I_3$ ,  $I_2 = I_1 = I$ ,  $A = 1 - I_3/I$ ,  $m_0$  — постоянное возмущение от аэродинамической несимметрии.

Остальные коэффициенты уравнения (1.1) определяются известным образом через аэродинамические коэффициенты, инерционные характеристики, плотность воздуха и скорость полета.

Для движения центра масс аппарата в соответствии с сигналом управления  $x = \{x_1, x_2\}^*$ , задаваемым в системе координат управляющего устройства, сигналы на отклонение рулей  $y = \{y_1, y_2\}^*$ , как показано в [1], должны представлять собой проекции вектора  $x$  на оси связанной с аппаратом си-

системы координат, повернутой относительно системы координат управляющего устройства на угол крена  $\gamma$ . Вводя комплексные значения  $\sigma_0 = x_1 + ix_2$  и  $\sigma_1 = y_1 + iy_2$ , можно записать модель сигнала, рассмотренную в [1], в виде

$$(1.2) \quad \sigma_1 = \sigma_0 e^{-i\gamma}, \quad \dot{\gamma} = \omega_3$$

Для принятого в работе гармонического сигнала управления  $\sigma_0 = He^{ip_1 t}$ . Дополняя системы (1.1) и (1.2) уравнениями автопилота и переходя к комплексным координатам, можно записать уравнения движения системы следующим образом:

$$(1.3) \quad A_0 \dot{z} + A_1 z + A_2 z = \Phi_1(z, y) + Q, \quad \dot{y} = -B \operatorname{Im} [\Phi_2(z)] + A_3 y + P$$

$$\text{Здесь } z = \{z_1 \dots z_m\}^* = \{\varphi, \omega, \delta \dots\}^*, \quad \varphi = \alpha_1 + i\alpha_2$$

$$(1.4) \quad \omega = \omega_1 + i\omega_2, \dots, y = \{\omega_3, \gamma\}^*, \quad P = \{m_0, 0\}^*$$

$$Q = \{0, \dots, k_H H e^{i(p_1 t - \gamma)}\}^*$$

$$\Phi_1 = \{i\omega_3 \varphi (1 + Y_\omega), \quad iA\omega_3 \omega + im\omega_3 \varphi, 0 \dots 0\}^*, \quad \Phi_2 = \{\varphi \delta, 0\}^*$$

где  $k_H$  — коэффициент усиления автопилота,  $Q$  и  $\Phi_1$  —  $m$ -компонентные векторы,  $A_0, A_1, A_2$  — вещественные матрицы, элементы которых являются коэффициентами уравнений продольного и бокового движения. Первые две строки матрицы  $A_0$  равны нулю, а у матриц  $A_1$  и  $A_2$  определяются коэффициентами уравнений (1.1). Остальные строки матриц определяются коэффициентами уравнений автопилота и полагаются произвольными

$$A_3 = \begin{Bmatrix} m_3 & 0 \\ & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

При численных расчетах рассматривается частный вид уравнения (1.3), не учитывающий некоторых малых составляющих

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi} &= -(Y - i\omega_3)\varphi + \omega, & \dot{\omega} &= m_\varphi \varphi + (m_\omega + iA\omega_3)\omega + m_\delta \delta \\ T\dot{\delta} + \delta &= -k_1' \varphi - k_2 \omega + k_H H e^{i(p_1 t - \gamma)}, & \dot{\omega}_3 &= m_3 \omega_3 - B \operatorname{Im}(\varphi \delta) + m_0 \\ \dot{\gamma} &= \omega_3 \end{aligned}$$

В уравнениях (1.5)  $k_1' = -k' + k_1$ ,  $k_1 = k k_\varphi^*$ ,  $k_2 = k k_\omega^*$ ,  $k, T, k'$  — параметры привода автопилота,  $k_\varphi^*$  и  $k_\omega^*$  — коэффициенты усиления датчиков автопилота.

2. Специальный вид нелинейностей уравнений (1.3) позволяет предположить следующую форму стационарных движений:

$$(2.1) \quad y_c = \{\Omega = \text{const}, \quad \gamma = \Omega t\}^*, \quad z_c = z_1 [i(p_1 - \Omega)] e^{i(p_1 - \Omega)t}$$

Подставляя (2.1) в уравнения (1.3), можно получить уравнения для определения  $z_c$ , компонент  $z_{ij}$  вектора комплексных амплитуд  $z_1$  и скорости  $\Omega$

$$(2.2) \quad z_c = W(i\omega_p) Q_c, \quad z_{ij} = W_{jm}(i\omega_p) k_H H$$

$$(2.3) \quad -m_3 \Omega = -B k_H^2 H^2 \operatorname{Im} [W_{1m}(i\omega_p) \overline{W_{3m}(i\omega_p)}] + m_0$$

В уравнениях (2.2) и (2.3)  $\omega_p = p_1 - \Omega$

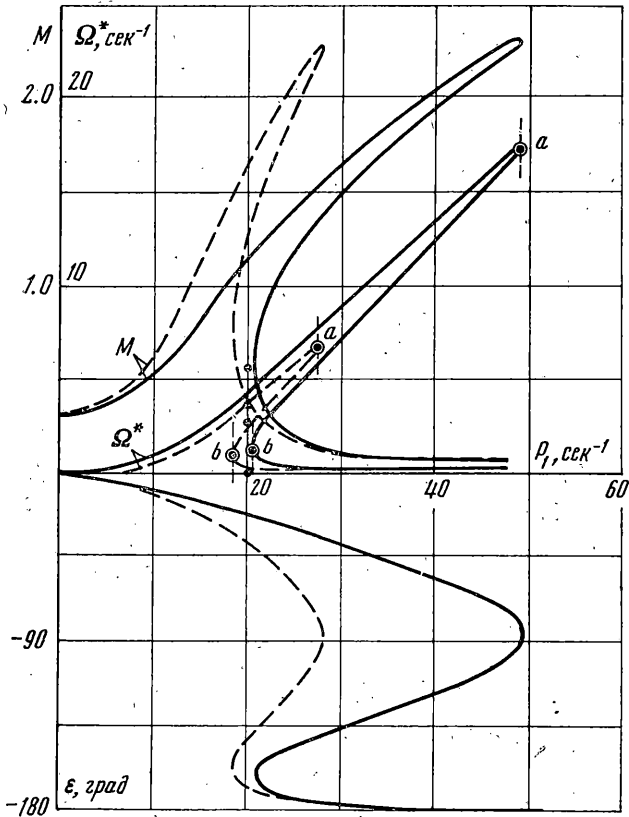
$$Q_c = Q(y_c), \quad \|W_{ij}(i\omega_p)\| = \overline{W(i\omega_p)} = S^{-1}(i\omega_p)$$

$S(p) = A_0 p^2 + A_1 p + A_2 - B_1$  — операционная матрица первого из уравнений (1.3) при  $\omega_3 = \Omega = \text{const}$ , определитель которой  $\det S(i\omega_p)$  предполагается отличным от нуля. Матрица  $B_1$  определяется из соотношения

$B_1 z_c = \Phi_1(z_c, \Omega)$  и имеет вид

$$B_1 = \begin{vmatrix} i\Omega(1+Y_\omega) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ im\Omega & iA\Omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} (m \times m)$$

При  $\det S(i\omega_p) \neq 0$  корни уравнения (2.3) совпадают с корнями полинома относительно  $\Omega$ , получающегося умножением (2.3) на величину



Фиг. 1

$\det S(i\omega_p) \cdot \overline{\det S(i\omega_p)}$ . Число стационарных движений определяется числом вещественных корней этого полинома порядка  $(2r+1)$  относительно  $\Omega$ , имеющего вещественные коэффициенты, где  $r \leq m$  — порядок полинома  $P_r(p) = \det S(p)$ . Существование хотя бы одного вещественного корня  $\Omega_1^*$ , а также возможность существования лишь нечетного числа вещественных корней  $\Omega_k^* (k=1 \dots 2n+1), n \leq r$  в этом случае устанавливается известными теоремами [3].

Легко установить, что найденные стационарные движения  $y_{ch} = \{\Omega_k^*, \Omega_k^* t\}^*$ ,  $z_{ch} = z_1^{*k}(i\omega_{pk}^*) e^{i\omega_{pk}^* t}$ , в которых

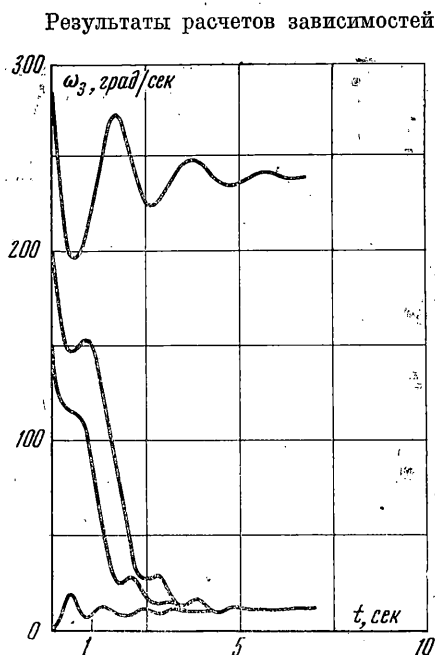
$$(2.4) \quad z_{1j}^{*k} = W_{jm}^{*k}(i\omega_{pk}^*) k_H H, \quad \|W_{jv}^{*k}(i\omega_{pk}^*)\| = W^{*k}(i\omega_{pk}^*) = [S_k^*(i\omega_{pk}^*)]^{-1}$$

$$S_k^* = A_0 p^2 + A_1 p + A_2 - B_{1k}^*, \quad B_{1k}^* = B_1(\Omega_k^*), \quad \omega_{pk}^* = p_1 - \Omega_k^*$$

входят в однопараметрическое семейство стационарных движений вида

$$(2.5) \quad y_{ch} = \{\Omega_k^*, \Omega_k^* t + \gamma_0\}^*, \quad z_{ch} = z_1^* e^{i(\omega_{pk}^* - \gamma_0)}$$

где  $\gamma_0$  — произвольный начальный угол крена.



Фиг. 2

Результаты расчетов зависимостей величин  $\Omega^*$ , модуля  $M$  и аргумента  $\epsilon$  (отношения  $z_{11}^*(i\omega_p^*)/k_H H$  от частоты управляющего сигнала  $p_1$  приведены на фиг. 1 для следующих параметров системы (1.5):  $k_H H = 0.1$  рад,  $k_\varphi^* = k_\omega^* = m_0 = 0$ ,  $m_3 = -1.5$  сек<sup>-1</sup>,  $m_\varphi = -160$  сек<sup>-2</sup>,  $m_\omega = -1.5$  сек<sup>-1</sup>,  $m_\delta = 70$  сек<sup>-2</sup>,  $k' = 0.75$ ,  $Y = -0.85$  сек<sup>-1</sup>,  $T = 10^{-3}$  сек;  $B = 400$  сек<sup>-2</sup> — для пунктирных кривых;  $B = 10^3$  сек<sup>-2</sup> — для сплошных кривых. Звездочками на фиг. 1 отмечены начальные условия по  $\omega_3$ , при которых выполнялось численное интегрирование уравнений (1.5). При этом остальные начальные условия принимались нулевыми. Результаты интегрирования для  $B = 10^3$  сек<sup>-2</sup> и  $p_1 = 20$  сек<sup>-1</sup>, приведенные на фиг. 2, показывают сходимость к различным ветвям кривой  $\Omega^*$ . На фиг. 3 кривые 1-5 получены при  $B = 0, 20, 50, 200$  и  $10^3$  сек<sup>-2</sup> и  $k' = k_\varphi^* = k_\omega^* = 0$ . Кривые 6 получены при  $k_\varphi^* = 2.75$  и  $k_\omega^* = 0.155$  сек и практически совпадают для  $B = 0$  и  $B = 10^3$  сек<sup>-2</sup>.

3. Рассмотрим отклонения от стационарных движений  $z_0 = \{z_1^0 \dots z_m^0\}^*$  и  $y_0 = \{\omega_3^0, \gamma^0\}^*$ , определяемые формулами

$$(3.1) \quad z = z_c + z_0, \quad y = y_c + y_0$$

Уравнения (1.3) относительно  $z_0$  и  $y_0$  могут быть записаны следующим образом:

$$(3.2) \quad A_0 z_0'' + A_1 z_0' + (A_2 - B_1^*) z_0 - (C_1 + C_2) y_0 = \Phi_1' + Q'$$

$$y_0' + B \operatorname{Im}(B_2 z_0) - A_3 y_0 = \Phi_2'$$

где  $\Phi_1'$ ,  $\Phi_2'$  и  $Q'$  — совокупность высших членов разложения функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $Q$  в ряд Тейлора

$$C_1 = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right|_{\substack{y=y_c \\ z=z_c}}, \quad C_2 = \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{\substack{y=y_c \\ z=z_c}}, \quad B_2 = \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right|_{\substack{y=y_c \\ z=z_c}}$$

Основное свойство уравнений (3.2) заключается в приводимости их к нелинейным автономным уравнениям преобразованием Ляпунова [4] над вектором  $z_0$  следующего вида:

$$(3.3) \quad z_0 = N u, \quad N = \operatorname{diag} [e^{i\omega_p^* t} \dots e^{i\omega_p^* t}] (m \times m)$$

Относительно  $(2m+2)$ -компонентного вещественного вектора фазовых координат  $x = \{u_R, u_I, y_0\}^*$  — приведенная линейная часть системы (3.1) имеет вид

$$(3.4) \quad L(p) x_i = 0$$

где индекс  $l$  обозначает преобразование соответствующей функции времени по Лапласу, а  $L(p)$  имеет вид

$$L(p) = \begin{vmatrix} S_{1R}(p) - S_{1I}(p) & -C_R^* \\ S_{1I}(p) & S_{1R}(p) - C_I^* \\ -M_{11} & -M_{12} & S_2(p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11}(p) & L_{12} \\ L_{21} & L_{22}(p) \end{vmatrix}$$

Здесь и далее нижние индексы  $R$  и  $I$  обозначают вещественную и мнимую часть комплексных величин.

Для принятого порядка переменных имеем

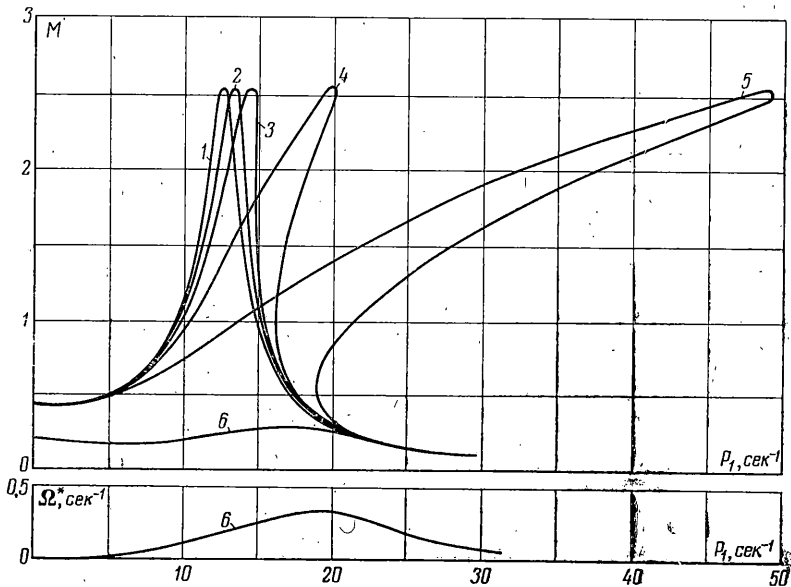
$$u_R = \{\alpha_1', \omega_1', \delta_1' \dots\}^* (m \times 1) \quad u_I = \{\alpha_2', \omega_2', \delta_2' \dots\}^* (m \times 1)$$

$$M_{11} = B \begin{vmatrix} \delta_2^* & 0 & -\alpha_2^* & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{vmatrix} (2 \times m), \quad M_{12} = B \begin{vmatrix} -\delta_1^* & 0 & \alpha_1^* & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{vmatrix} (2 \times m)$$

$$C_R^* = \begin{vmatrix} -\alpha_2^* (1 + Y_\omega) & 0 \\ -A\omega_2^* - m\alpha_2^* & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{vmatrix} (m \times 2), \quad C_I^* = \begin{vmatrix} \alpha_1^* (1 + Y_\omega) & 0 \\ A\omega_1^* + m\alpha_1^* & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{vmatrix} (m \times 2)$$

$$S_1(p) = S^*(p + i\omega_p^*)$$

где  $S^*(p)$  и  $\omega_p^*$  определяются формулами (2.4).



Фиг. 3

4. Исследуем устойчивость стационарных движений. Автономная нелинейная система, полученная из (3.2) преобразованием Ляпунова, допускает однопараметрическое семейство стационарных движений, соответствующее соотношению (2.5), и аналитична в той же области, в которой лежит стационарное движение. Если принять одно из движений семейства за

невозмущенное, то, как показано в [5], один корень линеаризованного уравнения в вариациях (3.4) равен нулю. В силу этого характеристический полином

$$(4.1) \quad \det L(p) = pL_0(p)$$

Если корни полинома

$$(4.2) \quad L_0(p) = 0$$

имеют отрицательные вещественные части, рассматриваемый критический случай в теории устойчивости является особенным. Как показано в [5], в этом случае невозмущенное движение устойчиво, и всякое возмущенное движение стремится к одному из установившихся движений семейства. Эта теорема позволяет сформулировать условия устойчивости стационарных движений как условия Рауса — Гурвица или эквивалентные им алгебраические или геометрические условия для полинома (4.2).

Суждения о неустойчивости некоторых стационарных движений можно сделать по виду кривой  $\Omega^*(p_1)$ , удовлетворяющей уравнению (2.3), которое можно записать в виде

$$R = m_3 \Omega^* - B k_H^2 H^2 \operatorname{Im} [W_{1m}^*(i\omega_p^*) \overline{W_{3m}(i\omega_p^*)}] + m_0 = 0$$

Из формулы для производной от неявной функции

$$\frac{d\Omega^*}{dp_1} = - \frac{\partial R / \partial p_1}{\partial R / \partial \Omega^*}$$

следует, что в точках кривой  $\Omega^*(p_1)$ , имеющих вертикальную касательную, производная  $\partial R / \partial \Omega^*$  меняет знак. Знак производной  $\partial R / \partial \Omega^*$  на каждом из участков кривой  $\Omega^*(p_1)$  легко установить, поскольку

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \frac{\partial R}{\partial \Omega^*} = m_3 < 0$$

Покажем, что последний коэффициент характеристического уравнения (4.2) совпадает с  $\partial R / \partial \Omega^*$  с точностью до отрицательного множителя, и тем самым установим неустойчивость стационарных движений, для которых  $\partial R / \partial \Omega^* > 0$ . В частности, для системы (1.5) эти движения соответствуют значениям  $\Omega^*$ , заключенным между точками *a* и *b* (фиг. 1).

Из равенства

$$\det L(p) = \det L_{11}(p) p(p - m_3) - p \Psi(p) \det L_{11}(p) - \\ - k_H H h_{1,2m} \det L_{11}(p) = \sigma_0 p^{2r+2} + \sigma_1 p^{2r+1} + \dots + \sigma_{2r+1} p$$

в котором

$$\Psi = \alpha_2^* (1 + Y_\omega) h_{11} + (A \omega_2^* + m^* \alpha_2^*) h_{12} - \\ - \alpha_1^* (1 + Y_\omega) h_{1, m+1} - (A \omega_1^* + m^* \alpha_1^*) h_{1, m+2} \\ h_{1j} = -B \delta_2^* l_{1j} + B \alpha_2^* l_{3j} + B \delta_1^* l_{m+1, j} - B \alpha_1^* l_{m+3, j} \\ \|l_{ij}\| = L_{11}^{-1}(p)$$

следует

$$(4.3) \quad [\det L(p)]' |_{p=0} = \sigma_{2r+1} = -\det L_{11}(0) [m_3 + \Psi(0) + k_H H h_{1,2m}(p) |_{p=0}]$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по  $p$ . Сравнивая (4.2) с  $\partial R/\partial \Omega^*$ , можно утверждать равносильность следующих равенств:

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega^*} = - \frac{1}{\det L_{11}(0)} \sigma_{2r+1}$$

в котором

$$\det L_{11}(p) = \{[\det S_1(p)]_R\}^2 + \{[\det S_1(p)]_I\}^2$$

и

$$\Psi(0) + k_H H h'_{1,2m}(p)|_{p=0} = -B k_H^2 H^2 \frac{\partial}{\partial \Omega^*} \operatorname{Im} [W_{1m}^*(i\omega_p^*) \overline{W_{3m}^*(i\omega_p^*)}]$$

Справедливость последнего равенства следует из равенств (4.4)  $l_{ij} = \operatorname{Re} t_{ij}$ ,  $l_{m+1, j} = \operatorname{Im} t_{ij}$ ,  $\|t_{ij}\| = T(p) = S_1^{-1}(p)$ .

$$T'(p)|_{p=0} = i \frac{\partial W^*(i\omega_p^*)}{\partial \Omega^*} - i W^*(i\omega_p^*) \frac{\partial B_1^*}{\partial \Omega^*} W^*(i\omega_p^*)$$

Последнее равенство получается дифференцированием по  $p$  и  $\Omega^*$  тождеств:  $W^*(i\omega_p^*) S_1(0) = E$  и  $S_1(p) T(p) = E$ , справедливых в силу (4.3), (3.5) и (2.4).

Стационарные движения, для которых  $\partial R/\partial \Omega^* < 0$ , обычно устойчивы при  $B=0$ . Для этого, как следует из (3.5) и (4.1), должен удовлетворять условиям Гурвица характеристический полином  $(p-m_3) \det L_{11}(p) = 0$ , где  $\det L_{11}(p) = \det S_1(p) \det \overline{S_1(p)}$ , а  $S_1(p)$  определено в п. 2. Эти условия выполняются, так как  $m_3 < 0$ , а устойчивость движения по тангажу и курсу при постоянных  $\omega_3$ , принадлежащих расчетному диапазону, является обязательной при проектировании аппарата. Используя непрерывную зависимость характеристического полинома (4.2) от  $B$ , можно доказать в рассматриваемом случае устойчивость стационарных движений и при значениях  $B$ , отличных от нуля.

Поступила 25. II 1972.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Святодух В. К. Динамика пространственного движения управляемых ракет. М., «Машиностроение», 1969.
2. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика пространственного движения самолета. М., «Машиностроение», 1967.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1967.