1974 МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА № 1

УДК 531.01

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГИМИ СТЕРЖНЯМИ

В. М. МОРОЗОВ, В. Н. РУБАНОВСКИЙ

(*Москва*)

Задача об устойчивости движения твердого тела с упругими элементами рассматривалась многими авторами. Один из распространенных подходов к решению этой задачи состоит в том, что в качестве модели упругих элементов принимаются системы с конечным числом степеней свободы того или иного вида. Такой подход был использован, например, в работах [1–4]. Устойчивость в таком случае исследуется лишь по уравнениям первого приближения, и для получения позитивных суждений об устойчивости необходимо введение в систему диссипации. В. В. Румянцевым был предложен [5] строгий общий метод исследования устойчивости стационарных движений твердого тела с жидким заполнением, в основе которого лежат идеи второго метода Ляпунова. В работе [6] В. В. Румянцев распространил этот метод на упругое тело с полостью, содержащей жидкость. В работе [7] излагается метод исследования устойчивости систем, состоящих из твердого тела и присоединенной к нему системы с бесконечным числом степеней свободы, также основанный на втором методе Ляпунова. Следует отметить, что основные положения работы [7] лишь повторяют некоторые из положений метода, изложенного в [5, 6].

Ниже рассматривается движение в центральном ньютоновском поле сил твердого тела с тремя парами упругих стержней. На основе теоремы Лагранжа [6] получены достаточные условия устойчивости относительного равновесия этой системы на круговой орбите.

Показано, что присоединение к телу упругих стержней приводит к сужению области устойчивости положения равновесия твердого тела.

1. Рассмотрим в центральном ньютоновском поле сил движение твердого тела, несущего на себе некоторое число упругих тонких нерастяжимых стержней, каждый из которых имеет постоянное поперечное сечение и две плоскости симметрии. Пренебрегая влиянием относительного движения системы на движение ее центра масс, будем считать, что последний равномерно движется по круговой орбите с угловой скоростью Ω.

Введем следующие правые прямоугольные системы осей координат: инерциальную $O_1\xi\eta\zeta$ с началом в неподвижном притягивающем центре O_1, имеющем массу M_* и гравитационную постоянную f; орбитальную $Cxyz$ с началом в центре C масс системы, ось z которой направлена по радиус-вектору $\mathbf{R}_c$ центра масс C относительно точки O_1, ось x лежит в плоскости орбиты и направлена в сторону движения центра масс, ось y перпендикулярна плоскости орбиты; подвижную $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре O масс твердого тела и осями, направленными по его главным центральным осям инерции. Пусть $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — единичные векторы, направленные по осям x_1, x_2, x_3. Орты осей y и z обозначим через β и γ, а их проекции на оси x_i — через β_i и γ_i ($i=1, 2, 3$).

Будем считать, что четное число (два, четыре, шесть) упругих стержней длины l защемлены в теле на одинаковых расстояниях a от его центра масс и в недеформированных состояниях расположены по осям x_1, x_2, x_3, при этом координатные плоскости x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 служат плоскостями их симметрии. Сопоставим индексы 1, 2, 3 стержням, расположенным вдоль положительных направлений осей x_1, x_2, x_3, и индексы 4, 5, 6 — стержням, расположенным вдоль отрицательных направлений тех же осей соответственно. Обозначим через

$$\mathbf{u}_j(s,\,t)=u_{1j}\mathbf{i}_1+u_{2j}\mathbf{i}_2+u_{3j}\mathbf{i}_3 \quad (j=1,\,\ldots,\,6), \qquad 0\leqslant s\leqslant l, \qquad t\geqslant t_0$$

векторы упругих перемещений точек стержней. Условие нерастяжимости стержней приводит к соотношениям

$$(1.1) \qquad u_{11}'=-{}^1/_2(u_{21}'^2+u_{31}'^2),\; u_{22}'=-{}^1/_2(u_{32}'^2+u_{12}'^2)$$
$$u_{33}'=-{}^1/_2(u_{13}'^2+u_{23}'^2)$$
$$u_{14}'={}^1/_2(u_{24}'^2+u_{34}'^2), \quad u_{25}'={}^1/_2(u_{35}'^2+u_{15}'^2), \quad u_{36}'={}^1/_2(u_{16}'^2+u_{26}'^2)$$

где $u'=\partial u/\partial s$, а условия защемления в теле одного из концов стержней — к равенствам

$$(1.2) \qquad u_{ij}=u_{i,j+3}=0, \qquad u_{ij}'=u_{i,j+3}'=0 \quad \text{при } s=0,\; t\geqslant t_0 \quad (i,j=1,2,3;\; i\neq j).$$

Из (1.1) следует, что u_{ii}, $u_{i,\,3+i}$ $(i=1,\,2,\,3)$ суть величины второго порядка малости, если за величины первого порядка малости приняты u_{ij}, $u_{i,\,3+j}$ $(i,\,j=1,\,2,\,3;\; i\neq j)$ и их первые производные u_{ij}', $u_{i,\,3+j}'$.

Радиус-вектор какой-либо точки системы относительно точки O обозначим через $\mathbf{r}=x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2+x_3\mathbf{i}_3$. Для точек стержней $\mathbf{r}=\mathbf{r}^0+\mathbf{u}(\mathbf{r}^0,\,t)$, где $\mathbf{r}^0$ — радиус-вектор соответствующей точки стержня в его недеформированном состоянии. Обозначая через $\mathbf{r}_c=x_{1C}\mathbf{i}_1+x_{2C}\mathbf{i}_2+x_{3C}\mathbf{i}_3$ радиус-вектор центра C масс системы относительно точки O, будем иметь

$$(1.3) \qquad Mx_{1C}=\sigma\rho\int_0^l(u_{12}+u_{15}+u_{13}+u_{16})\,ds \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 12 & \ldots & 6\end{pmatrix}$$

Здесь символ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 12 & \ldots & 6\end{pmatrix}$ справа указывает, что две другие формулы получаются из приведенной посредством циклической перестановки (1 2 3) индексов у величин с одним переменным индексом и первых индексов у величин с двумя перменными индексами, а также одновременной циклической перестановки (1 2 3 4 5 6) вторых индексов у величин с двумя переменными индексами; M — масса системы, σ — площадь поперечного сечения стержней, ρ — плотность стержней.

Вектор $\boldsymbol{\omega}_0$ абсолютной угловой скорости тела представим в виде суммы $\boldsymbol{\omega}_0=\Omega\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости тела относительно орбитальной системы осей координат, проекции которого на оси x_i обозначим через ω_i $(i=1,\,2,\,3)$. Кинетическая энергия системы в ее движении относительно центра масс равна

$$T_0=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0\cdot\Theta^C\cdot\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\omega}_0\cdot\int_M(\mathbf{r}-\mathbf{r}_C)\times(\mathbf{r}^{\boldsymbol{\cdot}}-\mathbf{r}_C^{\boldsymbol{\cdot}})\,dm+\frac{1}{2}\int_M(\mathbf{r}^{\boldsymbol{\cdot}}-\mathbf{r}_C^{\boldsymbol{\cdot}})^2\,dm$$

где $\mathbf{r}^{\boldsymbol{\cdot}}=\partial\mathbf{r}/\partial t$, Θ^C — тензор инерции системы относительно ее центра масс с компонентами

$$(1.4) \qquad \vartheta_{11}=J_{11}-M(x_{2C}^2+x_{3C}^2)+\sigma\rho\int_0^l\{u_{21}^2+u_{24}^2+u_{31}^2+u_{34}^2+u_{32}^2+$$
$$+u_{35}^2+u_{23}^2+u_{26}^2-\left[a(l-s)+\frac{1}{2}(l^2-s^2)\right](u_{32}'^2+u_{35}'^2+$$
$$+u_{12}'^2+u_{15}'^2+u_{13}'^2+u_{16}'^2+u_{23}'^2+u_{26}'^2)\}\,ds \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 12 & \ldots & 6\end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{23}=Mx_{2C}x_{3C}-\sigma\rho\int_0^l[(a+s)(u_{23}-u_{26}+u_{32}-u_{35})+u_{21}u_{31}+$$
$$+u_{24}u_{34}]\,ds \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 12 & \ldots & 6\end{pmatrix} \qquad J_{ii}=A_i+4I_0 \quad (i=1,\,2,\,3)$$

Здесь A_i — главные центральные моменты инерции твердого тела, I_0 — момент инерции одного недеформированного стержня относительно точки O. В (1.3) и (1.4) x_{ic} вычислены с точностью до членов первого порядка малости включительно относительно величин u_{ij}, $u_{i\,3+j}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ i\neq j)$, а ϑ_{ij} — с точностью до членов второго порядка малости относительно тех же величин и их первых производных.

Потенциальная энергия системы слагается из потенциальных энергий сил притяжения Π_g и упругой деформации Π_d. Вычисляя Π_g с точностью до членов порядка $L^3R_C^{-3}$ включительно, где L — характерный линейный размер тела, получим

$$\Pi_g=\frac{1}{2}\Omega^2\sum_{(123)}[(1-3\gamma_1^2)\vartheta_{11}-6\vartheta_{23}\gamma_2\gamma_3] \tag{1.5}$$

Здесь символ (1 2 3) под знаком суммы означает, что два других слагаемых получаются из написанного циклической перестановкой индексов 1, 2, 3; отметим еще, что в (1.5) отброшено постоянное слагаемое $fM_*MR_C^{-1}$ и учтено, что $\Omega^2=fM_*R_C^{-3}$.

Для Π_d примем выражение

$$\Pi_d=\frac{1}{2}E\int_0^l(I_{31}u_{21}''^2+I_{21}u_{31}''^2+I_{34}u_{24}''^2+I_{24}u_{34}''^2+I_{12}u_{32}''^2+I_{32}u_{12}''^2+$$
$$+I_{15}u_{35}''^2+I_{35}u_{15}''^2+I_{23}u_{13}''^2+I_{13}u_{23}''^2+I_{26}u_{16}''^2+I_{16}u_{26}''^2)\,ds \tag{1.6}$$

где E — модуль Юнга, I_{ij} — момент инерции поперечного сечения j-го стержня относительно прямой, проведенной через центр тяжести сечения параллельно оси x_i, EI_{ij} — жесткости на изгиб.

Рассматриваемая механическая система допускает обобщенный интеграл энергии $T+W=\mathrm{const}$, где T — кинетическая энергия системы в ее движении относительно орбитальной системы осей координат

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\Theta^C\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\cdot\int_M(\mathbf{r}-\mathbf{r}_C)\times(\mathbf{r}^{\cdot}-\mathbf{r}_C^{\cdot})\,dm+\frac{1}{2}\int_M(\mathbf{r}^{\cdot}-\mathbf{r}_C^{\cdot})^2\,dm \tag{1.7}$$

а W — измененная потенциальная энергия системы

$$W={}^1\!/_2\Omega^2[3\gamma\cdot\Theta^C\cdot\gamma-\beta\cdot\Theta^C\cdot\beta-\mathrm{Sp}\,\Theta^C]+\Pi_d \tag{1.8}$$

2. Уравнения для определения положений относительного равновесия системы можно получить из принципа возможных перемещений, вычислив и приравняв нулю первую вариацию δW функционала W. Нетрудно показать, что эти уравнения допускают решение

$$\gamma_1=\gamma_3=\beta_1=\beta_2=0,\quad \gamma_2=\beta_3=1,\quad u_{ij}=u_{i\,3+j}=0\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ i\neq j) \tag{2.1}$$

описывающее положение равновесия системы относительно орбитальной системы координат, при этом главные центральные оси x_1, x_3, x_2 инерции тела направлены соответственно по касательной, бинормали и радиус-вектору орбиты, а стержни находятся в недеформированном состоянии.

Принимая движение (2.1) за невозмущенное, исследуем его устойчивость.

Достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (2.1) получим [6] как условия положительной определенности второй вариации δ^2W функционала W для решения (2.1) в метрике, по отношению к которой функционал W непрерывен. Переходя от u_{ij} и s к безразмерным переменным, представляющим собой отношение этих величин к длине l стержня, и сохраняя за последними прежние обозначения, выражение для $\delta^2 W$ представим в виде

$$\delta^2 W = F_0(u_{ij}) + F_1(u_{ij}, \gamma, \beta) + F_2(\gamma, \beta)$$

$$F_0 = \frac{1}{2}\mu m\Omega^2 \left\{ 3\left[\int_0^1 (u_{21}+u_{24}+u_{23}+u_{26})\,ds\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \left[\int_0^1 (u_{31}+u_{34}+u_{32}+u_{35})\,ds\right]^2 \right\} + \frac{EI}{2l}\int_0^1 [L_1(u_{21})u_{21}+L_1(u_{24})u_{24}+$$

$$+L_2(u_{23})u_{23}+L_2(u_{26})u_{26}+L_3(u_{31})u_{31}+L_3(u_{34})u_{34}+L_4(u_{32})u_{32}+$$

$$+L_4(u_{35})u_{35}+L_5(u_{12})u_{12}+L_5(u_{15})u_{15}+L_6(u_{13})u_{13}+L_6(u_{16})u_{16}]\,ds$$

$$F_1 = -\frac{EI}{l}\int_0^1 (a_0+s)\,[3k^4\gamma_1(u_{21}-u_{24}+u_{12}-u_{15})+$$

$$+4k^4\gamma_3(u_{32}-u_{35}+u_{23}-u_{26}) - k^4\beta_1(u_{31}-u_{34}+u_{13}-u_{16})\,]\,ds$$

$$F_2 = {}^1/_2\Omega^2[(J_{33}-J_{11})\beta_1^2+3(J_{11}-J_{22})\gamma_1^2+4(J_{33}-J_{22})\gamma_3^2]$$

$$L_1(u) = u^{IV}-3k^4u,\quad L_2(u) = u^{IV}+k^4[f(s)u']'-3k^4u$$

$$L_3(u) = u^{IV}+k^4u,\quad L_4(u) = u^{IV}-3k^4[f(s)u']'+k^4u$$

$$L_5(u) = u^{IV}-3k^4[f(s)u']',\quad L_6(u) = u^{IV}+k^4[f(s)u']'$$

$$\mu = \frac{m}{M},\qquad m = \sigma\rho l,\qquad k^4 = \frac{ml^3\Omega^2}{EI},\qquad I_{ij} = I$$

$$f(s) = a_0(1-s)+\frac{1}{2}(1-s^2),\qquad a_0 = \frac{a}{l}$$

Условия положительной определенности $\delta^2 W$ можно разбить на две группы, первая из которых обеспечивает положительную определенность функционала F_0, а вторая представляет условия положительной определенности некоторой квадратичной формы переменных γ_1, γ_3, β_1. Последнюю группу условий получим, используя предложенный в [8] способ разбиения $\delta^2 W$, а именно: $\delta^2 W = F_0(u_{ij}-u_{ij}^0)+U(\gamma, \beta)$.

Здесь $u_{ij}^0(s)$ — решения некоторых краевых задач, получающихся из условий минимума по u_{ij} функционала F_0+F_1 при фиксированных γ_1, γ_3, β_1. Для квадратичной формы $U(\gamma, \beta)$ имеем

$$U(\gamma, \beta) = F_2(\gamma, \beta)+{}^1/_2F_1(u_{ij}^0, \gamma, \beta)$$

Решения u_{ij}^0, как нетрудно показать, будут линейными функциями γ_1, γ_3, β_1, а $F_1(u_{ij}^0, \gamma, \beta)$ — квадратичной формой этих переменных. Выражение для $U(\gamma, \beta)$ можно представить в виде

$$U(\gamma, \beta) = {}^1/_2\Omega^2[3(J_{11}-J_{22}-b_1)\gamma_1^2+4(J_{33}-J_{22}-b_3)\gamma_3^2+ \\ +(J_{33}-J_{11}-b_2)\beta_1^2] \tag{2.2}$$

где положительные постоянные $b_i(i=1, 2, 3)$ могут быть вычислены по решениям u_{ij}^0 при помощи известных численных методов.

Условия положительной определенности квадратичной формы (2.2) имеют вид

$$J_{11}-J_{22}-b_1>0,\qquad J_{33}-J_{22}-b_3>0,\qquad J_{33}-J_{11}-b_2>0 \tag{2.3}$$

Условия положительной определенности функционала F_0 вместе с условиями (2.3) являются достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения (2.1) по отношению к величинам [6]:

$$\gamma_i,\quad \beta_i,\quad \omega_i,\quad u_{ij},\quad u_{ij}',\quad \int_0^1 u_{ij}''^2\,ds,\quad \int_0^1 u_{ij}^{\cdot 2}\,ds \quad (i=1,2,3;\ j=1,\ldots,6)$$

3. Достаточные условия устойчивости могут быть получены без использования вычислительных методов. Сделаем для этого оценки соответствующих функционалов

$$F_0\geqslant\Phi_0=\frac{EI}{2l}\int_0^1[L_1(u_{21})u_{21}+L_1(u_{24})u_{24}+\varkappa L_2^\circ(u_{23})u_{23}+$$
$$+\varkappa L_2^\circ(u_{26})u_{26}+L_3^\circ(u_{31})u_{31}+L_3^\circ(u_{34})u_{34}+L_3^\circ(u_{32})u_{32}+$$
$$+L_3^\circ(u_{35})u_{35}+L_4^\circ(u_{12})u_{12}+L_4^\circ(u_{15})u_{15}+$$
$$+\varkappa L_4^\circ(u_{13})u_{13}+\varkappa L_4^\circ(u_{16})u_{16}]ds$$

Здесь

$$L_2^\circ=u^{\text{IV}}-\lambda^4 u,\qquad L_3^\circ=u^{\text{IV}}+k^4(1-4\mu)u,\qquad L_4^\circ=u^{\text{IV}}$$
$$\varkappa=1-{}^1/_2k^4({}^1/_2+a_0),\qquad \lambda^4=3k^4/\varkappa$$

Достаточными условиями положительной определенности функционала F_0, как нетрудно проверить, являются неравенства

$$\varkappa>0,\quad 3k^4<\nu_*^4,\quad 3k^4<\nu_*^4\varkappa \tag{3.1}$$

В (3.1) $\nu_*=1.875$ — первый корень уравнения $1+\operatorname{ch}\nu\cos\nu=0$.

Ввиду того, что операторы $L_i(u)$, входящие в выражение для функционала Φ_0, представляют собой линейные операторы с постоянными коэффициентами, определение решений $u_{ij}^\circ(s)$ не представляет труда. Выражения для коэффициентов b_i в таком случае имеют вид $(a_0=0)$

$$b_1=2ml^2\left[f_1(\nu_1)+\frac{11}{140}k^4\right],\quad f_1(\nu_1)=\frac{\operatorname{ch}\nu_1\sin\nu_1-\operatorname{sh}\nu_1\cos\nu_1}{\nu_1^3(1+\operatorname{ch}\nu_1\cos\nu_1)}-\frac{1}{3}$$
$$b_2=2ml^2\left[f_2(\nu_2)+\frac{11}{420}\frac{k^4}{\varkappa}\right],$$
$$f_2(\nu_2)=\frac{1}{3}-\frac{\operatorname{sh}2\nu_2-\sin 2\nu_2}{2\nu_2^3(2+\operatorname{ch}2\nu_2+\cos 2\nu_2)}$$
$$b_3={}^8/_3ml^2[f_1(\lambda)+3f_2(\nu_2)],\qquad \nu_2^4=k^4/4,\qquad \nu_1^4=3k^4$$

Итак, достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения (2.1) являются неравенства (2.3) и (3.1). В случае абсолютно жестких стержней эти условия переходят в известные условия устойчивости положения относительного равновесия твердого спутника на круговой орбите.

Для реальных стержней $k^4<2$, $\mu\ll 1$, так что условия (3.1) положительной определенности всегда выполнены. Однако при достаточно большой длине l штанг и небольшой жесткости E величина k^4 может стать значительно больше единицы. Для стальной штанги ($E=2\cdot 10^{12}$ *дин/см*^{2}) кругового поперечного сечения радиуса $r=0{,}5$ *см* при $l=10$ *м* $k^4=1.3\cdot 10^{-4}$, при $l=100$ *м* $k^4=1.3$. Для штанги в виде тонкостенной трубы толщины δ ($r=2$ *см*, $\delta=0.2$ *мм*, $E=2\cdot 10^{10}$ *дин/см*^{2}, $l=100$ *м*) $k^4=2$.

Условия (2.3) при большой длине штанг могут нарушаться.

Укажем достаточные условия устойчивости положения относительного равновесия (2.1) твердого тела с одной парой упругих стержней для различных случаев.

Случай 1. Пара стержней в положении относительного равновесия (2.1) имеет направление радиус-вектора орбиты. Достаточные условия устойчивости имеют вид

$$\begin{aligned} (3.2)\qquad & A_3>A_1, \qquad A_1-A_2+{}^2/_3ml^2(1-{}^{33}/_{140}k^4)>0 \\ & A_3-A_2+{}^2/_3ml^2[1-{}^1/_3f_2(\nu_2)]>0 \end{aligned}$$

Неравенства (3.2) показывают, что добавление к твердому телу абсолютно жестких стержней ($k=0$, $f_2=0$) расширяет область устойчивости и может сделать устойчивым неустойчивое положение равновесия (2.1) одного твердого тела, когда $A_2>A_3>A_1$ или $A_3>A_2>A_1$. Этим объясняется использование выдвижных штанг для целей стабилизации. Гибкость стержней ($k\neq0$, $f_2>0$) приводит к сужению области устойчивости.

Случай 2. Пара стержней в положении относительного равновесия (2.1) имеет направление нормали к плоскости орбиты. Достаточные условия устойчивости имеют вид

$$\begin{aligned} (3.3)\qquad & 3k^4<\nu_*\varkappa, \qquad \varkappa>0, \qquad A_1>A_2 \\ & A_3-A_2-{}^2/_3ml^2[1+4f_1(\lambda)]>0 \\ & A_3-A_1-\frac{2}{3}ml^2\left[1+\frac{11}{140}\frac{k^4}{\varkappa}\right]>0 \end{aligned}$$

Отметим, что этот случай рассматривался в [7]. Приведенные там достаточные условия устойчивости, вследствие допущенной ошибки при вычислении тензора инерции системы, содержат функционалы, зависящие от упругих перемещений стержней. Это не дает возможности провести сравнение полученных в [7] условий устойчивости с условиями (3.3).

Случай 3. Пара стержней в положении относительного равновесия (2.1) имеет направление касательной к орбите. Достаточные условия устойчивости имеют вид

$$\begin{aligned} (3.4)\qquad & 3k^4<\nu_*{}^4, \qquad A_3>A_2 \\ & A_1-A_2-{}^2/_3ml^2[1+3f_1(\nu_1)]>0 \\ & A_3-A_1+{}^2/_3ml^2[1-3f_2(\nu_2)]>0 \end{aligned}$$

Неравенства (3.3) и (3.4) показывают, что добавление к твердому телу как абсолютно жестких, так и упругих стержней сужает область усточивости. Кроме того, в этих случаях добавляется еще условие устойчивости, связанное с возможностью потери устойчивости прямолинейной формы стержня.

Поступила 21 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
2. *Meirovitch L., Nelson H. D.* On the high-spin motion of a satellite containing elastic parts. J. Spacecraft and Rockets, 1966, vol. 3, No. 11, p. 1597–1602.
3. *Докучаев Л. В.* Динамика быстровращающегося космического аппарата с упругими штангами. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2.
4. *Willems P. Y.* Attitude stability of deformable satellites. Evolution d'attitude et stabilisation des satellites. Colloq. Internat., Paris, 1968.
5. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
6. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
7. *Meirovitch L.* Stability of a spinning body containing elastic parts via Liapunov's direct method. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 7, p. 1193–1200.
8. *Самсонов В. А.* О задаче минимума функционала при исследовании устойчивости движения тела с жидким наполнением. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.