с квадратичной функцией текучести, если $\Omega(\varepsilon_u)$ — возрастающая функция (последнее согласуется с известными опытами: см., например, [7]).

Обратимся теперь к деформационной упругой анизотропии. Согласно основной гипотезе для изучения изменений свойств материала в результате сложного нагружения, это нагружение можно заменить простым нагружением. Но в случае простого нагружения (в пространстве напряжений) первоначально изотропного тела компоненты полных (упругих плюс пластических) деформаций изменяются пропорционально одному параметру, т. е. $d\varepsilon_{ij}=d\mu\gamma_{ij}$, где $d\mu\geqslant 0$, $\gamma_{ij}=e_{ij}-e\delta_{ij}$, $e={}^1/_3e_{ii}$, $\gamma_{ij}=G_{ijkl}\sigma_{kl}$, $G_{ijkl}=A_{ijkl}-{}^1/_3\delta_{ij}A_{nnkl}$. Предположим, что пропорциональность $d\varepsilon_{ij}$ и $\gamma_{ij}$ имеет место при любом нагружении. Тогда, имея в виду $d\varepsilon_{ij}=d\lambda B_{ijkl}\sigma_{kl}$, для случая квадратичной функции текучести получим $G_{ijkl}=p(\varepsilon_u)B_{ijkl}$. Умножая последние на $s_{ij}s_{kl}$, где $s_{ij}=\sigma_u\varepsilon_{ij}\varepsilon_u^{-1}$, находим $p=\gamma_{ij}\varepsilon_{ij}/3\sigma_u\varepsilon_u=(1+\nu)/3E$. Здесь $E$, $\nu$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона при реверсе нагрузки после одноосного пластического растяжения до деформации $\varepsilon_{11}=\sqrt{2}/_3\varepsilon_u$.

Из соотношения $e=k\sigma$ $(e={}^1/_3A_{nnkl}\sigma_{kl},\ k=k(\varepsilon_u))$, обобщающего закон Гука для объемной сжимаемости, в силу произвольности $\sigma_{ij}$ следует $A_{nnij}=k\delta_{ij}$. Таким образом, для $A_{ijkl}$ получается следующее соотношение:

$$A_{ijkl}=({}^1/_2k-p\Omega)\delta_{ij}\delta_{kl}+{}^3/_2p\Omega(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+3p(1-\Omega)\varepsilon_u^{-2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{3}$$

При $k=\text{const}$, $p=\text{const}$, $\Omega=1$ тензор (3) переходит в тензор модулей упругости изотропного тела.

Поступила 16 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М., Изд-во АН СССР, 1963.
3. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
4. *Baltov A., Sawczuk A.* A rule of anisotropic hardening. Acta Mech., 1965, vol. 1, No. 2.
5. *Мансуров Р. М.* Об одном варианте теории пластичности для первоначально изотропных сред. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1971, № 8.
6. *Мансуров Р. М.* О пластическом нагружении первоначально изотропных сред с деформационной анизотропией. В сб.: Упругость и неупругость. М., Изд-во МГУ, 1971, № 2.
7. *Miastkowski J., Szezepinski W.* An experimental study of yield surfaces of prestrained brass. Internat. J. Solids and Structures, 1965, vol. 1, No. 2.

УДК 539.375

# ОБ ОДНОМ ПАРАМЕТРЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ РАЗРУШЕНИЯ

Е. Л. ЛЮБАРТ

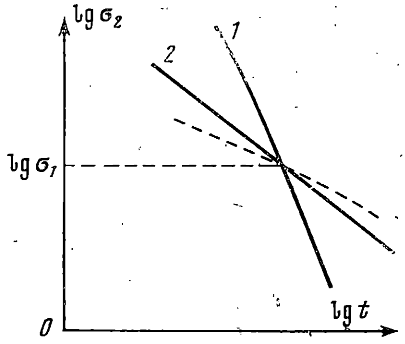
(*Москва*)

Хорошо известный подход к проблеме разрушения при ползучести [1,2] предполагает, что существует некоторый параметр $\omega$, описывающий поврежденность материала и монотонно изменяющийся от нуля в начальный момент до единицы в момент разрушения. Уравнение, задающее изменение параметра $\omega$ во времени, обычно принимается в виде

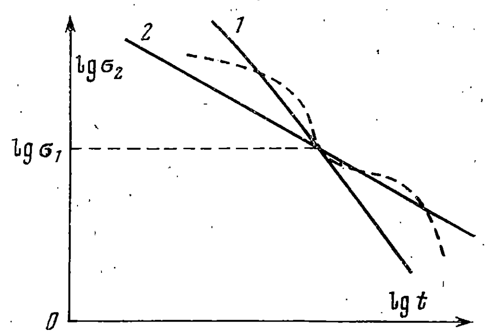
$$\frac{d\omega}{dt}=B\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^n \tag{1}$$

Время до разрушения, определяемое по этому уравнению, хорошо согласуется с экспериментальными данными в опытах при постоянном напряжении. В то же время результаты испытаний на длительную прочность при ступенчатом изменении напряжений обнаруживают отклонения от предсказаний по уравнению (1). Цель данной заметки – показать, что, оставаясь в рамках того же подхода, можно качественно описать некоторые эффекты, имеющие место в опытах при ступенчатом нагружении, если наряду с $\omega$ ввести еще один структурный параметр $q$. Определим этот параметр кинетическим уравнением $dq=\omega d\sigma$.

Если к образцу в начальный момент прикладывается нагрузка, которая впоследствии остается постоянной, то $q=0$ (при ступенчатом изменении напряжения




Фиг. 1




Фиг. 2

от $\sigma_1$ до $\sigma_2$ в момент, когда $\omega=\omega_1$, величина $q$ получает приращение $\Delta q=\omega_1(\sigma_2-\sigma_1)$). Рассмотрим теперь некоторое обобщение уравнения (1)

$$\frac{d\omega}{dt}=Bf(q)\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^n \tag{2}$$

Здесь функция $f(q)$ должна удовлетворять очевидным условиям $f(q)>0$ и $f(0)=1$. Пусть на образец в течение времени $t_1$ действует напряжение $\sigma_1$, а затем до разрушения $\sigma_2$. Тогда кривая длительной прочности, построенная для данной программы изменения напряжений по уравнению (1) $\lg\sigma_2\sim\lg t$, и кривая, найденная по испытаниям при постоянном напряжении, расположены так, как показано на фиг. 1 (кривые *1* и *2* соответственно). При $\sigma_2>\sigma_1$ кривая *1* расположена выше кривой *2*, а при $\sigma_2<\sigma_1$ наоборот. В то же время экспериментальные кривые не всегда расположены таким образом [3]. Введение в уравнение (2) параметра $q$ позволяет качественно получить и другие возможные расположения этих кривых, встречаемые в эксперименте. Так, например, если принять $f(q)=\exp(aq)$, $a>0$, то кривая длительной прочности для двухступенчатого нагружения при достаточно большом $a$ пройдет так, как показано на фиг. 1 пунктирной линией. Иными словами, ступенчатое повышение напряжений в этом случае приводит к разупрочнению материала, а понижение напряжений – к упрочнению. Несколько более сложное поведение можно получить, если не предполагать $f(q)$ монотонной функцией $q$, например, $a>0$, $b<0$ $f(q)=\exp(aq^4+bq^2)$. Соответствующая кривая показана на фиг. 2 пунктирной линией. Для окончательного выбора функции $f(q)$ необходимы подробные результаты экспериментов по ступенчатому нагружению.

Поступила 30 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
3. *Abo el Ata M. M., Finnie I.* A study of creep damage rules. Paper ASME, 1971, WA/Met-1.