УДК 539.374

ОБ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Р. М. МАНСУРОВ

(*Москва*)

Предположение, что параметры деформационной анизотропии являются функциями пластических деформаций, и постулат изотропии приводят к тому, что поверхность текучести при сложном нагружении является поверхностью вращения около луча простого нагружения, определяемого заданными пластическими деформациями, и имеет такие же форму и размеры, как после пластического растяжения. Для случая квадратичной функции текучести тензоры пластической и упругой анизотропии представлены через тензоры пластических деформаций.

Рассмотрим первоначально изотропное тело, которое приобретает изменяющуюся деформационную анизотропию в процессе пластического нагружения. Для упругих деформаций e_{ij} примем линейный закон Гука $e_{ij}=A_{ijkl}\sigma_{kl}$, где σ_{ij} — тензор напряжений, а для пластических деформаций ε_{ij} – соотношения теории течения с функцией текучести $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})=0$ (σ_{ij} — текущие координаты поверхности f, ε_{ij} — параметры этой поверхности). Будем считать тело пластически несжимаемым ($\varepsilon_{ii}=0$).

Примем известное допущение (см., например, [1]), что параметры деформационной анизотропии (как упругих, так и пластических свойств) являются функциями только от ε_{ij} (т. е. не зависят от истории нагружения). Назовем это допущение основной гипотезой. Согласно этой гипотезе, A_{ijkl} и f будут функциями ε_{ij}. Задача заключается в определении этих функций.

Рассмотрим вначале пластическую анизотропию. Согласно основной гипотезе, форма, ориентация и размеры поверхности f будут такие же, как и при простом нагружении до достижения деформаций ε_{ij}. С другой стороны, согласно постулату изотропии [2], поверхность f при простом нагружении будет поверхностью вращения около луча простого нагружения в пятимерном пространстве Ильюшина [2], а форма и размеры ее, как функций $\varepsilon_u=(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij})^{1/2}$, могут быть определены в опытах на двухкомпонентной машине после простого растяжения в пластической области. Поэтому полярное уравнение поверхности текучести можно представить в виде

$$f=\sigma_u^2-\varphi(\varepsilon_u, \cos\alpha)=0, \quad \sigma_u=(s_{ij}s_{ij})^{1/2}, \quad s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}, \quad \sigma={}^1/_3\sigma_{ii}, \quad \cos\alpha=s_{ij}\varepsilon_{ij}/\sigma_u\varepsilon_u$$

φ — экспериментальная функция. Для центральных поверхностей напряжения s_{ij}, входящие в выражение для f, удобно заменить на $s_{ij}{}^\circ=s_{ij}-s_{ij}{}^*$, где $s_{ij}{}^*$ — координаты центра поверхности f, определяемые согласно основной гипотезе соотношениями

$$s_{ij}{}^*=\frac{\sigma_u{}^*}{\varepsilon_u}\varepsilon_{ij}, \qquad \sigma_u{}^*=(s_{ij}{}^*s_{ij}{}^*)^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s{}^* \tag{1}$$

где $\sigma_s{}^*(\varepsilon_u)$ — расстояние от начала координат до центра упругой области в направлении первоначального растяжения до достижения пластической деформацией растяжения значения $\varepsilon_{11}=\sqrt{2}/_3\varepsilon_u$. Отметим, что соотношения (1) ранее предложены в [3].

Если опытные данные по определению φ можно с удовлетворительной точностью аппроксимировать эллипсом, то $\varphi=a^2[(1-\Omega)\cos^2\alpha+\Omega]^{-1}$, где $\Omega=a^2/b^2$, a и b – величины полуосей эллипса. В координатной форме уравнение квадратичной функции f можно представить в виде $f={}^1/_2B_{ijkl}\sigma_{ij}{}^\circ\sigma_{ij}{}^\circ-\sigma_s{}^2=0$, $\sigma_{ij}{}^\circ=\sigma_{ij}-s_{ij}{}^*$, где $\sigma_s(\varepsilon_u)=\sqrt{3}/_2a$ половина упругого интервала в направлении первоначального пластического растяжения. Для определения зависимости безразмерного тензора пластической анизотропии B_{ijkl} от ε_{ij} предыдущее полярное уравнение эллипсоида вращения нужно представить в координатной форме. После этого путем сравнения находим

$$B_{ijkl}=-\Omega[\delta_{ij}\delta_{kl}-{}^3/_2(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})]+3(1-\Omega)\varepsilon_u{}^{-2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{2}$$

Отметим, что тензор (2) по виду подобен тензору модулей упругости ортотропного тела, а также тензору пластической анизотропии, полученному в [4].

В [5, 6] подобное исследование проведено для случая, когда главные оси тензора σ_{ij} фиксированы, и показано, что сложное нагружение по траекториям деформаций в виде многозвенных ломаных достаточно хорошо описывается теорией течения с квадратичной функцией текучести, если $\Omega(\varepsilon_u)$ — возрастающая функция (последнее согласуется с известными опытами: см., например, [7]).

Обратимся теперь к деформационной упругой анизотропии. Согласно основной гипотезе для изучения изменений свойств материала в результате сложного нагружения, это нагружение можно заменить простым нагружением. Но в случае простого нагружения (в пространстве напряжений) первоначально изотропного тела компоненты полных (упругих плюс пластических) деформаций изменяются пропорционально одному параметру, т. е. $d\varepsilon_{ij}=d\mu\gamma_{ij}$, где $d\mu\geqslant0$, $\gamma_{ij}=e_{ij}-e\delta_{ij}$, $e={}^1/_3e_{ii}$, $\gamma_{ij}=G_{ijkl}\sigma_{kl}$, $G_{ijkl}=A_{ijkl}-{}^1/_3\delta_{ij}A_{nnkl}$. Предположим, что пропорциональность $d\varepsilon_{ij}$ и γ_{ij} имеет место при любом нагружении. Тогда, имея в виду $d\varepsilon_{ij}=d\lambda B_{ijkl}\sigma_{kl}$, для случая квадратичной функции текучести получим $G_{ijkl}=p(\varepsilon_u)B_{ijkl}$. Умножая последние на $s_{ij}s_{kl}$, где $s_{ij}=\sigma_u\varepsilon_{ij}\varepsilon_u^{-1}$, находим $p=\gamma_{ij}\varepsilon_{ij}/3\sigma_u\varepsilon_u=(1+\nu)/3E$. Здесь E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона при реверсе нагрузки после одноосного пластического растяжения до деформации $\varepsilon_{11}=\sqrt{2/3}\,\varepsilon_u$.

Из соотношения $e=k\sigma$ $(e={}^1/_3A_{nnkl}\sigma_{kl},\ k=k(\varepsilon_u))$, обобщающего закон Гука для объемной сжимаемости, в силу произвольности σ_{ij} следует $A_{nnij}=k\delta_{ij}$. Таким образом, для A_{ijkl} получается следующее соотношение:

$$A_{ijkl}=({}^1/_2k-p\Omega)\delta_{ij}\delta_{kl}+{}^3/_2p\Omega(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+3p(1-\Omega)\varepsilon_u^{-2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \qquad (3)$$

При $k=\text{const}$, $p=\text{const}$, $\Omega=1$ тензор (3) переходит в тензор модулей упругости изотропного тела.

Поступила 16 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М., Изд-во АН СССР, 1963.
3. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
4. *Baltov A., Sawczuk A.* A rule of anisotropic hardening. Acta Mech., 1965, vol. 1, No. 2.
5. *Мансуров Р. М.* Об одном варианте теории пластичности для первоначально изотропных сред. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1971, № 8.
6. *Мансуров Р. М.* О пластическом нагружении первоначально изотропных сред с деформационной анизотропией. В сб.: Упругость и неупругость. М., Изд-во МГУ, 1971, № 2.
7. *Miastkowski J., Szezepinski W.* An experimental study of yield surfaces of prestrained brass. Internat. J. Solids and Structures, 1965, vol. 1, No. 2.

УДК 539.375

ОБ ОДНОМ ПАРАМЕТРЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ РАЗРУШЕНИЯ

Е. Л. ЛЮБАРТ

(Москва)

Хорошо известный подход к проблеме разрушения при ползучести [1,2] предполагает, что существует некоторый параметр ω, описывающий поврежденность материала и монотонно изменяющийся от нуля в начальный момент до единицы в момент разрушения. Уравнение, задающее изменение параметра ω во времени, обычно принимается в виде

$$\frac{d\omega}{dt}=B\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^n \qquad (1)$$