УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПО КОМПОНЕНТАМ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В. А. ШАМИНА

(*Ленинград*)

Нелинейная задача о восстановлении вектора перемещения по компонентам тензора деформации решается по той же схеме, что и линейная: произвольная деформация материальной частицы разделяется на поступательное перемещение ее центра, чистую деформацию и чистый поворот, к определению которого сводится исходная задача. Для описания чистого поворота используется вектор конечного поворота Ω. Получено выражение Ω через вектор перемещения U. Составлены дифференциальные уравнения для определения Ω по тензору деформации.

Представленные в статье нелинейные соотношения теории деформации сплошной среды по структуре близки к соответствующим соотношениям классической линейной теории упругости.

Как известно, деформация материальной частицы сплошной среды сводится к поступательному перемещению, характеризуемому вектором перемещения $\mathbf{U}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ центра частицы, повороту связанных с нею главных осей деформации и удлинениям вдоль этих осей, причем при известном перемещении $\mathbf{U}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ подсчитать поворот и чистую деформацию не составляет труда [1, 2].

Сложнее оказывается обратная задача – восстановить вектор перемещения по компонентам тензора деформации. Она интересна не только сама по себе, но еще и потому, что с нею связан целый ряд вопросов теории деформаций сплошной среды (например, выражение поворотов через компоненты тензора деформации, условия сплошности, формулировка деформационных краевых условий в теории тонких оболочек и др.).

Известны два решения обратной задачи, записанные в квадратурах: в рамках классической теории упругости – формула Чезаро [1, 2], в нелинейной постановке – формула для плоского поля перемещений, полученная независимо В. В. Новожиловым и автором этой статьи.

В данной работе эта задача рассматривается без каких-либо ограничений на величину и характер деформации. Будет показано, почему в общем случае нельзя свести решение обратной задачи к квадратурам и в каких относительно тривиальных случаях такое решение существует.

В излагаемой ниже первой части работы выведены общие нелинейные соотношения теории деформаций сплошной среды, форма которых удобна при рассмотрении задачи об определении вектора перемещения по компонентам тензора деформации. Они отличаются от известных способом описания чистого поворота. Вместо осредненных поворотов окрестности материальной точки среды [1] и ортогонального тензора поворота главных осей деформации [2, 3] вводится вектор конечного поворота $\Omega(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$. Это – вектор, направленный вдоль оси вращения ортов главных направлений тензора деформации, построенных в центре рассматриваемой материальной частицы. Его длина принята равной $|\sin\omega|$ (ω – угол, на который поворачиваются упомянутые орты вокруг их оси вращения). В аналитической механике вектору поворота приписывают длину $2\operatorname{tg} {}^1/{}_2\omega$ [4].

Приведено разложение преобразования векторов $d\mathbf{R}$ в $d\mathbf{R}^*$ на чистую деформацию и чистый поворот ($d\mathbf{R}$ и $d\mathbf{R}^*$ – радиус-векторы до и после деформации точек материальной частицы относительно ее центра); получено выражение вектора Ω через вектор перемещения $\mathbf{U}$ (п. 2). Составлены дифференциальные соотношения между вектором Ω и компонентами тензора деформации Грина (п. 3).

В нелинейной механике сплошной среды уравнения сплошности деформаций обычно выводятся как условия сохранения евклидовости занимаемого средой пространства в процессе ее деформации [1]. Физически же эти уравнения истолковываются как условия, при которых непрерывной и достаточно гладкой деформации отвечает непрерывный вектор перемещения точек сплошной среды [1]. Поэтому уравнения неразрывности деформаций естественно связать с определением вектора перемещения по компонентам тензора деформации. В п. 4 они записаны в различных вариантах, из которых новым является (4.5). Каждый из этих вариантов получен как необходимое условие интегрируемости вполне определенной системы дифференциальных уравнений, решение которой позволило бы восстановить вектор перемещения по тензору деформации при помощи алгебраических операций и одной квадратуры. Так как других вариантов уравнений для определения $\mathbf{U}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ по тензору деформации, кроме перечисленных в п. 3, придумать, по-видимому, не удастся, то не удастся получить и иных форм уравнений неразрывности, кроме приведенных в п. 4.

Использованный здесь подход к описанию нелинейной деформации позволил приблизить по структуре основные соотношения теории деформаций к соответствующим соотношениям классической линейной теории упругости.

1. Пусть x_1, x_2, x_3 — координаты пространственной прямоугольной декартовой системы координат с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Положение точек сплошной среды определим материальными криволинейными координатами θ^1, θ^2, θ^3.

Если $\mathbf{R}$ — радиус-вектор некоторой точки среды до деформации, а $\mathbf{R}^*$ — радиус-вектор той же точки после деформации, то

(1.1) $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)\equiv x_\beta(\theta^1, \theta^2, \theta^3)\mathbf{e}_\beta$

(1.2) $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}^*(\theta^1, \theta^2, \theta^3)\equiv\mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)+\mathbf{U}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$

где $\mathbf{U}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ — вектор перемещения. (Здесь и далее, если специально не оговорено, все буквенные индексы пробегают значения 1, 2, 3; по повторяющимся греческим индексам производится суммирование независимо от их расположения).

По формулам (1.1) и (1.2) определяем векторы материального координатного базиса до деформации

(1.3) $\mathbf{R}_i=\partial\mathbf{R}/\partial\theta^i$

и после деформации

(1.4) $\mathbf{R}_i^*=\partial\mathbf{R}^*/\partial\theta^i\equiv\mathbf{R}_i+\mathbf{U}_{,i}\qquad \mathbf{U}_{,i}=\partial\mathbf{U}/\partial\theta^i$

которым соответствуют метрические тензоры со следующими компонентами:

(1.5) $g_{ij}=g_{ji}=\mathbf{R}_i\cdot\mathbf{R}_j$

(1.6) $g_{ij}^*=g_{ji}^*=\mathbf{R}_i^*\cdot\mathbf{R}_j^*\equiv g_{ij}+2\varepsilon_{ij}$

где тензор деформации Грина

(1.7) $\varepsilon_{ij}={}^1/_2(\mathbf{R}_i\cdot\mathbf{U}_{,j}+\mathbf{R}_j\cdot\mathbf{U}_{,i}+\mathbf{U}_{,j}\cdot\mathbf{U}_{,j})$

В базисе (1.3) наряду с ε_{ij} рассматривают еще два тензора: e_{ij} линеаризированный тензор деформации) и ω_{ij}. Их компоненты подсчитываются по формулам

(1.8) $e_{ij}={}^1/_2(\mathbf{R}_i\cdot\mathbf{U}_{,j}+\mathbf{R}_j\cdot\mathbf{U}_{,i})$

(1.9) $\omega_{ij}={}^1/_2(\mathbf{R}_i\cdot\mathbf{U}_{,j}-\mathbf{R}_j\cdot\mathbf{U}_{,i})$

Тензор ω_{ij} кососимметричный. Вместо него можно рассматривать вектор

(1.10) $\boldsymbol{\omega}=\omega^\alpha\mathbf{R}_\alpha\equiv{}^1/_2\varepsilon^{\alpha\gamma\beta}\omega_{\beta\gamma}\mathbf{R}_\alpha$

где $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ — контравариантные компоненты дискриминантного тензора в метрике g_{ij}.

Используя формулы (1.8)—(1.10), приходим к следующему выражению для вектора $\mathbf{U}_{,i}$:

(1.11.1) $\mathbf{U}_{,i}=e_{i\alpha}\mathbf{R}^\alpha+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_i$

Отсюда

(1.11.2) $\partial\omega/\partial\theta^i = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\alpha e_{\beta i}\mathbf{R}_\gamma$

Поясним некоторые обозначения, которые встретятся в дальнейшем.

(1.12)
$$g=|g_{ij}|,\quad \varepsilon_{ijk}$$
$$G_{h,ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial\theta^i}+\frac{\partial g_{ih}}{\partial\theta^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\theta^h}\right)$$
$$G_{ij}^{h}=g^{h\alpha}G_{\alpha,\,ij},\qquad \nabla_j(\ldots)$$

Здесь соответственно: дискриминант метрического тензора; ковариантные компоненты дискриминантного тензора; символы Кристоффеля первого и второго рода; обозначение ковариантной производной в метрике g_{ij}.

После деформации те же величины определяются формулами

(1.13)
$$g^*=|\overset{*}{g}_{ij}|,\quad \overset{*}{\varepsilon}_{ijk}$$
$$\overset{*}{G}_{h,ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{*}{g}_{jh}}{\partial\theta^i}+\frac{\partial \overset{*}{g}_{ih}}{\partial\theta^j}-\frac{\partial \overset{*}{g}_{ij}}{\partial\theta^h}\right)=$$
$$=G_{h,ij}+2\overset{\alpha}{G}_{ij}\varepsilon_{\alpha h}+\nabla_i\varepsilon_{jh}+\nabla_j\varepsilon_{ih}-\nabla_h\varepsilon_{ij}$$
$$\overset{*h}{G_{ij}}=g^{*h\alpha}G_{\alpha,ij},\qquad \nabla_j^*(\ldots)$$

В дальнейшем будут использованы следующие соотношения:

(1.14) $$\overset{*}{\varepsilon}_{ijk}=\sqrt{g^*/g}\,\varepsilon_{ijk},\qquad \varepsilon^{*ijk}=\sqrt{g/g^*}\,\varepsilon^{ijk}$$

(1.15) $$g^{*ij}=g[g^{ij}+2\varepsilon^{\alpha\beta i}\varepsilon^{\gamma\delta j}(g_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}+\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta})]/g^*$$

2. Пусть $\varepsilon_{(1)}$, $\varepsilon_{(2)}$, $\varepsilon_{(3)}$ — главные значения тензора деформации ε_{ij} в точке с координатами $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, а соответствующие им главные оси направлены вдоль векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$, так что

(2.1) $$\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}=\overset{\alpha}{\mu}_{(i)}\mathbf{R}_\alpha$$

где $\overset{\kappa}{\mu}_{(i)}$ удовлетворяют системе уравнений

(2.2) $$(\varepsilon_\beta{}^k-\varepsilon_{(i)}\delta_\beta{}^k)\overset{\beta}{\mu}_{(i)}=0$$

(2.3) $$\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{(j)}=\overset{\alpha}{\mu}_{(i)}\overset{\beta}{\mu}_{(j)}g_{\alpha\beta}=\begin{cases}A_i & \text{при } i=j\\ 0 & \text{при } i\neq j\end{cases}$$

В результате деформации векторы $\mathbf{R}_i$ преобразуются в векторы $\mathbf{R}_i^*$, а $\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}$ — в тройку взаимно ортогональных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}^*$, для которых справедливы следующие соотношения:

(2.4) $$\overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(i)}=\overset{\alpha}{\mu}_{(i)}\mathbf{R}_\alpha^*$$

(2.5) $$\overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(i)}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(j)}=\begin{cases}A_i(1+2\varepsilon_{(i)})\equiv A_i^* & \text{при } i=j\\ 0 & \text{при } i\neq j\end{cases}$$

Введем единичные орты $\mathbf{t}_{(i)}$ и $\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}$ так, чтобы

$$(2.6)\qquad \varepsilon_{(i)}=\sqrt{A_i}\,\mathbf{t}_{(i)},\qquad \overset{*}{\varepsilon}_{(i)}=\sqrt{A_i^*}\,\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}$$

Тройка векторов $\mathbf{t}_{(i)}$ переводится в тройку векторов $\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}$ вращением, т. е. поворотом каждого из векторов $\mathbf{t}_{(i)}$ на угол ω вокруг направленной оси вращения [4, 5].

Определим вращение при помощи вектора конечного поворота $\mathbf{\Omega}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$.

Тогда [4]

$$(2.7)\qquad \overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}=\mathbf{t}_{(i)}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{t}_{(i)}+\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{t}_{(i)})\frac{1}{\cos^2 {}^1/_2\omega},\qquad \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}=\sin^2\omega$$

Из формул (2.1) – (2.6) следует

$$(2.8)\qquad \mathbf{R}_i^*=\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\beta)}\overset{*}{g}_{\alpha i}}{\sqrt{A_\beta^*}}\overset{*}{\mathbf{t}}_{(\beta)}$$

$$(2.9)\qquad \mathbf{R}_i=\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\beta)}g_{\alpha i}}{\sqrt{A_\beta}}\mathbf{t}_{(\beta)}$$

$$(2.10)\qquad g_{ij}^*=\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\gamma)}\overset{\beta}{\mu}_{(\gamma)}\overset{*}{g}_{\alpha i}\overset{*}{g}_{\beta j}}{A_\gamma^*}$$

$$(2.11)\qquad g_{ij}=\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\gamma)}\overset{\beta}{\mu}_{(\gamma)}g_{\alpha i}g_{\beta j}}{A_\gamma}$$

$$(2.12)\qquad \varepsilon_{ij}=\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{(\gamma)}\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\gamma)}\overset{\beta}{\mu}_{(\gamma)}g_{\alpha i}g_{\beta j}}{A_\gamma}$$

Учитывая соотношения (2.1) – (2.12), приходим к выражению векторов $\mathbf{R}_i^*$ через вектор конечного поворота $\mathbf{\Omega}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ и компоненты тензора деформации (1.7)

$$(2.13)\qquad \mathbf{R}_i^*=\mathbf{r}_i^\vee+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_i^\vee+\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_i^\vee)\frac{1}{\cos^2 {}^1/_2\omega}$$

Здесь

$$(2.14)\qquad \mathbf{r}_i^\vee=\mathbf{R}_i+(\varepsilon_{i\gamma}+\Lambda_{i\gamma})\mathbf{R}^\gamma$$

$$(2.15)\qquad \Lambda_{ij}=\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{(\gamma)}^2\frac{\sqrt{1+2\varepsilon_{(\gamma)}}-2}{1+(1-\varepsilon_{(\gamma)})\sqrt{1+2\varepsilon_{(\gamma)}}}\,\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\gamma)}\overset{\beta}{\mu}_{(\gamma)}g_{\alpha i}g_{\beta j}}{A_\gamma}$$

Формулой (2.13) определяется преобразование векторов $\mathbf{R}_i$ в $\mathbf{R}_i^*$, которое сводится к чистой деформации (преобразование $\mathbf{R}_i$ в $\mathbf{r}_i^\vee$ согласно (2.14)) и чистому повороту (преобразование $\mathbf{r}_i^\vee$ в $\mathbf{R}_i^*$ по (2.13)).

При помощи формулы (2.13) получаем следующее выражение для вектора конечного поворота:

$$(2.16)\qquad \mathbf{\Omega}={}^1/_2\varepsilon^{*\alpha\beta\gamma}(\mathbf{U}_{,\alpha}\cdot\mathbf{r}_\beta^\vee)\mathbf{r}_\gamma^\vee$$

3. Рассмотрим задачу об определении вектора перемещения по компонентам тензора деформации.

Согласно (1.2)

$$(3.1)\qquad \mathbf{U}=\mathbf{R}^*-\mathbf{R}$$

Это значит, что вместо вектора $\mathbf{U}$ можно определить вектор $\mathbf{R}^*$ или векторы $\mathbf{R}_i^*$.

Так как $\mathbf{R}_i^*\cdot\mathbf{R}_j^*=g_{ij}^*$ и $\partial\mathbf{R}_i^*/\partial\theta^j=\partial\mathbf{R}_j^*/\partial\theta^i$, то векторы $\mathbf{R}_i^*$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений [2]:

$$(3.2)\qquad \partial\mathbf{R}_i^*/\partial\theta^j=G_{ij}^{*\alpha}\mathbf{R}_\alpha^*$$

В уравнениях (3.2) коэффициенты G_{ij}^{*k} зависят от g_{lm} и ε_{lm} (см. (1.6), (1.13)).

Если известны векторы $\mathbf{R}_i^*$, то определение $\mathbf{R}^*$ (а следовательно, и $\mathbf{U}$) сводится к квадратуре.

Подставим в уравнение (3.2) вместо $\mathbf{R}_i^*$ его выражение (1.4). В результате приходим к системе дифференциальных уравнений с неизвестной функцией $\mathbf{U}$

$$(3.3)\qquad \nabla_j\mathbf{U}_{,i}=(G_{ij}^{*\alpha}-G_{ij}^{\alpha})(\mathbf{R}_\alpha+\mathbf{U}_{,\alpha})$$

Используя формулы (1.13), находим

$$(3.4)\qquad G_{ij}^{\vee k}\equiv G_{ij}^{*k}-G_{ij}^{k}=g^{*k\lambda}(\nabla_i\varepsilon_{\lambda j}+\nabla_j\varepsilon_{\lambda i}-\nabla_\lambda\varepsilon_{ij})+$$
$$+g^{*k\lambda}(G_{\lambda,ij}+2G_{ij}^{\beta}\varepsilon_{\beta\lambda})-G_{ij}^{k}\equiv g^{*k\lambda}(\nabla_i\varepsilon_{\lambda j}+\nabla_j\varepsilon_{\lambda i}-\nabla_\lambda\varepsilon_{ij})$$

откуда следует, что величины $G_{ij}^{\vee k}$ образуют тензор, тип которого определяется расположением индексов; по ковариантным индексам этот тензор симметричен.

Итак

$$(3.5)\qquad \nabla_j\mathbf{U}_{,i}=G_{ij}^{\vee\alpha}(\mathbf{R}_\alpha+\mathbf{U}_{,\alpha})$$

Остановимся еще на одном варианте системы дифференциальных уравнений, решение которой позволяет определить вектор перемещения $\mathbf{U}$, если известен тензор деформации (1.7).

Обращаясь к формуле (2.13), заключаем, что при заданной деформации векторы $\mathbf{R}_i^*$ становятся известными, как только известен вектор $\mathbf{\Omega}$. Составим дифференциальные уравнения для его определения.

Запишем правила дифференцирования ортов $\mathbf{t}_{(i)}^*$ и $\mathbf{t}_{(i)}$ в виде

$$(3.6)\qquad \frac{\partial\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}}{\partial\theta^j}=\boldsymbol{\omega}_j^*\times\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)},\qquad \frac{\partial\mathbf{t}_{(i)}}{\partial\theta^j}=\boldsymbol{\omega}_j\times\mathbf{t}_{(i)}$$

Из (2.7) находим

$$(3.7)\qquad 2\mathbf{\Omega}\cdot(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})=\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}\cdot\mathbf{t}_{(k)}-\overset{*}{\mathbf{t}}_{(k)}\cdot\mathbf{t}_{(i)}$$

Продифференцируем выражение (3.7) по θ^j, используя при этом формулы (3.6). Тогда

$$(3.8)\qquad \frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial\theta^j}\cdot(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_j^*\cdot(\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)}-\overset{*}{\mathbf{t}}_{(k)}\times\mathbf{t}_{(i)})+$$
$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_j\cdot(\mathbf{t}_{(k)}\times\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}-\mathbf{t}_{(i)}\times\overset{*}{\mathbf{t}}_{(k)})-(\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}_j)\cdot(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})$$

При помощи (2.7) определяем выражение

$$\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)}-\overset{*}{\mathbf{t}}_{(k)}\times\mathbf{t}_{(i)}=2\cos\omega\,(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})+ \tag{3.9}$$

$$+\Omega\times(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})+\frac{1}{2}\Omega\times[\Omega\times(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})]\frac{1}{\cos^2{}^1/_2\omega}$$

Введем вектор $\omega_j{}^{\vee}$ так, чтобы

$$\omega_j{}^*=\omega_j{}^{\vee}+\Omega\times\omega_j{}^{\vee}+\frac{1}{2}\Omega\times(\Omega\times\omega_j{}^{\vee})\frac{1}{\cos^2{}^1/_2\omega} \tag{3.10}$$

Тогда

$$\omega_j{}^*\cdot(\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)}-\overset{*}{\mathbf{t}}_{(k)}\times\mathbf{t}_{(i)})=\Big[2\cos\omega\,\omega_j{}^{\vee}+\Omega\times\omega_j{}^{\vee}-$$

$$-\frac{1}{2}\Omega\times(\Omega\times\omega_j{}^{\vee})\frac{1}{\cos^2{}^1/_2\omega}\Big]\cdot(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})$$

$$\omega_j\cdot(\mathbf{t}_{(k)}\times\overset{*}{\mathbf{t}}_{(i)}-\mathbf{t}_{(i)}\times\overset{*}{\mathbf{t}}_{(k)})-2(\Omega\times\omega_j)\cdot(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})=$$

$$=-\Big[2\cos\omega\,\omega_j+\Omega\times\omega_j-\frac{1}{2}\Omega\times(\Omega\times\omega_j)\frac{1}{\cos^2{}^1/_2\omega}\Big]\cdot(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})$$

и уравнение (3.8) можно записать в виде

$$\Big[\frac{\partial\Omega}{\partial\theta^j}-\varkappa_j\cos\omega-\frac{1}{2}\Omega\times\varkappa_j+\frac{1}{4}\Omega\times(\Omega\times\varkappa_j)\frac{1}{\cos^2{}^1/_2\omega}\Big]\cdot(\mathbf{t}_{(i)}\times\mathbf{t}_{(k)})=0 \tag{3.11}$$

где

$$\varkappa_j=\omega_j{}^{\vee}-\omega_j \tag{3.12}$$

Из (3.11) вытекает следующая система дифференциальных уравнений для определения Ω:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\theta^j}=\varkappa_j\cos\omega+\frac{1}{2}\Omega\times\varkappa_j-\frac{1}{4}\Omega\times(\Omega\times\varkappa_j)\frac{1}{\cos^2{}^1/_2\omega} \tag{3.13}$$

Вектор $\varkappa_j$ будем называть вектором изменения кривизны в направлении координатной θ^j-линии. Чтобы пояснить использование такого термина, умножим скалярно уравнение (3.13) на Ω и воспользуемся тем, что $\Omega\cdot\Omega=\sin^2\omega$. Тогда

$$\sin\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta^j}=\varkappa_j\cdot\Omega \tag{3.14}$$

Пусть $\mathbf{e}_\Omega$ — единичный вектор, направленный вдоль Ω. Очевидно

$$\Omega=\mathbf{e}_\Omega\sin\omega,\qquad 0\leqslant\omega\leqslant\pi$$

и (3.14) можно представить в виде

$$\partial\omega\,/\,\partial\theta^j=\varkappa_j\cdot\mathbf{e}_\Omega$$

Модуль скалярного произведения $\varkappa_j\cdot\mathbf{e}_\Omega$ не превосходит длины вектора $\varkappa_j$. Поэтому порядок величины $\partial\omega\,/\,\partial\theta^j$ и длины вектора $\varkappa_j$ одинаков.

Подсчитаем компоненты вектора $\varkappa_j$. Используя формулы (2.8) и (2.13), находим

$$\mathbf{r}_i^{\vee}=\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\beta)}g_{\alpha i}}{\sqrt{A_\beta^*}}\mathbf{t}_{(\beta)}\tag{3.15}$$

Продифференцируем (2.8) и (3.15) по θ^j с учетом (2.13), (3.6), (3.10). В результате получаем:

$$\frac{\partial\mathbf{r}_i^{\vee}}{\partial\theta^j}=\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\theta^j}\left(\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\beta)}\overset{*}{g}_{\alpha i}}{\sqrt{A_\beta^*}}\right)\mathbf{t}_{(\beta)}+\boldsymbol{\omega}_j\times\mathbf{r}_i^{\vee}\tag{3.16}$$

$$\frac{\partial\mathbf{R}_i^*}{\partial\theta^j}=\sum_{\beta=1}\frac{\partial}{\partial\theta^j}\left(\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\beta)}\overset{*}{g}_{\alpha i}}{\sqrt{A_\beta^*}}\right)\overset{*}{\mathbf{t}}_{(\beta)}+\boldsymbol{\omega}_j^*\times\mathbf{R}_i^*=\tag{3.17}$$

$$=\left[\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\theta^j}\left(\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\beta)}\overset{*}{g}_{\alpha i}}{\sqrt{A^*}}\right)\mathbf{t}_{(\beta)}+\boldsymbol{\omega}_j^{\vee}\times\mathbf{r}_i^{\vee}\right]+\boldsymbol{\Omega}\times\left[\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\theta^j}\left(\frac{\mu_{(\beta)}\overset{*}{g}_{\alpha i}}{\sqrt{A^*}}\right)\mathbf{t}_{(\beta)}+\boldsymbol{\omega}_j^{\vee}\times\mathbf{r}_i^{\vee}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\times\left\{\boldsymbol{\Omega}\times\left[\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\theta^j}\left(\frac{\mu_{(\beta)}\overset{*}{g}_{\alpha i}}{\sqrt{A^*}}\right)\mathbf{t}_{(\beta)}+\boldsymbol{\omega}_j^{\vee}\times\mathbf{r}_i^{\vee}\right]\right\}\frac{1}{\cos^2{}^1\!/_2\omega}=$$

$$=\overset{*\beta}{G_{ij}}\mathbf{R}_\beta^*=\overset{*\beta}{G_{ij}}\left[\mathbf{r}_\beta^{\vee}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_\beta^{\vee}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_\beta^{\vee})\frac{1}{\cos^2{}^1\!/_2\omega}\right]$$

Из (3.17) следует, что

$$\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\theta^j}\left(\frac{\overset{\alpha}{\mu}_{(\beta)}\overset{*}{g}_{\alpha i}}{\sqrt{A_\beta^*}}\right)\mathbf{t}_{(\beta)}=\overset{*\beta}{G_{ij}}\mathbf{r}_\beta^{\vee}-\boldsymbol{\omega}_j^{\vee}\times\mathbf{r}_i^{\vee}\tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в (3.16), получаем

$$\partial\mathbf{r}_i^{\vee}/\partial\theta^j=G_{ij}{}^{*\beta}\mathbf{r}_\beta^{\vee}-\varkappa_j\times\mathbf{r}_i^{\vee}\tag{3.19}$$

или

$$\nabla_j\mathbf{r}_i^{\vee}=G_{ij}{}^{\vee\beta}\mathbf{r}_\beta^{\vee}-\varkappa_j\times\mathbf{r}_i^{\vee}\tag{3.20}$$

Из (3.20) и (2.14) вытекает выражение для вектора $\varkappa_j$

$$\begin{aligned}\varkappa_j&={}^1\!/_2\varepsilon^{*\alpha\beta\gamma}[G_{\alpha j}{}^{\vee\delta}g_{\delta\beta}^*-\mathbf{r}_\beta^{\vee}\cdot\nabla_j\mathbf{r}_\alpha^{\vee}]\mathbf{r}_\gamma^{\vee}=\\&=\varepsilon^{*\alpha\beta\gamma}[\nabla_\alpha\varepsilon_{\beta j}-{}^1\!/_2g^{\delta\lambda}(\varepsilon_{\delta\beta}+\Lambda_{\delta\beta})\nabla_j(\varepsilon_{\alpha\lambda}+\Lambda_{\alpha\lambda})]\mathbf{r}_\gamma^{\vee}\end{aligned}\tag{3.21}$$

Далее, в силу эвклидовости исходной метрики $\nabla_j\nabla_k\mathbf{r}_i^{\vee}\equiv\nabla_k\nabla_j\mathbf{r}_i^{\vee}$. Учитывая (3.20), это тождество записываем в виде

$$[\nabla_kG_{ij}{}^{\vee\beta}+G_{ij}{}^{\vee\alpha}G_{\alpha k}{}^{\vee\beta}-\nabla_jG_{ik}{}^{\vee\beta}-G_{ik}{}^{\vee\alpha}G_{\alpha j}{}^{\vee\beta}]\mathbf{r}_\beta^{\vee}\equiv[\nabla_k\varkappa_j-\nabla_j\varkappa_k+\varkappa_k\times\varkappa_j]\times\mathbf{r}_i^{\vee}$$

или

$$\begin{aligned}\nabla_k\varkappa_j-\nabla_j\varkappa_k+\varkappa_k\times\varkappa_j&\equiv{}^1\!/_2\varepsilon^{*\alpha\beta\gamma}[\nabla_j(g_{\delta\beta}^*G_{\alpha k}{}^{\vee\delta})-G_{\alpha k}{}^{\vee\delta}G_{\beta j}{}^{\vee\lambda}g_{\lambda\delta}^*-\\&-\nabla_k(g_{\delta\beta}^*G_{\alpha j}{}^{\vee\delta})+G_{\alpha j}{}^{\vee\delta}G_{\beta k}{}^{\vee\lambda}g_{\delta\lambda}^*]\mathbf{r}_\gamma^{\vee}\equiv\varepsilon^{*\alpha\beta\gamma}[\nabla_\alpha\nabla_j\varepsilon_{\beta k}-\nabla_\alpha\nabla_k\varepsilon_{\beta j}-\\&-g^{*\lambda\delta}(\nabla_\alpha\varepsilon_{\lambda k}+\nabla_k\varepsilon_{\lambda\alpha}-\nabla_\lambda\varepsilon_{\alpha k})(\nabla_\beta\varepsilon_{\delta j}+\nabla_j\varepsilon_{\delta\beta}-\nabla_\delta\varepsilon_{\beta j})]\mathbf{r}_\gamma^{\vee}\end{aligned}\tag{3.22}$$

или

$$\begin{aligned}\varepsilon^{*\nu\theta i}[\nabla_\nu\varkappa_\theta+{}^1\!/_2\varkappa_\nu\times\varkappa_\theta]&=\varepsilon^{*\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{*\nu\theta i}[\nabla_\alpha\nabla_\theta\varepsilon_{\beta\nu}-\\&-{}^1\!/_2g^{*\lambda\delta}(\nabla_\alpha\varepsilon_{\lambda\nu}+\nabla_\nu\varepsilon_{\lambda\alpha}-\nabla_\lambda\varepsilon_{\alpha\nu})(\nabla_\beta\varepsilon_{\delta\theta}+\nabla_\theta\varepsilon_{\delta\beta}-\nabla_\delta\varepsilon_{\beta\theta})]\mathbf{r}_\gamma^{\vee}\end{aligned}\tag{3.23}$$

Системы (3.2), (3.5) и (3.13) эквивалентны в том смысле, что, зная решение одной из них, можно построить решение другой при помощи алгебраических операций. Однако, как выяснится в дальнейшем, в приложениях более удобна система (3.13).

4. Каждая из систем уравнений (3.2), (3.5), (3.13) переопределена. Для их интегрируемости необходимо, чтобы компоненты тензора деформации ε_{ij} удовлетворяли некоторым условиям — условиям неразрывности (или сплошности) деформаций. Для систем (3.2) и (3.5) вывод таких условий очевиден. Они сводятся к следующим:

для (3.2)

$$\frac{\partial \overset{*}{G}{}^{l}_{ij}}{\partial\theta^k}+\overset{*}{G}{}^{\beta}_{ij}\overset{*}{G}{}^{l}_{\beta k}-\frac{\partial \overset{*}{G}{}^{l}_{ik}}{\partial\theta^j}-\overset{*}{G}{}^{\beta}_{ik}\overset{*}{G}{}^{l}_{\beta j}=0 \tag{4.1.1}$$

или

$$\frac{\partial \overset{*}{G}_{l,ij}}{\partial\theta^k}-\overset{*}{G}{}^{\alpha}_{ij}\overset{*}{G}_{\alpha,lk}-\frac{\partial \overset{*}{G}_{l,ik}}{\partial\theta^j}+\overset{*}{G}{}^{\alpha}_{ik}\overset{*}{G}_{\alpha,lj}=0 \tag{4.1.2}$$

для (3.5)

$$\nabla_k \overset{\vee}{G}{}^{l}_{ij}+\overset{\vee}{G}{}^{\beta}_{ij}\overset{\vee}{G}{}^{l}_{\beta k}-\nabla_j \overset{\vee}{G}{}^{l}_{ik}-\overset{\vee}{G}{}^{\beta}_{ik}\overset{\vee}{G}{}^{l}_{\beta j}=0 \tag{4.2.1}$$

или

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{\alpha\beta j}\varepsilon^{\nu\theta i}[\nabla_\alpha\nabla_\theta\varepsilon_{\nu\beta}-{}^1\!/_2 g^{*\lambda\delta}(\nabla_\alpha\varepsilon_{\lambda\nu}+\nabla_\nu\varepsilon_{\lambda\alpha}-\nabla_\lambda\varepsilon_{\alpha\nu})\times\\&\times(\nabla_\theta\varepsilon_{\beta\delta}+\nabla_\beta\varepsilon_{\theta\delta}-\nabla_\delta\varepsilon_{\theta\beta})]=0.\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Запись уравнений неразрывности в виде (4.2.2) была предложена в работе [6]; в том же виде представлены уравнения неразрывности деформаций в [7].

Выведем условия интегрируемости системы (3.13). Для этого удобно воспользоваться соотношением (3.14)

$$\begin{aligned}&\sin\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^j\,\partial\theta^k}+\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta^k}\frac{\partial\omega}{\partial\theta^j}=\frac{\partial\boldsymbol{\varkappa}_j}{\partial\theta^k}\cdot\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\varkappa}_j\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial\theta^k}\equiv\\&\equiv\boldsymbol{\Omega}\cdot\left[\frac{\partial\boldsymbol{\varkappa}_j}{\partial\theta^k}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}_k\times\boldsymbol{\varkappa}_j\right]+\boldsymbol{\varkappa}_j\cdot\boldsymbol{\varkappa}_k\cos\omega+\\&+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\varkappa}_j)\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\varkappa}_k)\frac{1}{\cos^2{}^1\!/_2\omega}\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}&\sin\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^k\,\partial\theta^j}+\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta^k}\frac{\partial\omega}{\partial\theta^j}=\frac{\partial\boldsymbol{\varkappa}_k}{\partial\theta^j}\cdot\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\varkappa}_k\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial\theta^j}\equiv\\&\equiv\boldsymbol{\Omega}\cdot\left[\frac{\partial\boldsymbol{\varkappa}_k}{\partial\theta^j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}_j\times\boldsymbol{\varkappa}_k\right]+\boldsymbol{\varkappa}_k\cdot\boldsymbol{\varkappa}_j\cos\omega+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\varkappa}_k)\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\varkappa}_j)\frac{1}{\cos^2{}^1\!/_2\omega}\end{aligned} \tag{4.4}$$

Составляя разность выражений (4.3) и (4.4), приходим к тождеству при любых $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\left[\frac{\partial\boldsymbol{\varkappa}_j}{\partial\theta^k}-\frac{\partial\boldsymbol{\varkappa}_k}{\partial\theta^j}+\boldsymbol{\varkappa}_k\times\boldsymbol{\varkappa}_j\right]\equiv0$$

Поэтому

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varkappa}_j}{\partial\theta^k}-\frac{\partial\boldsymbol{\varkappa}_k}{\partial\theta^j}+\boldsymbol{\varkappa}_k\times\boldsymbol{\varkappa}_j=0 \tag{4.5}$$

или

(4.5.1) $\nabla_k \varkappa_j - \nabla_j \varkappa_k + \varkappa_k \times \varkappa_j = 0$

или

(4.5.2) $\varepsilon^{*\nu\theta i}(\nabla_\nu \varkappa_\theta + {}^1/_2 \varkappa_\nu \times \varkappa_\theta] = 0$

Это — условия интегрируемости системы (3.13). В силу тождеств (3.23) они эквивалентны выполнению скалярных соотношений (4.22).

Итак, условия интегрируемости систем (3.2), (3.5), (3.13) представляют собой соотношения между компонентами тензора деформации (1.7) и их производными. Число таких независимых соотношений равно шести. Равенства (4.1.1), (4.1.2), (4.2.1), (4.2.2), (4.5), (4.5.1), (4.5.2) являются различными вариантами их записи. Действительно, каждое из перечисленных равенств может быть получено из любого другого из оставшихся при помощи алгебраических операций.

5. Использование вектора конечного поворота Ω для описания поворота главных осей деформации приводит к разбиению произвольной деформации на чистую деформацию и чистый поворот в виде (2.13). При этом вектор Ω связан с вектором перемещения по формуле (2.16), а с компонентами тензора деформации ε_{ij} — дифференциальными соотношениями (3.13), (3.21), которые можно рассматривать как дифференциальные уравнения для определения Ω по заданному тензору деформации.

Условия интегрируемости системы (3.13) сводятся к выполнению уравнений неразрывности в виде (4.5) или, в скалярной форме, (4.2.2).

Перечисленные нелинейные соотношения по структуре аналогичны соответствующим соотношениям классической теории упругости. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить формулы (2.13), (2.14) и (1.11.1), (2.16) и (1.10), (1.9); (3.13), (3.21) и (1.11.2); (4.5) и условие интегрируемости системы (1.11.2) для определения вектора ω малых поворотов.

Автор благодарит В. В. Новожилова и К. Ф. Черных за полезные советы и указания.

Поступила 12 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
3. *Парс Л.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
5. *Галимов К. З.* Инвариантная форма условий неразрывности конечных деформаций. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 4.
6. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. М., «Наука», 1971.
7. Handbuch der Physik. Bd. 3. Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie Berlin, Springer, 1960.