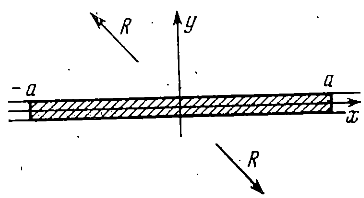
УДК 539.374

ЗАДАЧА О СКЛЕЙКЕ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ

Н. Н. ВЕДЕНЕЕВА, В. Д. КЛЮШНИКОВ, Р. И. МАЗИНГ

(*Москва*)

Изучается характер напряженного состояния в тонком слое клея, соединяющем две полуплоскости. Полуплоскости нагружены на бесконечности усилиями, создающими в клеевом слое растяжение и сдвиг. Показано, что при некоторых предположениях о работе клея задача сводится к задаче об одной полуплоскости, нагруженной на некотором участке границы нормальными и касательными усилиями. Закон распределения усилий находится из решения интегро-дифференциального уравнения. Показано, что напряжения в клеевом слое не имеют особенностей, однако распределение как нормального, так и касательного усилий может иногда существенно отличаться от однородного.



Фиг. 1

1. Рассмотрим задачу о склейке двух полуплоскостей слоем клея (фиг. 1). Предположим, что упругие свойства тел одинаковы и толщина клеевого слоя много меньше его протяженности. Полуплоскости растягиваются усилиями, равнодействующие которых R проходят через центр клеевого слоя и создают в нем растяжение и сдвиг. Примем, что усилия в клее пропорциональны разности перемещений точек границ полуплоскости

$$N(x)=k_1[v^+(x)-v^-(x)], \qquad T(x)=k_2[u^+(x)-u^-(x)] \tag{1.1}$$

здесь знак плюс относится к верхней, знак минус к нижней полуплоскости.

Соотношения (1.1) легко упростить и усилия в клее можно связать с перемещениями границы только одной полуплоскости, если заметить, что в силу кососимметричной картины деформирования, возникающей вследствие одинаковости упругих свойств полуплоскостей, перемещения границ верхней и нижней полуплоскости связаны условиями

$$u^-(x)=-u^+(-x), \qquad v^-(x)=-v^+(-x) \tag{1.2}$$

Равенства (1.1) теперь примут вид

$$N(x)=k_1[v(x)+v(-x)], \qquad T(x)=k_2[u(x)+u(-x)] \tag{1.3}$$

Здесь N, T, u, v отнесены к нижней полуплоскости.

Как известно [1], решение первой краевой задачи для полуплоскости

$$\Phi(t)+\overline{\Phi(t)}+t\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)}=N+iT$$

дается формулами

$$\Phi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{N(t)-iT(t)}{t-z}\,dt \tag{1.4}$$

$$\Psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{N(t)+iT(t)}{t-z}\,dt-\Phi(z)-z\Phi'(z)$$

Перейдем в выражениях (1.4) к граничным значениям и по известным формулам [1] найдем производные от перемещений на границе полуплоскости

$$2\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}\right]=\frac{1}{2}(\varkappa-1)[N(x)+iT(x)]+\frac{\varkappa+1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{N(t)+iT(t)}{t-x}\,dt \tag{1.5}$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Продифференцируем (1.3) по x

$$N'(x)=k_1[v'(x)-v'(-x)],\qquad T'(x)=k_2[u'(x)-u'(-x)] \tag{1.6}$$

Выделим в соотношениях (1.5) действительную и мнимую части и подставим в (1.6). Учитывая, что в силу симметрии $N(x)$ и $T(x)$

$$\int_{-a}^{a}\frac{N(t)}{t+x}dt=-\int_{-a}^{a}\frac{N(t)}{t-x}dt$$

получим интегро-дифференциальные уравнения для нахождения усилий в клеевом слое

$$N'(x)+\frac{k_1(\varkappa+1)}{4\pi\mu}\int_{-a}^{a}\frac{N(t)\,dt}{t-x}=0,\qquad T'(x)+\frac{k_2(\varkappa+1)}{4\pi\mu}\int_{-a}^{a}\frac{T(t)\,dt}{t-x}=0 \tag{1.7}$$

Каждое из интегро-дифференциальных уравнений (1.7) решается совместно с дополнительным условием

$$\int_{-a}^{a}N(x)\,dx=P,\qquad \int_{-a}^{a}T(x)\,dx=Q \tag{1.8}$$

где P и Q — составляющие главного вектора внешней нагрузки R.

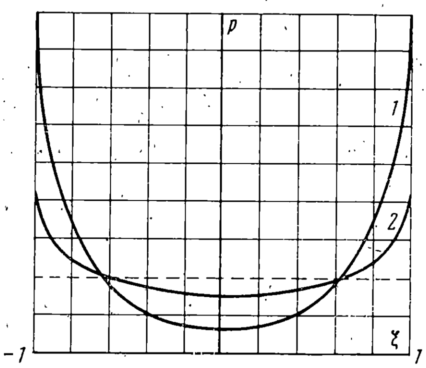
2. Как следует из соотношений (1.7) и (1.8), задачи об определении нормальных $N(x)$ и касательных $T(x)$ усилий в клеевом слое разделились на две независимые. Уравнения для определения усилий $N(x)$ и $T(x)$ отличаются только значением коэффициента $k(\varkappa+1)/4\pi\mu$, что позволяет в дальнейшем ограничиться изучением свойств решения одного из них. Переходя к безразмерным переменным

$$p=\frac{N}{aP},\qquad \xi=\frac{x}{a},\qquad \lambda=\frac{k(\varkappa+1)}{4\pi\mu}a$$

запишем интегро-дифференциальное уравнение (1.7) и дополнительное условие (1.8) в следующем виде:

$$p'(\xi)+\lambda\int_{-1}^{1}\frac{p(\tau)}{\tau-\xi}d\tau=0 \tag{2.1}$$

$$\int_{-1}^{1}p(\xi)\,d\xi=1 \tag{2.2}$$



Фиг. 2

Покажем, что решение уравнения (2.1) при выполнении дополнительного условия (2.2) не имеет особенностей. Действительно, из (2.2) следует, что функция $p(\xi)$ может иметь в точке только интегрируемую особенность

$$\lim_{\xi\to\xi_0}(\xi_0-\xi)p(\xi)=0 \tag{2.3}$$

Пусть $\xi=c$ — любая неособая точка функции $p(\xi)$. Проинтегрируем уравнения (2.1)

$$p(\xi)+\lambda\int_{-1}^{1}p(\tau)\ln|\tau-\xi|\,d\tau=p(c)+\lambda\int_{-1}^{1}p(\tau)\ln|\tau-c|\,d\tau \tag{2.4}$$

В силу свойства (2.3) функции $p(\xi)$ правая часть (2.4) ограничена.

Класс решений уравнения (2.1) будет не уже, чем у уравнения (2.4). Каждое решение уравнения (2.4) является решением исходного уравнения (2.1). В силу теоремы единственности краевой задачи теории упругости решение управления (2.4) будет служить решением исходной задачи (2.1).

Уравнение (2.4) для $\lambda>0$ было впервые получено И. Я. Штаерманом [2] в задаче о жестком штампе с учетом микронеровностей границы полуплоскости. Среди предложенных им методов решения этого уравнения был назван метод конечных разностей, применимость которого оправдана при условии ограниченности решения или выделения особенностей.

Ограниченность решения доказывается довольно просто. Уравнение (2.4) есть уравнение Фредгольма второго рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Поскольку

$$|\ln|x-\xi||<\frac{1}{|x-\xi|^\alpha},\qquad 0<\alpha<\frac{1}{2},\qquad x,\xi\in[-1;1]$$

то для такого ядра можно указать следующую оценку:

$$\int_{-1}^{1}|\ln|x-\xi||^2 d\xi<\int_{-1}^{1}|x-\xi|^{-2\alpha}d\xi=\frac{1}{1-2\alpha}[(1+x)^{1-2\alpha}+(1-x)^{1-2\alpha}]\leqslant\frac{2^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}. \tag{2.5}$$

Известно [3], что при выполнении неравенства (2.5) и ограниченности правой части решения уравнения Фредгольма второго рода будут ограниченными всюду.

Таким образом, все усилия в клеевом слое будут ограниченными. Результаты решения приближенным методом, основанном на представлении $p(x)$ ступенчатой функцией и удовлетворении уравнения (2.4) в отдельных точках отрезка [—1; 1], представлены на фиг. 2. Кривые *1*, *2* построены для $\lambda=10$, 1 соответственно. Пунктирная прямая дает статически эквивалентное равномерное распределение усилий. Как видно из приведенного примера, для $\lambda=10$ распределение усилий в клее будет значительно отличаться от равномерного.

Поступила 12 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.– Л., Изд-во АН СССР, 1949.
2. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.– Л., Гостехиздат, 1949.
3. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.

УДК 539.374

О ПРИБЛИЖЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ СТАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ ВДОЛЬ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ШТАМПЕ

О. Д. ГРИГОРЬЕВ

(*Новосибирск*)

Излагается приближенный метод интегрирования соотношений вдоль линий скольжения с помощью теоремы о среднем интегрального исчисления для идеальной жестко-пластически неоднородной среды. Рассмотрена задача о штампе, когда предел текучести монотонно изменяется с глубиной. Даны теоремы об оценках нагрузок на гладкий штамп при непрерывно возрастающей и убывающей малых неоднородностях. Указанные результаты могут рассматриваться, как оценки соответствующих решений методом характеристик. Полагая, что при возрастающей с глубиной пластической неоднородности метод характеристик приводит к точному решению, получены двухсторонние оценки нагрузки для линейной неоднородности. Это позволило для малой указанной неоднородности получить практически точные значения предельной нагрузки на штамп.

Рассмотрим плоскую деформацию неоднородного жестко-пластического тела, когда предел текучести является функцией координат $k=k(x, y)$. В этом случае уравнения для напряжений имеют вид [1]

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s_\alpha}-2k\frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha}+\frac{\partial k}{\partial s_\beta}=0,\qquad dy=\operatorname{tg}\theta\,dx\qquad (\beta=\text{const}) \tag{1}$$