

УДК 539.3:534.1

КОЛЕБАНИЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ ПОДВИЖНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, В. П. ОЛЬШАНСКИЙ

(Харьков)

Колебания трехслойных пластин, вызванные соударением с упругим телом, при котором нагрузка носит локальный импульсивный характер, рассматривались в работах [1, 2]. В данной статье изучается случай динамического нагружения, когда круговая, эллиптическая или прямоугольная область приложения импульсивной нагрузки перемещается по поверхности пластины. К подобного рода задачам может быть сведен расчет трехслойных пластин на косоу удар без учета поверхностных касательных усилий.

1. Движение прямоугольной изотропной трехслойной пластины несимметричного строения с жестким заполнителем, согласно работе [1], определяется системой дифференциальных уравнений

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 (a_1 W + a_3 R + a_5 \Omega) &= 0 \\ \nabla^2 (b_1 \nabla^2 W + b_3 W + b_4 \nabla^2 R - b_3 R - a_3 \nabla^2 \Omega) &= 0 \\ c_1 \nabla^2 \nabla^2 W - b_3 \nabla^2 W + a_6 W'' + b_1 \nabla^2 \nabla^2 R + \\ + b_3 \nabla^2 R - a_1 \nabla^2 \nabla^2 \Omega &= -q(x, y, t) \end{aligned}$$

Уравнения (1.1) получены на основании гипотезы ломанной линии [3] относительно распределения тангенциальных перемещений по толщине пакета без учета поперечной сжимаемости слоев. По сравнению с работой [1], в системе (1.1) из инерционных слагаемых учтена только инерция поперечного прогиба, что существенно уменьшает объем вычислений и не приводит к значительным погрешностям при действии импульсов, продолжительность которых не мала по сравнению с периодом основного тона изгибных колебаний. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать действие на пластину относительно «длительных» импульсов.

В уравнениях (1.1) ∇^2 — двумерный оператор Лапласа; W — поперечный прогиб срединной плоскости заполнителя; R, Ω — скалярные потенциалы углов поворота сечений и тангенциальных перемещений заполнителя в плоскостях ozx, ozy ; $q(x, y, t)$ — внешняя поперечная нагрузка.

Коэффициенты уравнений (1.1) выражаются через параметры пластины по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/2 (E_2 \delta_2^2 - E_1 \delta_1^2), & a_3 &= h (E_2 \delta_2 - E_1 \delta_1), & a_5 &= 2Eh + E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2 \\ b_1 &= -1/2 h (E_1 \delta_1^2 + E_2 \delta_2^2), & b_3 &= -2Gh, & b_4 &= -h^2 (2/3 Eh + E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2) \\ c_1 &= -\frac{1}{3} (E_1 \delta_1^3 + E_2 \delta_2^3), & a_6 &= -(2\rho h + \rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2), & E_i &= \frac{E_i'}{1 - \nu_i^2} \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

Здесь E_i', ν_i и ρ_i — модули упругости, коэффициенты Пуассона и плотности материалов верхней ($i=1$) и нижней ($i=2$) обшивок толщиной δ_i ; E', G, ν и ρ — модуль упругости, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотность материала заполнителя толщиной $2h$.

Напряжения в несущих слоях и заполнителе выражаются через производные функций W, R, Ω . Для максимальных напряжений в нижнем несущем

щем слое ($z=h+\delta_2$), которыми часто определяется прочность трехслойной конструкции при однократном импульсивном нагружении, имеем соотношения

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -E_2[\delta_2(W_{xx}'' + \nu_2 W_{yy}'') + (\Omega_{xx}'' + \nu_2 \Omega_{yy}'') + h(R_{xx}'' + \nu_2 R_{yy}'')] \\ \sigma_y &= -E_2[\delta_2(W_{yy}'' + \nu_2 W_{xx}'') + (\Omega_{yy}'' + \nu_2 \Omega_{xx}'') + h(R_{yy}'' + \nu_2 R_{xx}'')] \end{aligned}$$

Таким образом, анализ напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины сводится к решению уравнений (1.1) и вычислению напряжений по формулам (1.2).

Следуя работе [1], решение уравнений (1.1) для прямоугольной пластины с размерами в плане l_1, l_2 ищем в виде разложений

$$\begin{aligned} W &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum A_{mn}(t) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y, & R &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum B_{mn}(t) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y \\ \Omega &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum C_{mn}(t) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y, & \alpha_1 &= m\pi l_1^{-1}, & \alpha_2 &= n\pi l_2^{-1} \end{aligned}$$

При помощи операционного метода при нулевых начальных условиях находим

$$(1.3) \quad \begin{aligned} W &= -\frac{4}{l_1 l_2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum \frac{A_{1mn}}{D_{1mn} \omega_{mn}} \Phi_{mn}(x, y, t) \\ R &= -\frac{4}{l_1 l_2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum \frac{B_{1mn}}{D_{1mn} \omega_{mn}} \Phi_{mn}(x, y, t) \\ \Omega &= -\frac{4}{l_1 l_2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum \frac{C_{1mn}}{D_{1mn} \omega_{mn}} \Phi_{mn}(x, y, t) \end{aligned}$$

Здесь

$$(1.4) \quad \begin{aligned} A_{1mn} &= (a_3^2 + a_5 b_4) \alpha^2 + b_3 a_5, & B_{1mn} &= -(a_1 a_3 + b_1 a_5) \alpha^2 + b_3 a_5 \\ C_{1mn} &= (b_1 a_3 - a_1 b_4) \alpha^2 - b_3 (a_1 + a_3), & D_{1mn} &= a_6 [a_3^2 \alpha^2 + a_5 (b_4 \alpha^2 + b_3)] \\ D_{2mn} &= \alpha^2 \{ [a_3^2 \alpha^2 + a_5 (b_4 \alpha^2 + b_3)] (c_1 \alpha^2 + b_3) + (b_3 - b_1 \alpha^2) [a_1 a_3 \alpha^2 + a_5 (b_1 \alpha^2 - b_3)] + \\ &+ a_1 [a_1 \alpha^2 (b_4 \alpha^2 + b_3) - a_3 \alpha^2 (b_1 \alpha^2 - b_3)] \} \\ \omega_{mn} &= (D_{2mn} D_{1mn})^{-1/2}, & \alpha^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \end{aligned}$$

$$\Phi_{mn}(x, y, t) = \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y \int_0^t \left[\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} q(x, y, t_1) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y \, dx \, dy \right] \sin \omega_{mn}(t-t_1) \, dt_1$$

Пусть внешняя нагрузка $q(x, y, t_1)$ распределена на эллиптической площадке с полуосями $u(t_1), v(t_1)$ по закону

$$(1.5) \quad q(x, y, t_1) = q_0(t_1) (1 - \xi^2 u^{-2} - \eta^2 v^{-2})^k$$

где κ — некоторая константа, ξ , η — координаты точки в системе отсчета, неизменно связанной с указанной площадкой так, что $x = x_1(t) + \xi$, $y = y_1(t) + \eta$.

Центр эллипса определяется координатами $x_1(t_1)$, $y_1(t_1)$, которые (также как u и v) являются произвольными непрерывными функциями времени и представляют собою закон движения нагрузки по поверхности пластины.

В соответствии с принятой зависимостью (1.5) двойной внутренней интеграл выражения (1.4) может быть вычислен аналитическим путем. Его величина определяется формулой

$$(1.6) \quad S(t_1) = q_0 \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 y_1 \iint_{(\theta)} (1 - x^2 u^{-2} - y^2 v^{-2})^\kappa \cos \alpha_1 x \cos \alpha_2 y \, dx \, dy$$

где θ — площадь, ограниченная контуром эллипса. Заменой переменных $x = u \cos \varphi \sin \psi$, $y = v \sin \varphi \sin \psi$ интеграл (1.6) после ряда преобразований сводится к первому интегралу Сонина [4], а затем и к функции Бесселя

$$(1.7) \quad S(t_1) = \pi q_0 \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 y_1 \cdot uv (2/\beta)^{\kappa+1} \Gamma(\kappa+1) J_{\kappa+1}(\beta) \\ \beta = [(\alpha_1 u)^2 + (\alpha_2 v)^2]^{1/2}$$

Здесь Γ — гамма-функция, $J_{\kappa+1}$ — функция Бесселя первого рода порядка $\kappa+1$. $S(t_1)$ удобно представить в виде

$$(1.8) \quad S(t_1) = P(t_1) \gamma(t_1)$$

где $P(t_1)$ — объем, заключенный между поверхностями $q(x, y, t)$ (1.5) и плиты, т. е. условная сосредоточенная сила, эквивалентная распределенной локальной нагрузке и приложенная в центре эллипса; $\gamma(t_1)$ — весовая функция, учитывающая характер распределения локальной нагрузки. Так как

$$P(t_1) = q_0 \iint_{(\theta)} (1 - x^2 u^{-2} - y^2 v^{-2})^\kappa \, dx \, dy = \frac{1}{\kappa+1} \pi uv q_0$$

то из соотношений (1.7), (1.8) получаем выражение весовой функции

$$(1.9) \quad \gamma = (1+\kappa) (2/\beta)^{1+\kappa} \Gamma(1+\kappa) J_{1+\kappa}(\beta) \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 y_1$$

При равномерном распределении нагрузки на круговой площадке ($u=v=r$, $\kappa=0$) значение весовой функции совпадает с приведенным в работе [5]. При $\kappa=1$ давление распределено по параболическому закону и весовая функция будет

$$\gamma = 8\beta^{-2} J_2(\beta) \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 y_1$$

В случае приложенной в центре пластины сосредоточенной силы ($\beta \rightarrow 0$) величина весовой функции равна единице.

Не представляет затруднений получить выражение функции γ и в случае, когда нагрузка распределена внутри прямоугольной площадки со сторонами $2u$, $2v$. Так, если распределение импульса по поверхности подчиняется закону

$$q(x, y, t_1) = q_0(t_1) (u^2 - x^2)^\kappa (v^2 - y^2)^\kappa$$

для весовой функции имеем выражение

$$(1.10) \quad \gamma = \frac{\pi}{4} \frac{(2\kappa_1+1)!!(2\kappa_2+1)!!}{2\kappa_1!!2\kappa_2!!} \left(\frac{2}{\alpha_1 u}\right)^{\kappa_1+1/2} \left(\frac{2}{\alpha_2 v}\right)^{\kappa_2+1/2} \times \\ \times \Gamma(\kappa_1+1)\Gamma(\kappa_2+1)J_{\kappa_1+1/2}(\alpha_1 u)J_{\kappa_2+1/2}(\alpha_2 v) \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 y_1$$

Последнее соотношение может быть представлено в элементарных функциях.

При равномерном распределении ($\kappa_1=\kappa_2=0$) из (1.10) получаем

$$\gamma = (\alpha_1 u \alpha_2 v)^{-1} \sin \alpha_1 u \sin \alpha_2 v \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 y_1$$

Параболическому распределению ($\kappa_1=\kappa_2=1$) соответствует

$$\gamma = 9(\alpha_1 u)^{-3/2}(\alpha_2 v)^{-3/2} [(\alpha_1 u)^{-3/2} \sin \alpha_1 u - (\alpha_1 u)^{-1/2} \cos \alpha_1 u] \times \\ \times [(\alpha_2 v)^{-3/2} \sin \alpha_2 v - (\alpha_2 v)^{-1/2} \cos \alpha_2 v] \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 y_1$$

Аналогично определяется γ и при других целочисленных значениях κ_1 и κ_2 . Весовая функция обладает свойством равняться единице, когда $u=v=0$, $x_1=1/2l_1$, $y_1=1/2l_2$.

Интеграл по времени t в выражении (1.4) для сложных законов изменения функций $P(t_1)$ и $\gamma(t_1)$ не может быть взят аналитически, поэтому в дальнейшем применяется численное интегрирование. Разделим интервал $(0, t)$ на малые отрезки времени величиной τ . В пределах k -го отрезка времени подынтегральную функцию $S(t)$ представим зависимостью [°]

$$(1.11) \quad S(t) = S_{k-1} + \frac{S_k - S_{k-1}}{\tau} [t - (k-1)\tau] \\ S_k = S(k\tau), \quad (k-1)\tau \leq t \leq k\tau$$

Приближенная формула (1.11) достаточно точна, когда величина отрезка τ значительно меньше минимального периода функции S . Последний зависит от продолжительности внешнего импульса, скорости его движения по поверхности плиты и количества членов, удерживаемых в рядах (1.2), (1.3). При больших скоростях движения, малой продолжительности внешнего воздействия и плохой сходимости рядов необходим выбор малого шага τ для получения надежных численных результатов.

Подставив зависимость (1.11) в интеграл (1.4), после интегрирования по частям находим

$$\Phi_{mn}(x, y, k\tau) = \left[\frac{S_k}{\omega_{mn}} + \sin \omega_{mn} k\tau \sum_{i=1}^k M_i + \cos \omega_{mn} k\tau \sum_{i=1}^k N_i \right] \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y$$

Здесь

$$M_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{\omega_{mn}^2 \tau} [\cos \omega_{mn} i\tau - \cos \omega_{mn} (i-1)\tau]$$

$$N_i = \frac{S_{i-1} - S_i}{\omega_{mn}^2 \tau} [\sin \omega_{mn} i\tau - \sin \omega_{mn} (i-1)\tau]$$

Полученные соотношения позволяют при помощи ЭЦВМ проанализировать влияние параметров движения нагрузки, закона ее изменения и характера распределения на напряженно-деформированное состояние трехслойных и однородных пластин. Чтобы приведенные формулы описывали колебания монолитных пластин, достаточно в них положить $h=0$, $E_1=E_2=E$, $\nu_1=\nu_2=\nu$, $\rho_1=\rho_2=\rho$, $\delta_1=\delta_2=1/2h_0$, где E , ν и ρ — упругие константы и плотность материала однородной пластины толщиной h_0 . Если в получен-

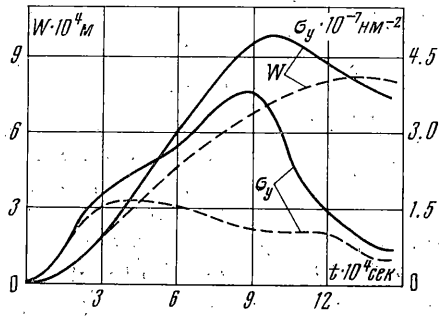
ных формулах положить $h=0$, то приходим к теории Кирхгофа для двухслойной пластины, составленной из материалов несущих слоев.

2. По изложенному методу на ЭЦВМ выполнен расчет ряда случаев импульсивного нагружения трехслойной пластины с параметрами: верхний несущий слой — сталь, $\delta_1=5 \cdot 10^{-3}$ м; нижний несущий слой — алюминий, $\delta_2=4 \cdot 10^{-3}$ м; наполнитель — материал типа ПХВ ($E=5 \cdot 10^7$ нм⁻²; $\nu=0.4$; $\rho=3 \cdot 10^2$ кгм⁻², $2h=5 \cdot 10^{-2}$ м). Размеры пластины в плане: $l_1=1.2$ м, $l_2=0.8$ м. Нагружение стальной обшивки осуществляется импульсом в

форме одной подволны синусоиды, распределенным на круговой площадке радиуса r , равно $9 \cdot 10^{-2} \sin 10^3 \pi t$ м.

$$(2.1) \quad P(t) = \begin{cases} 10^4 \sin 10^3 \pi t & \text{при } t \leq 10^{-3} \text{ сек} \\ 0 & \text{при } t > 10^{-3} \text{ сек} \end{cases} \quad H$$

Площадка равномерно перемещается от центра плиты вдоль ее диагонали со скоростью 72.1 мсек⁻¹.



Фиг. 1

Результаты вычислений прогибов и напряжений под нагрузкой равномерно распределенной по кругу ($\kappa=0$) при удержании 484-х членов разложения вряд ли дает удовлетворительные результаты. Плохая сходимость рядов объясняется тем, что в начальный момент нагрузка $P(t_1)$ распределена на маленькой площадке, т. е. представляет собой почти сосредоточенную силу, для которой весовая функция γ стремится к единице и поэтому не улучшает сходимости. По мере роста нагрузки увеличивается область ее приложения и тогда 225 членов разложения дают вполне удовлетворительные результаты.

Таблица 1

$t \cdot 10^4$ сек	$W \cdot 10^3$ м			$\sigma_x \cdot 10^{-8}$ нм ⁻²			$\sigma_y \cdot 10^{-8}$ нм ⁻²		
	9	15	22	9	15	22	9	15	22
2	0.053	0.086	0.094	0.029	0.090	0.121	0.042	0.113	0.118
4	0.267	0.296	0.291	0.113	0.166	0.142	0.146	0.158	0.142
6	0.537	0.557	0.556	0.171	0.193	0.176	0.190	0.187	0.178
8	0.836	0.881	0.888	0.220	0.284	0.307	0.242	0.301	0.309
10	1.056	0.111	0.111	0.234	0.310	0.320	0.258	0.320	0.320
12	1.054	1.026	1.024	0.166	0.126	0.123	0.160	0.116	0.115
14	0.944	0.929	0.930	0.089	0.069	0.073	0.067	0.079	0.079

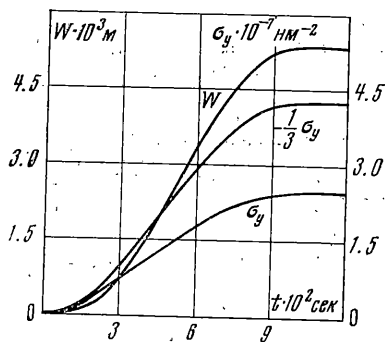
На фиг. 1 показан характер развития прогибов W и напряжений σ_y под нагрузкой (сплошные линии) и в центре плиты (пунктирные линии) при движении импульса (2.1) ($\kappa=1$) вдоль оси ox со скоростью 150 мсек⁻¹. Начальная точка приложения импульса — центр пластины. Анализ результатов показывает, что по мере удаления от области приложения нагрузки изгибные напряжения в обшивке быстро убывают, т. е. напряженное состояние носит локальный характер, хотя максимумы напряжений и прогибов под нагрузкой достигаются не в момент максимального значения внешнего импульса, а несколько позже, так как точки плиты продолжают движение по инерции. Из графиков также видно, что по величине прогибы в центре пластины могут быть близки к прогибам под нагрузкой, что не характерно для напряжений.

На фиг. 2 показаны графики прогибов и напряжений под нагрузкой в стальной (σ_y^s) и алюминиевой обшивках (σ_y^a), возникающие при нагружении пластины ука-

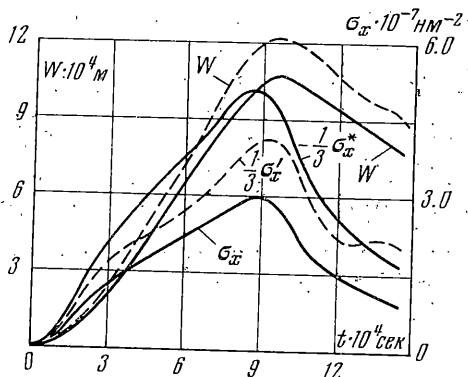
занных выше параметров расширяющимся импульсом в форме

$$(2.2) \quad \begin{aligned} P(t_1) &= 10^4 \sin^3 10\pi t_1 \text{ н,} & r &= 0.3 \cdot \sin 10\pi t_1 \text{ м} & \text{при } t_1 < 0.05 \text{ сек} \\ P(t_1) &= 10^4 \text{ н,} & r &= 0.3 \text{ м} & \text{при } t_1 \geq 0.05 \text{ сек} \end{aligned}$$

Распределение импульса внутри круговой неподвижной площадки $x_1=l_1/2, y_2=l_2/2$ подчиняется параболическому закону ($\kappa=1$), причем интенсивность давления $q_0(t_1)$ и r изменяются по закону синуса и «замораживаются» после достижения максимальных значений. Импульс (2.2) в какой-то мере имитирует нагружение пластины весом сыпучего груза, оседающего в форме холмика на обшивку. Полученные



Фиг. 2



Фиг. 3

графики показывают, что при рассмотренном медленном нагружении прогибы и напряжения стремятся к установившимся статическим значениям. При этом напряжения в стальной обшивке значительно больше, чем напряжения в алюминиевом несущем слое.

Рассмотренные выше результаты были получены при распределении импульса по круговой площадке.

Данные табл. 2 соответствуют центральному нагружению пластины по эллиптической неподвижной площадке: $u=2 \cdot 10^{-1} \sin 10^3 \pi t, v=9 \cdot 10^{-2} \sin 10^3 \pi t$ при равномерном ($\kappa=0$) и параболическом ($\kappa=1$) распределении нагрузки (2.1). В первом варианте содержатся максимальные значения прогибов и напряжений, когда большая ось эллипса направлена вдоль оси Ox (первый и второй столбцы таблицы). Во втором варианте направление большей оси совпадает с направлением короткой стороны (третий и четвертый столбцы таблицы). Сопоставление результатов показывает, что неравномерное распределение нагрузки приводит к большим значениям локальных прогибов и напряжений по сравнению с равномерным. Взаимное расположение осей эллипса и сторон пластины также сказывается на напряженно-деформированном состоянии.

Таблица 2

κ	0	1	0	1
$W \cdot 10^4 \text{ м}$	0.943	1.029	0.938	1.032
$\sigma_x \cdot 10^{-7} \text{ нм}^{-2}$	1.860	2.429	2.470	2.849
$\sigma_y \cdot 10^{-7} \text{ нм}^{-2}$	2.525	3.073	1.954	2.599

На фиг. 3 приведены графики прогибов и напряжений в симметричной и физически несимметричной трехслойной пластине одинакового погонного веса со стальными несущими слоями толщиной соответственно $\delta_1=\delta_2=3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и $\delta_1=5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \delta_2=10^{-3} \text{ м}$. Остальные параметры сохранялись такими же, как в ранее рассмотренной пластинке. Внешний импульс изменялся по закону (2.1) ($\kappa=1$) и перемещался от центра пластины вдоль длинной стороны со скоростью 150 мсек⁻¹. Пунктирные линии на фиг. 3 получены для симметричной пластины, а сплошные — относятся к пластине с несущими слоями разной толщины. Сравнение графиков показывает, что напряжения σ'_x в несущем слое симметричной пластины принимают промежу-

точные значения между напряжениями σ_x^* и σ_x соответственно в толстой и тонкой обшивках физически несимметричной пластины. Прогобы симметричной пластины несколько больше прогибов несимметричной при меньшем уровне максимальных напряжений в несущих слоях. Это обстоятельство указывает на большую податливость пластин симметричного строения по сравнению с несимметричными одинакового погонного веса при импульсном нагружении.

Выше были рассмотрены относительно простые случаи воздействия силовых импульсов. Изложенный метод позволяет изучать напряженно-деформированные состояния трехслойных пластин и при более сложных законах изменения внешних нагрузок.

Поступила 28 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ольшанский В. П., Филиппов А. П.* Деформации несимметричной трехслойной пластины с заполнителем при ударе. Киев, Прикл. механ., 1974, т. 7, вып. 3.
2. *Ольшанский В. П., Филиппов А. П.* Колебания трехслойной балки — полосы при ударе. Киев, Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 12.
3. *Григोलюк Э. И., Чулков П. П.* К расчету трехслойных пластин с жестким заполнителем. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1964, № 1.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. I. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
5. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
6. *Филиппов А. П., Булгаков В. Н., Воробьев Ю. С.* и др. Численные методы в прикладной теории упругости. Киев, «Наукова думка», 1968.