

УДК 539.3:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГИМИ КРАЕВЫМИ КОЛЬЦАМИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В. В. КАБАНОВ, В. Д. МИХАЙЛОВ

(Новосибирск)

Изложен конечно-разностный алгоритм исследования устойчивости тонких круговых цилиндрических оболочек, несимметрично собранных из ортотропных или конструктивно-анизотропных слоев. Получены рекуррентные формулы, позволяющие вычислять определитель системы разностных уравнений при любом числе узлов по образующей. Алгоритм позволяет решать широкий круг задач устойчивости оболочек при различных граничных условиях и нагрузках. Приводится решение задачи устойчивости эксцентрично подкрепленной оболочки, имеющей по краям упругие кольца, при равномерном осевом сжатии. Исследована зависимость критической нагрузки от жесткости краевых колец и расположения подкреплений.

1. Рассмотрим тонкую осесимметрично нагруженную осевым сжатием круговую цилиндрическую оболочку, собранную из нескольких ортотропных или конструктивно-анизотропных слоев. Оболочка отнесена к гауссовым координатам x, y, z . Главные направления ортотропии совпадают с линиями кривизны. Для оболочки в целом справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява.

Уравнения устойчивости неоднородной оболочки можно представить [1] в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \nabla_2 w - \nabla_3 F - k_2 F_{xx} - T_1 \circ (w_{xx} + k_2 A_{11} F_{yy}) - T_2 \circ (w_{yy} + k_2^2 w) - F_{yy} w_{xx} &= 0 \\ \nabla_1 F + \nabla_3 w + k_2 w_{xx} + w_{yy} w_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \nabla_1 F &= A_{11} F_{yyy} + A_3 F_{xxy} + A_{22} F_{xxxx}, \quad A_3 = A_{33} + 2A_{12}, \quad k_2 = R^{-1} \\ \nabla_2 w &= D_{11} w_{xxxx} + D_3 w_{xxyy} + D_{22} [w_{yyyy} + k_2^2 (2w_{yy} + k_2^2 w)] \\ \nabla_3 (\dots) &= L_{12} (\dots)_{yy} + L_3 (\dots)_{xxy} + L_{21} (\dots)_{xxxx} \\ D_3 &= 2(2D_{33} + D_{12}), \quad L_3 = L_{11} + L_{22} - 2L_{33} \\ A_{11} &= B_{22} B_1, \quad A_{22} = B_{11} B_1, \quad A_{12} = A_{21} = -B_{12} B_1, \\ B_1 &= (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)^{-1} \\ A_{33} &= B_{33}^{-1}, \quad L_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} K_{kj}, \quad D_{ij} = D_{ij}' - \sum_{k=1}^3 L_{kj} K_{ki} \end{aligned}$$

Через B_{ij}, K_{ij}, D_{ij}' обозначены коэффициенты в соотношениях упругости

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & K_{33} \\ K_{11} & K_{12} & 0 & D_{11}' & D_{12}' & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & D_{21}' & D_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & D_{33}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Здесь

$$B_{ij} = \sum_n B_{ij}^n, \quad K_{ij} = \sum_n B_{ij}^n z_n, \quad D_{ij}' = \sum_n (D_{ij}^n + B_{ij}^n z_n^2)$$

$$B_{12} = B_{21}, \quad D_{12}' = D_{21}', \quad K_{12} = K_{21} \quad (i, j=1, 2, 3)$$

где z_n , B_{ij} , D_{ij} — расстояние по нормали от поверхности приведения до срединной поверхности, жесткости на растяжение и изгибные жесткости n -го слоя.

Координаты x , y в индексах означают дифференцирование, R — радиус оболочки, w — прогиб, F — функция усилий, M_i , ε_i , χ_i — погонные моменты и компоненты деформации поверхности приведения усилий; w° , T_i° — прогиб и усилия в оболочке в исходном состоянии, которые определяются решением уравнения осесимметричной задачи

$$(1.4) \quad D_{11}^* w_{xxxx}^\circ + N^\circ w_{xx}^\circ + k_2^2 A_{22}^{-1} w^\circ - k_2 B_{21} B_{11}^{-1} T_1^\circ + p = 0$$

$$D_{11}^* = D_{11} + L_{21}^2 / A_{22}, \quad N^\circ = N + 2k_2 L_{21} / A_{22}, \quad T_1^\circ = -N$$

$$T_2^\circ = T_1^\circ \frac{B_{21}}{B_{11}} - \frac{k_2}{A_{22}} w^\circ - \frac{L_{21}}{A_{22}} w_{xx}^\circ$$

Здесь p — внутреннее боковое давление, N — усилие сжатия. Введем подстановку

$$(1.5) \quad x = \eta \theta_1, \quad y = s \theta_2, \quad w = W k_2 \theta_2^2 \cos \beta s, \quad F = f D_{22} A^{-1} \cos \beta s$$

$$\theta_1^4 = R^2 D_{11} A_{22}, \quad \theta_2^4 = R^2 D_{22} A_{22}, \quad \beta = n \alpha_0, \quad \alpha_0 = k_2 \theta_2$$

$$p^* = \frac{p}{k_p}, \quad k_p = \frac{k_2^2 D_{22}}{\sqrt{D_{11} A_{11}}}, \quad N^* = \frac{N}{N_0}, \quad N_0 = 2k_2 \sqrt{\frac{D_{11}}{A_{22}}}, \quad \alpha = \frac{A_3}{\sqrt{A_{11} A_{22}}}$$

$$\beta^* = \frac{D_3}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}, \quad \gamma = \frac{A_{11} D_{11}}{A_{22} D_{22}}, \quad \delta^2 = \gamma, \quad \alpha_{11} = \frac{L_{21}}{k_2 \theta_1^2}, \quad \alpha_{22} = \frac{L_{12} \theta_1^2}{k_2 \theta_2^2}$$

$$\alpha_{12} = \frac{L_3}{k_2 \theta_2^2}, \quad A^2 = \frac{A_{11}}{A_{22}}, \quad T_2^\circ = pR + T_h, \quad t_1 f_1 = -\frac{T_h}{Rk_p}, \quad R w_{xx}^\circ = -t_1 f_2$$

где n — число волн по окружности, t_1 — параметр нагрузки, f_1 , f_2 — функции координаты x , характеризующие изменение T_2° , w_{xx}° по длине. Заменяем систему (1.1) четырьмя обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$(1.6) \quad f_{\eta\eta} - \Psi = 0, \quad W_{\eta\eta} - U = 0$$

$$\delta \{ U_{\eta\eta} + (2N^* - \beta^* \beta^2) U + [\beta^4 + \alpha_0^2 (\alpha_0^2 - 2\beta^2) + (p^* - t_1 f_1) \beta^2 \delta^{-1}] W \} -$$

$$- \alpha_{11} \Psi_{\eta\eta} + (\alpha_{12} \beta^2 - 1) \Psi - (2N^* \gamma \alpha_0^2 + t_1 f_2 \delta A^{-1} + \alpha_{22} \beta^2) \beta^2 f = 0$$

$$\Psi_{\eta\eta} \delta^{-1} - \alpha \beta^2 \Psi + \delta \beta^4 f + \alpha_{11} U_{\eta\eta} + (1 - \alpha_{12} \beta^2) U + (t_1 f_2 + \alpha_{22} \beta^2) \beta^2 W = 0$$

Введем вектор-столбец $v = v(f, W, U, \Psi)$ и представим систему (1.6) в виде одного уравнения в матричной форме

$$(1.7) \quad A' v_{\eta\eta} + B' v = 0$$

где A' , B' — матрицы четвертого порядка. Это уравнение запишем в конечных разностях, используя разностную схему второго порядка точности

$$2c v_{i\eta} = v_{i+1} - v_{i-1}, \quad e^2 v_{i\eta\eta} = v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}$$

Здесь $i = 0, 1, 2, \dots, m$ — номера узлов по образующей длины l , начиная от начала координат, $c = \eta_m / m$, $\eta_m = l / \theta_1$.

Уравнение (1.7) приводится к системе алгебраических уравнений

$$(1.8) \quad A_i(v_{i+1} + v_{i-1}) + B_i v_i = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, m)$$

Отличные от нуля элементы в матрицах $A_i = [a_{ij}]$, $B_i = [b_{ij}]$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{33} = \delta, \quad a_{43} = -a_{34} = \alpha_{11}, \quad a_{44} = \delta^{-1}, \quad b_{11} = b_{22} = -2 \\ b_{14} = b_{23} = -c^2, \quad b_{31} = -c^2 \beta^2 (\beta^2 \alpha_{22} + 2\gamma \alpha_0^2 N^* + t_1 f_2 \delta / A) \\ b_{32} = c^2 \beta^2 [\delta (\beta^2 - 2\alpha_0^2) + p^* - t_1 f_1], \quad b_{33} = 2\delta (c^2 N^* - 1 - c^2 \beta^2 \beta^*) \\ b_{34} = -b_{43} = 2\alpha_{11} + \alpha_{12} \beta^2 c^2 - c^2, \quad b_{41} = c^2 \beta^4 \delta \\ b_{42} = c^2 \beta^2 (\beta^2 \alpha_{22} + \delta t_1 f_2 / A), \quad b_{44} = -\alpha c^2 \beta^2 - 2 / \delta \end{aligned}$$

Функции f_1 и f_2 вычисляются для координат узлов $\eta_i = ic$. Систему (1.8) необходимо дополнить граничными условиями. В общем случае граничные условия можно записать в форме

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \alpha_{p_1} w + \alpha_{p_2} Q = 0, \quad \alpha_{h_1} w_x + \alpha_{h_2} M_1 = 0 \\ \alpha_{n_1} u_{yy} + \alpha_{n_2} F_{yy} = 0, \quad \alpha_{c_1} v_y + \alpha_{c_2} F_{xy} = 0 \\ Q = M_{1x} + 2M_{3y} + T_1 \circ w_x + F_{yy} w_x \circ, \quad M_3 = -2D_{33} w_{xy} - L_{33} F_{xy} \\ M_1 = -D_{11} w_{xx} - D_{12} w_{yy} + L_{11} F_{yy} + L_{21} F_{xx} \\ v_y = k_2 w + A_{22} (F_{xx} - B_{12} B_{11}^{-1} F_{yy}) + L_{21} w_{xx} + L_{22} w_{yy} \\ u_{yy} = -k_3 w_x - w_{yy} w_x \circ + 2K_{33} B_{33}^{-1} w_{xyy} - A_{33} F_{xyy} - \\ - A_{22} (F_{xxx} - v_{12} F_{xyy}) - L_{21} w_{xxx} - L_{22} w_{xyy} \end{aligned}$$

В разностной форме систему (1.9) можно представить в виде

$$(1.10) \quad G_i(v_{i+1} - v_{i-1}) + D_i v_i = 0 \quad (i=0, m)$$

где G_i , D_i — матрицы четвертого порядка. Элементы этих матриц выражаются через коэффициенты системы (1.9) сложным образом и здесь не приводятся. Система уравнений (1.8), (1.10) имеет простую рекуррентную структуру. Нетривиальному решению этой системы соответствует равенство нулю ее определителя. Определитель имеет трехдиагональное строение и разворачивается в произведение методом исключения Гаусса в матричной форме. В результате для вычисления критической нагрузки получается рекуррентный процесс [2]:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \Delta = \Delta_p \Delta_1 = 0, \quad \Delta_p = |(D_0 + G_0 M_1) M_0 - G_0|, \quad \Delta_1 = |B_0^*| \Delta^\circ \\ \Delta^\circ = \Delta_p^\circ \Delta_1^\circ, \quad \Delta_1^\circ = |B_2^* B_3^* \dots B_m^* A_m|, \quad \Delta_p^\circ = |B_1^*| \end{aligned}$$

$$B_i^* = B_i + A_i M_{i+1}, \quad M_i = -B_i^{*-1} A_i = -(M_{i+1} + A_i^{-1} B_i)^{-1}$$

$$M_m = 2B_m^{*-1} G_m, \quad B_m^* = D_m - G_m A_m^{-1} B_m$$

Векторы двух соседних точек связаны соотношением

$$(1.12) \quad v_i = M_i v_{i-1}$$

Определитель (1.11) используется при $G_0 \neq 0$. Если в граничных условиях $G_0 = 0$, то процесс исключения заканчивается на третьей сверху строке определителя. Вместо (1.11) в этом случае имеем $\Delta^\circ = \Delta_p^\circ \Delta_1^\circ = 0$.

Полученный алгоритм запрограммирован для машины типа М-20 и позволяет стандартно решать широкий круг задач устойчивости оболочек при различных нагрузках и граничных условиях. Определение критических нагрузок сводится к вычислению определителя Δ или Δ° при заданных значениях c , β , геометрических параметров оболочки и параметров нагрузки. Критическому состоянию отвечает совокупность наименьших значений нагрузки, при которой определитель обращается в нуль. После вычисления критической нагрузки по соотношению (1.12) можно определить и форму потери устойчивости.

Рекуррентный характер алгоритма позволяет при последовательном увеличении числа узлов m проследить за сходимостью процесса и получить решение, близкое к точному.

2. Исследуем, например, устойчивость эксцентрично подкрепленной оболочки, имеющей по краям упругие кольца квадратного поперечного сечения размером a . Нагрузка равномерно распределена по средней линии колец. Для неподкрепленной оболочки эта задача исследовалась в [3]. Считая оболочку достаточно длинной, рассмотрим половину оболочки, поместив начало координат на левом конце. Граничными условиями справа служат условия симметрии

$$(2.1) \quad w_x = w_{xxx} = F_y = F_{yyy} = 0$$

или условия косой симметрии

$$(2.2) \quad w = w_{xx} = v_y = F_{yy} = 0$$

Граничными условиями слева являются условия сопряжения оболочки с кольцом

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} F_{yy} \\ -F_{xy} \\ Q \\ M_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{14} \\ 0 & C_{22} & C_{23} & 0 \\ 0 & C_{32} & C_{33} & 0 \\ C_{41} & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{yy} \\ v_y \\ w \\ w_x \end{pmatrix} = 0$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= k_2^2 GI_k + T^0 - EI_z ()_{yy}, & C_{14} &= -k_2 (EI_z + GI_k) ()_{yy} + k_2 T^0 \\ C_{22} &= k_2 E (F_2 + k_2^2 I_x) ()_y, & C_{23} &= k_2 E [I_x ()_{yyy} - F_2 ()_y], & F_2 &= a^2 \\ C_{32} &= k_2^2 E [F_2 - I_x ()_{yy}], & C_{33} &= T^0 ()_{yy} - k_2^2 E [F_2 + I_x ()_{yy}] \\ C_{41} &= k_2 (GI_x + EI_z), & C_{44} &= k_2^2 EI_z - GI_k ()_{yy}, & T^0 &= -k_2 E F_2 w^0 \end{aligned}$$

Здесь T^0 — усилие в кольце в докритическом состоянии, EI_z , EI_x , GI_k — изгибные жесткости поперечного сечения кольца относительно его главных осей и жесткость на кручение, u , v — продольные и окружное смещения. Условия (2.3) получены линеаризацией нелинейных уравнений криволинейной стержней Клебша — Кирхгофа [4]. Считалось, что срединные поверхности кольца и оболочки совпадают.

Решение (1.4) имеет вид

$$w^0 = (1 - \alpha_4 f_3) w_b$$

где

$$f_3 = e^{-a\eta} (A_1 \cos b\eta + A_2 \sin b\eta), \quad \alpha_4 = (1 + \psi_1 \alpha_k^*) / \Delta_{11}$$

$$\Delta_{11} = 1 + \psi_1 (\alpha_k^* + \alpha_p^*) + \alpha_k^* \alpha_p^* [0.5(1 - \beta_7^2) - N^* \beta_5^{-1/2}]$$

$$d = k_1' \psi_1, \quad b = k_1' \psi_2, \quad \psi_1^2 = 1 - N^{**}, \quad \psi_2^2 = 1 + N^{**}$$

$$N^{**} = \frac{N^* - \sqrt{\beta_5 - 1}}{\sqrt{\beta_5}}, \quad \beta_5 = \frac{D_{11}'}{D_{11}} \left(1 - \frac{K_{11}^2}{B_{11} D_{11}'} \right), \quad k_1' = \frac{k_1}{\sqrt[4]{\beta_5}}, \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

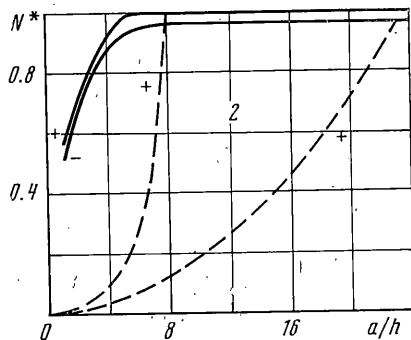
$$A_1 = 1 - \alpha_c \alpha_p^* (1 + \beta_7) [2k^2 \psi_2 (1 + \psi_1 \alpha_k^*)]^{-1}$$

$$A_2 = \alpha_3 + \alpha_c [2 + \alpha_p^* (1 - \beta_7)] [2k^2 \psi_2 (1 + \psi_1 \alpha_k^*)]^{-1}$$

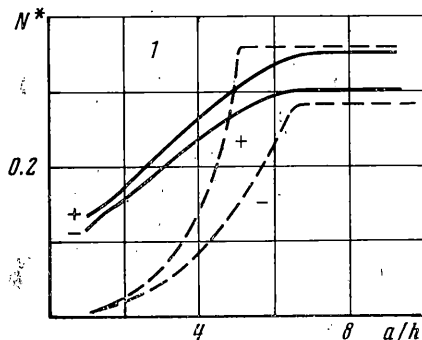
$$k = \frac{k_1}{k_2 \theta_1 \sqrt[4]{\beta_5}}, \quad \beta_7 = -\frac{L_{21}}{\sqrt{A_{22} D_{11} \beta_5}}, \quad \alpha_c = -\frac{L_{21}}{A_{22} k_2^2 EI_z}, \quad \alpha_k^* = \frac{2k D_{11} \beta_5}{k_2 EI_z}$$

$$\alpha_p^* = \frac{4k^3 k_2 D_{11} \beta_5}{E a^2}, \quad \alpha_3 = \frac{1 + \psi_2 \alpha_k^* \alpha_2' - \alpha_c (b')^{-1}}{1 + \psi_1 \alpha_k^*}, \quad \alpha_2' = \frac{\alpha_1' - 1}{2\alpha_1'}, \quad \alpha_1' = \frac{d}{b}$$

Результаты расчетов для оболочки с $R/h=100$, $L/R=2.58$, $\eta_m=15$, полученные при $m=200$, показаны на фиг. 1–3 (h – толщина оболочки). Фиг. 1 соответствует оболочке, подкрепленной шпангоутами, фиг. 2 – стрингерами, фиг. 3 – стрингерами



Фиг. 1



Фиг. 2

и шпангоутами. Приведенная толщина стрингеров и шпангоутов равнялась 0,228, приведенные моменты инерции относительно срединной линии оболочки – 20,8, величина отношения эксцентриситета к толщине оболочки – 0,456. Под эксцентриситетом понимается расстояние от центральной оси поперечного сечения подкрепления с присоединенной оболочкой до срединной поверхности оболочки. Знак плюс означает наружное расположение подкреплений, минус – внутреннее.

Сплошные кривые на фигурах получены при условиях симметрии (2.1). В этом случае потеря устойчивости происходит с образованием большого числа волн по окружности. При малых значениях a/h имеются ниспадающие ветви кривых. С увеличением относительной жесткости кольца критическое усилие растет, приближаясь к критическому усилию защемленной оболочки.

Пунктирные кривые получены при условиях косої симметрии (2.2). При небольших значениях a/h потеря устойчивости происходит с образованием двух волн по окружности при критических нагрузках на несколько порядков меньших критических нагрузок, полученных для защемленных оболочек. При увеличении a/h критические нагрузки возрастают. Для каждого типа подкреплений существует некоторое предельное значение, a/h такое, что при дальнейшем увеличении величины отношения a/h критическая нагрузка практически не возрастает и близка к критической нагрузке для защемленной оболочки. В этом случае при потере устойчивости образуется большое число волн по окружности.

Для оболочек, подкрепленных шпангоутами, влияние эксцентриситета оказывается незначительным. Критические усилия для оболочек, подкрепленных стрингерами, при наружном подкреплении на 25% выше критических усилий при внутреннем подкреплении. Критические нагрузки для оболочек, подкрепленных стрингерами и шпангоутами, при наружном подкреплении на 40% выше, чем при внутреннем подкреплении. Критические усилия, вычисленные в предположении безмоментности исходного состояния оболочки, незначительно (на 1–5% в диапазоне $a/h=3-20$) отличаются от их значений, приведенных на фигурах.

Поступила 9 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость двухслойных оболочек за пределом упругости. Инж. МТТ, 1966, № 4.
2. Кабанов В. В. Конечно-разностный метод решения задач устойчивости оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1.
3. Кабанов В. В. Устойчивость продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной по краям упругими кольцами. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. М. – Л., Гостехиздат, 1935.