

УДК 539.3

© 2007 г. В.В. МОКРЯКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВУХ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫХ ОТВЕРСТИЯХ

Рассмотрена плоская задача теории упругости о взаимодействии двух близко расположенных одинаковых отверстий в условиях двухосного нагружения на бесконечности. Исследовано напряженное состояние в области взаимовлияния отверстий и в окрестностях их контуров. Предложен метод численного решения этой задачи, основанный на представлении функции скачка смещений в виде суммы мультиполей. Особое внимание уделено тому, как зависит концентрация напряжений от параметров системы отверстий и ориентации ее относительно приложенной нагрузки. Получены поля напряжений при различных расположениях отверстий. Представлены зависимости максимально достигаемого на контуре напряжения и точки максимальной концентрации напряжений от ориентации пары отверстий относительно внешней нагрузки.

1. Введение. Главная причина разрушения материалов – возникновение и развитие трещин. Происходит это из-за наличия в материале дефектов: микротрещин, включений, пор. Дефекты являются концентраторами напряжений, которые в окрестности дефектов значительно возрастают и могут превысить (и превышают) прочностные характеристики материала, и тогда возникает трещина. Поскольку вершина трещины также является концентратором напряжений, трещина продолжает расти, и когда она выходит на поверхность, конструкция разрушается.

Таким образом, представляет интерес изучение полей напряжений (их структуры и параметров) в окрестности дефектов, в частности пор. Для плоских задач (перфорированные пластины) обычно при этом используется метод сингулярных граничных интегральных уравнений (СГИУ) [1–6].

Поле напряжений вокруг одиночной поры в плоскости при произвольном нагружении хорошо изучено, получено точное аналитическое решение (см., например, [2, 3, 7]). Это решение можно применять при достаточно редко расположенных в материале порах. Однако, если характерное расстояние между порах не превышает нескольких их диаметров, влияние пор друг на друга вносит значительные искажения в поля напряжений в их окрестностях.

Большое внимание уделялось изучению задач теории упругости для плоскости с периодически и двойко-периодически расположенными отверстиями или включениями (группами отверстий или включений) [8, 9]. Аналитическое решение здесь не получено, но задача может быть сведена к бесконечной системе линейных уравнений, которая решается численными методами. Однако, обычно в таких задачах рассматривается влияние периодической структуры на эффективные упругие характеристики материала в целом. В то же время для изучения процессов разрушения важно знать напряженно-деформированное состояние непосредственно вблизи концентраторов напряжений и в области между ними – в зоне возможного зарождения трещин. В [9] рассмотрены аналогичные задачи для волокнистых композитов, где роль концентраторов напряжений играют волокна. Приведены распределения напряжений на грани-

це включения и матрицы для некоторых частных видов нагружений (продольный и поперечный сдвиг, поперечное растяжение для сплошных и полых волокон), но при этом использовалось приближение однородного взаимодействия между волокнами.

Даже для двух отверстий аналитическое решение задачи представляет собой серьезную проблему. Некоторые частные случаи (два отверстия в плоскости при всестороннем нагружении, одноосных нагружениях вдоль и поперек оси соединяющей центры отверстий) исследованы в [10]. Здесь с помощью биполярной системы координат для них получено аналитическое решение в виде гиперболическо-тригонометрических рядов. К сожалению, в общем случае нагружения применение данного метода представляется затруднительным. Развитие этот метод получил в [11], где особый упор сделан на случай малого расстояния между отверстиями, для которого известные методы были неэффективны.

Поэтому для решения подобных задач приходится применять численные методы. Суть их обычно сводится к замене искомой функции (например, упругих потенциалов) на линейную комбинацию системы известных функций, дающих приближение искомого решения с приемлемой точностью. В результате вместо СГИУ получим систему линейных уравнений, методы решения которых давно и хорошо разработаны. Так, в [12, 13] исследованы распределения напряжений вокруг двух и трех отверстий, а также бесконечного ряда отверстий. Напряжения рассчитывались для случая, когда прямая, соединяющая центры отверстий, параллельна приложенной на бесконечности нагрузке, или перпендикулярна ей.

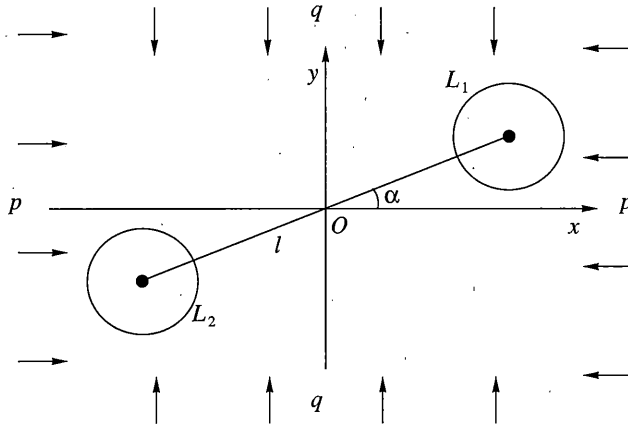
Отметим, что в последние годы в связи с бурным развитием вычислительной техники появилось большое количество работ, посвященных совершенствованию численных методов расчета напряженно-деформированного состояния перфорированных пластин (см., например, [14, 15]).

В данной работе предлагается использовать для расчета упругих полей мультипольное представление. Возмущение упругого поля, создаваемое отверстием, рассматривается как сумма (возможно, бесконечная) мультиполей – точечных концентраторов напряжений в упругом континууме. Это позволяет качественно и количественно оценить вклад разных видов нагружений в общую картину полей.

Предлагаемый метод можно условно назвать методом мультипольного разложения (ММР). Сразу же стоит отметить отличие этого метода от быстрого мультипольного метода, БММ (fast multipole method, FMM), который активно развивается в последние годы [см., например, 16–18]. Хотя оба метода применяются для решения задач плоской теории упругости и их аппарат строится на СГИУ, численно-алгоритмическая часть полностью различна. Подробное обсуждение БММ выходит за рамки статьи. Укажем только, что метод используется для существенного снижения порядка сложности задачи (с $O(N^3)$ до $O(N)$) при расчете НДС упругой пластины с большим количеством дефектов (десятки тысяч и более).

Рассматривается влияние двух близко расположенных одинаковых отверстий на напряженное состояние в окрестностях этих отверстий. Особое внимание уделено зависимости концентрации напряжений и точки максимальной концентрации напряжений от ориентации пары отверстий относительно внешней нагрузки.

2. Постановка задачи и построение основных уравнений. В бесконечной упругой плоскости имеются два одинаковых круговых отверстия (фиг. 1). Плоскость подвергается двухосному нагружению. Нагрузка на краях отверстий отсутствует. Требуется найти смещения на краях отверстий, распределение полей напряжений и деформаций в среде. Также требуется найти наиболее вероятные точки зарождения трещин и ориентацию отверстий (по отношению к нагрузке), при которой возникновение трещин наиболее вероятно.



Фиг. 1

Выберем систему координат так, чтобы оси совпали с направлениями главных напряжений на бесконечности. Нагрузку вдоль Ox обозначим p , вдоль $Oy - q$. Начало координат расположим так, чтобы отверстия располагались симметрично относительно него, это упростит вид уравнений. В качестве единицы масштаба выберем отверстие, т.е. будем считать все линейные размеры отнесенными к радиусу. Сами окружности, таким образом, будут единичными. Обозначим через α и l угол между прямой, соединяющей центры отверстий, и осью Ox и расстояние между центрами. Тогда координаты центров окружностей записываются в виде

$$z_1^0 = (l/2)e^{i\alpha} = z_0; \quad z_2^0 = -(l/2)e^{i\alpha} = -z_0 \tag{2.1}$$

Для решения удобно использовать комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили. Для данной задачи они имеют следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{p+q}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \frac{g'_k(t_k) e^{i\alpha_k} dt_k}{T_k - z} \\ \Psi(z) &= \frac{q-p}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \left[\frac{\bar{g}'_k(t_k) e^{-i\alpha_k} dt_k}{T_k - z} - \frac{\bar{T}_k g'_k(t_k) e^{i\alpha_k} dt_k}{(T_k - z)^2} \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi(z - z_k^0)} \int_{L_k} [\bar{T}_k g'_k(t_k) e^{i\alpha_k} dt_k - T_k \bar{g}'_k(t_k) e^{-i\alpha_k}] dt_k \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $g_k(t_k)$ – функции скачка смещений на k -м контуре; $T_k = z_k^0 + t_k e^{i\alpha_k}$; t_k – локальные координаты, связанные с k -м отверстием. Выберем локальные системы координат так, чтобы их точки отсчета располагались в центрах отверстий, и при этом сориентируем их симметрично относительно O . Тогда $T_1 = z_0 + t$; $T_2 = -z_0 - t$; $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi$; $g_2(t_2) = g_1(t_1) = g(t)$, и интегрирование по двум контурам L_1 и L_2 заменяется интегрированием по одному контуру L , совпадающему с L_1 . При этом потенциалы примут вид

$$\Phi(z) = \frac{p+q}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{1}{t + z_0 - z} + \frac{1}{t + z_0 + z} \right] g'(t) dt$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \frac{q-p}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{1}{t+z_0-z} + \frac{1}{t+z_0+z} \right] g'(t) dt - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{1}{(t+z_0-z)^2} + \frac{1}{(t+z_0+z)^2} \right] \overline{(t+z_0)} g'(t) dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(z_0-z)^2} + \frac{1}{(z_0+z)^2} \right) \int_L [\overline{(t+z_0)} g'(t) dt + (t+z_0) \overline{g'(t)} dt] \end{aligned} \quad (2.3)$$

На контуре L ($z \rightarrow t' + z_0$, $t' = e^{i\theta}$) потенциалы ввиду отсутствия нагрузок должны удовлетворять граничным условиям

$$\Phi(z) + \bar{\Phi}(z) + \frac{d\bar{z}}{dz} [z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z)] = 0 \quad (2.4)$$

После подстановки значений потенциалов получим СИУ

$$\int K(t, t') g'(t) dt + \int L(t, t') \bar{g}'(t) dt = A(t') \quad (2.5)$$

$$K(t, t') = \frac{2}{t-t'} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{t+t'+2z_0} - \frac{t'^2}{t+t'+2\bar{z}_0} + \frac{1}{t} \frac{t'^2}{(t'+2\bar{z}_0)^2}$$

$$L(t, t') = \frac{1}{t+t'+2\bar{z}_0} + t'^2 \frac{t+t'+2z_0}{(t+t'+2\bar{z}_0)^2} - t \frac{t'^2}{(t'+2\bar{z}_0)^2} \quad (2.6)$$

$$A(t') = -2\pi \left(\frac{p+q}{2} - \frac{q-p}{2} t'^2 \right)$$

Добавим к (2.5) условие скачка смещений при обходе по контуру отверстия

$$\int g'(t) dt = B \quad (2.7)$$

В рассматриваемом случае $B = 0$, так как смещения непрерывны.

3. Численное решение. Будем искать численное решение в виде ряда Лорана (далее будет показано, что члены этого разложения соответствуют мультипольным концентраторам напряжений соответствующего порядка)

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n t^n \quad (3.1)$$

где $t = e^{i\theta}$ – точка на контуре L .

Тогда уравнения примут следующий вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n K_n(t') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{g}_n L_n(t') = A(t') \quad (3.2)$$

$$K_n(t') = \int K(t, t') t'^n dt; \quad L_n(t') = \int L(t, t') t'^n dt \quad (3.3)$$

В качестве критерия точности решения примем функцию

$$F(g_n) = \int_L \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n K_n(t') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{g}_n L_n(t') - A(t') \right|^2 ds, \quad ds = d\theta = \frac{dt'}{ie^{i\theta}} = -i \frac{dt'}{t'} \quad (3.4)$$

где s – расстояние вдоль контура L .

Согласно теореме единственности данная задача теории упругости при заданных граничных условиях имеет одно и только одно решение. Значит, если g_n – точное решение, то $F = 0$, в противном случае $F > 0$. Более того, $F(g_n)$ является положительно определенной квадратичной формой от g_n , поэтому чем больше каждое g_n отклоняется от решения, тем больше значение $F(g_n)$.

Замечание. Для численного решения таких задач часто используется метод механических квадратур или аналогичный ему (см., например, [3–7]). При этом выбирается ряд точек на контуре и ищется решение в виде суммы ортогональных функций [19–21], при котором в этих точках удовлетворяется граничное условие. Предполагается, что при этом во всех остальных точках контура погрешность не будет превышать допустимого значения.

Однако для кругового отверстия такой подход непригоден [6]. Любой интерполяционный многочлен на единичной окружности представляет собой линейную комбинацию тригонометрических функций (ряд Лорана превращается в ряд Фурье). Значит, если мы возьмем на контуре две противоположные точки, то значение в них каждого члена разложения будет либо одинаковым (четные степени), либо противоположным (нечетные степени). В этих условиях, если точки коллокации расположены по контуру равномерно, полученная система линейных уравнений будет плохо обусловленной. Подобный же эффект возникает, если точек слишком много, т.е. имеются ограничения по точности вычислений. Но если точки расположить неравномерно, то в наибольших промежутках погрешности будут накапливаться. В результате нередко получались решения, когда в каждой из точек коллокации граничное условие удовлетворяется, а в целом точность совершенно неприемлема. Поэтому предлагается использовать интегральный критерий точности, например, упомянутую функцию $F(g_n)$. Тогда его минимальное значение будет соответствовать искомому численному решению задачи.

Для того, чтобы вычислить $F(g_n)$, разложим функцию

$$G(g_n, t') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n K_n(t') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{g}_n L_n(t') - A(t') \quad (3.5)$$

в ряд Лорана по t' :

$$G(g_n, t') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k t'^k$$

В силу взаимной ортогональности функций t'^k ($k \in \mathbf{Z}$) на единичной окружности функция $F(g_n)$ выражается через сумму квадратов модулей коэффициентов G_k (δ_{km} – символ Кронекера):

$$\begin{aligned} F(g_n) &= -i \int_L \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k t'^k \right|^2 i dt' = -i \int_L \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k t'^k \right) \overline{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m t'^m \right)} i dt' = \\ &= -i \int_L \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} G_k \bar{G}_m t'^k \bar{t}'^m i dt' = -i \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} G_k \bar{G}_m \int_L t'^{k-m} i dt' = \\ &= -i \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} G_k \bar{G}_m (2\pi i \delta_{km}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k \bar{G}_k = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |G_k|^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Очевидно, что уравнение $F(g_n) = 0$ равносильно системе $G_k = 0$.

Найдем G_k . Для этого сначала вычислим и разложим в ряд $K_n(t')$ и $L_n(t')$:

$$K_n(t') = \begin{cases} 2\pi i \left(t'^n + \frac{(-1)^n t'^n}{(t' + 2\bar{z}_0)^{n+2}} \right), & n > 0 \\ 4\pi i \left(1 + \frac{t'^2}{(t' + 2\bar{z}_0)^2} \right), & n = 0 \\ 2\pi i \left(\frac{1}{t' + 2\bar{z}_0} - \frac{t'^2}{t' + 2\bar{z}_0} \right), & n = -1 \\ -2\pi i (t'^n + (-1)^n (t' + 2\bar{z}_0)^n), & n < -1 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$L_n(t') = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ 2\pi i (-1)^n (t' + 2\bar{z}_0)^n \left(1 - n t'^2 \frac{t' + 2\bar{z}_0}{t' + 2\bar{z}_0} + (n-1) \frac{t'^2}{(t' + 2\bar{z}_0)^2} \right), & n \leq -1 \end{cases}$$

Для разложения $K_n(t')$ и $L_n(t')$ в ряд Лорана используем формулу

$$\frac{1}{(t' + 2z_0)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+n-1)!}{(2z_0)^{k+n} k!(n-1)!} t'^k \quad (3.8)$$

Подставив полученные выражения в (3.5) и сгруппировав члены по степеням t' , получим следующие выражения для G_k :

$$G_0 = 2\pi i \left\{ 2g_0 + \frac{g_{-1}}{2z_0} - \sum_{n=2}^{\infty} g_{-n} \frac{(-1)^n}{(2z_0)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_{-n} \frac{(-1)^n}{(2\bar{z}_0)^n} \right\} + 2\pi \frac{p+q}{2}$$

$$G_{-1} = 0$$

$$G_{-2} = 2\pi i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{(-1)^n}{(2\bar{z}_0)^{n+2}} + \frac{2g_0}{(2\bar{z}_0)^2} - \frac{g_{-1}}{2\bar{z}_0} - g_{-2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_{-n} \frac{(-1)^n}{(2\bar{z}_0)^{n+2}} \left[n \cdot 4|z_0|^2 - \frac{(n+2)(n+1)}{2} \right] \right\} - 2\pi \frac{q-p}{2} \quad (3.9)$$

$$G_k = 2\pi i \left\{ g_k + g_{-1} \frac{(-1)^k}{(2z_0)^{k+1}} - \sum_{n=2}^{\infty} g_{-n} \frac{(-1)^{k+n} (k+n-1)!}{(2z_0)^{k+n} k!(n-1)!} \right\}, \quad k > 0$$

$$G_{-k} = 2\pi i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{(-1)^{k+n} (k+n-1)!}{(2\bar{z}_0)^{k+n} (k-2)!(n+1)!} + 2g_0(k-1) \frac{(-1)^k}{(2\bar{z}_0)^k} - g_{-1} \frac{(-1)^k}{(2\bar{z}_0)^{k+1}} - g_{-k} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_{-n} \frac{(-1)^{k+n}}{(2\bar{z}_0)^{k+n}} \left[\frac{(k+n-2)!}{(k-2)!(n-1)!} \cdot 4|z_0|^2 - \frac{(k+n)!}{k!n!} (k-1) \right] \right\}, \quad k > 2$$

Таким образом, получена бесконечная система линейных уравнений относительно g_n , однако для $k = -1$ имеется тривиальное уравнение $0 = 0$. Есть еще уравнение совместности, которое равносильно $g_{-1} = B/2\pi i$. Этим уравнением заменим тривиальное уравнение в системе $G_k = 0$.

Ограничившись степенями $-N_1 \leq k, n \leq N_2$, где $N_1, N_2 \gg 1$, получим конечную линейную систему уравнений. Количество уравнений и переменных в ней равно $N_1 + N_2 + 1$, т.е. система замкнута. Ее решение будет приближенным решением задачи. Причем чем большие порядки учтены при решении, тем большая точность может быть достигнута.

Отметим, что метод сведения задачи к бесконечной системе уравнений путем разложения искомых функций в ряд Лорана применялся, например в [13], только там в ряды раскладывались упругие потенциалы. Здесь же оба потенциала выражаются через одну функцию $g(t)$, что позволяет вдвое сократить количество неизвестных и уравнений в конечной системе при той же точности. Кроме того, вместо функций комплексного переменного здесь имеем функцию, заданную на контуре, что позволяет не рассматривать ограничения, характерные для первых (аналитичность и т.п.), поскольку окончательное решение будет удовлетворять им автоматически.

4. Расчет смещений на контуре отверстия и полей напряжений в среде. Физический смысл компонентов разложения. Согласно [3] смещения на контуре выражаются следующим образом

$$u(t) + iv(t) = -\frac{i(1 + \kappa)}{2G} g(t) \tag{4.1}$$

где κ, G – упругие константы материала. Знак “минус” возникает потому, что интегрирование ведется против часовой стрелки, т.е. среда при обходе остается справа от контура.

Итак, получим

$$\begin{aligned} u(t) + iv(t) &= -\frac{i(1 + \kappa)}{2G} \int \sum_{n=-N_1}^{N_2} g_n t^n dt = -\frac{i(1 + \kappa)}{2G} \int \left[\sum_{n=0}^{N_2} g_n t^n + \sum_{n=2}^{N_1} g_{-n} \frac{1}{t^n} + \frac{g_{-1}}{t} \right] dt = \\ &= -\frac{i(1 + \kappa)}{2G} \left[\sum_{n=0}^{N_2} \frac{g_n}{n+1} t^{n+1} - \sum_{n=2}^{N_1} \frac{g_{-n}}{n-1} \frac{1}{t^{n-1}} + g_{-1} \ln t + \text{const} \right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Константу интегрирования можем приравнять нулю, так как она описывает смещение отверстия как единого целого и вклад в деформацию не вносит.

Отметим, что разложение функции, заданной на единичной окружности, в ряд Лорана относительно центра окружности фактически является разложением на мультиполи, т.е. члены разложения, соответствующие каждому g_n , имеют вполне определенный физический смысл. Так, $\text{Re} g_0$ соответствует вращению контура, как единого целого, причем другие члены вклад во вращение не дают. Аналогично, $\text{Im} g_0$ (и только она) описывает всестороннее расширение (сжатие) контура. Члену при g_{-2} соответствует деформация чистого сдвига. Вместе эти члены дают решение для одиночного отверстия в плоскости

$$g'(t) = i \left(\frac{p+q}{4} + \frac{q-p}{2} \frac{1}{t^2} \right)$$

Члену при g_{-4} соответствует квадрупольная деформация, и вообще, каждому g_{-n} соответствует мультипольная деформация n -го порядка. Отметим, что каждому g_{-n}

($n \geq 2$) соответствует сопряженный ему член g_{n-2} , который позволяет выделить из n -го мультиполя отдельно действительную и мнимую компоненты. Например, комбинируя 0-й и -2-й члены можно получить одноосную деформацию вдоль любой из координатных осей.

Особое внимание стоит обратить на коэффициент g_{-1} , соответствующий дислокационно-подобной деформации. Это единственный член, который дает разрыв смещений при обходе по контуру. При любых граничных условиях можно вычислить g_{-1} , исходя лишь из условия совместности.

Для вычисления напряжений, применим их представление через потенциалы

$$\sigma = \Phi + \bar{\Phi}; \quad \sigma_s + i\tau_{xy} = \bar{z}\Phi' + \Psi \quad (4.3)$$

где $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ – гидростатическое давление, $\sigma_s = (\sigma_y - \sigma_x)/2$ и τ_{xy} – компоненты дивергатора напряжений.

Подставив разложение (3.1) в выражения для потенциалов, получим

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{p+q}{2} + i \sum_{n=1}^{N_1} \left\{ \bar{g}_{-n} \left[\frac{1}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2} + \frac{1}{(\bar{z}+\bar{z}_0)^2} \right] - g_{-n} \left[\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z+z_0)^2} \right] \right\} \\ \sigma_s + i\tau_{xy} &= \frac{q-p}{2} + i \left\{ \sum_{n=2}^{N_1} g_{-n} \left[\frac{n|z-z_0|^2 - (n+1)}{(z-z_0)^{n+2}} + \frac{n|z+z_0|^2 - (n+1)}{(-z-z_0)^{n+2}} \right] + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{N_2} \bar{g}_n \left[\frac{1}{(z-z_0)^{n+2}} + \frac{1}{(-z-z_0)^{n+2}} \right] + 2g_0 \left[\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z+z_0)^2} \right] + \\ &\left. + (g_{-1}\bar{z} + \bar{g}_{-1}z) \left[\frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{1}{(z+z_0)^2} \right] - 2g_{-1} \left[\frac{1}{(z-z_0)^3} - \frac{1}{(z+z_0)^3} \right] \right\} \quad (4.4) \end{aligned}$$

5. Расчет наиболее вероятных точек зарождения трещин. В работе рассмотрены следующие критерии возникновения трещин:

1°. Значение какого-либо нормального напряжения превышает критическое значение σ_{cr} – возникновение трещины разрыва.

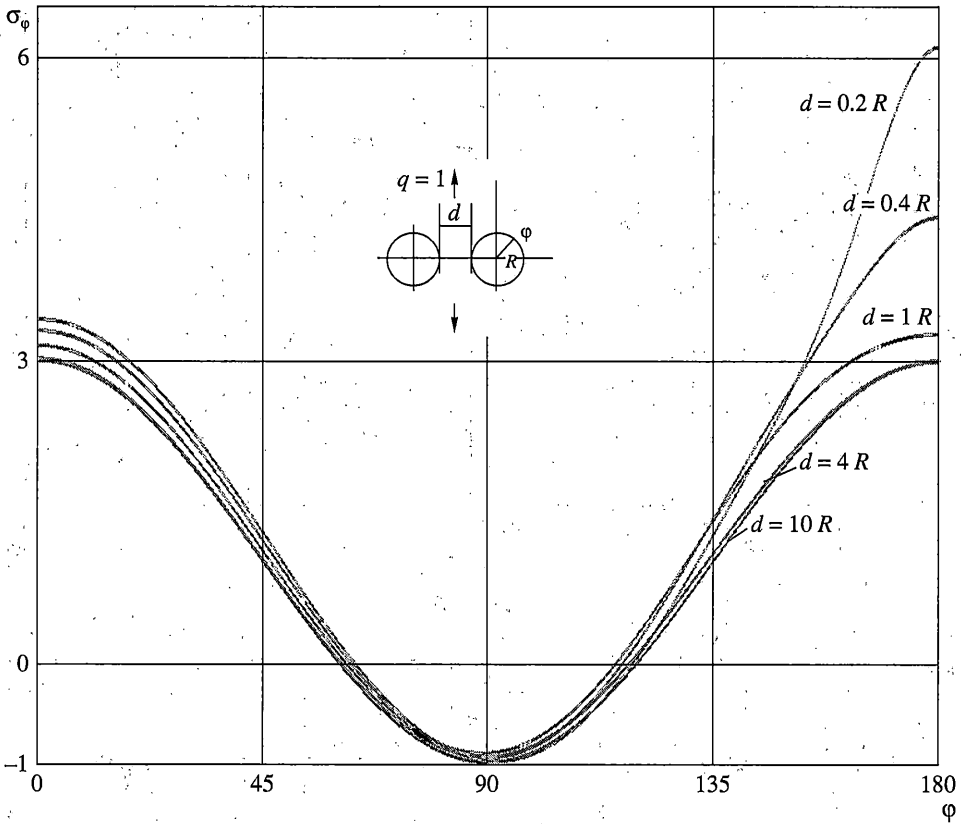
2°. Значение какого-либо касательного напряжения превышает критическое значение τ_{cr} – возникновение трещины сдвига.

В полярной системе координат ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$) компоненты тензора напряжений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \sigma_{\rho} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi = \sigma - \sigma_s \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi} = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi = \sigma + \sigma_s \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma_{\rho\varphi} &= \tau_{\rho\varphi} = -\sigma_x \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_y \cos \varphi \sin \varphi + 2\tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \sigma_s \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (5.1)$$

Поскольку σ_{ρ} и $\tau_{\rho\varphi}$ на контуре согласно граничным условиям равны нулю, максимальное растяжение может быть достигнуто только на площадке, перпендикулярной контуру, чему соответствует σ_{φ} . Таким образом, трещина разрыва может начать расти только перпендикулярно краю отверстия.

Аналогично, максимальный сдвиг может быть достигнут только на площадках, расположенных под углом 45° к контуру. Этим направлениям соответствует напряжение $\tau_{\max} = -\sigma_s \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$, $\tau_{\max}^2 = \sigma_s^2 + \tau_{xy}^2$. Таким образом, трещины сдвига могут зародиться только под углом 45° к краю отверстия.



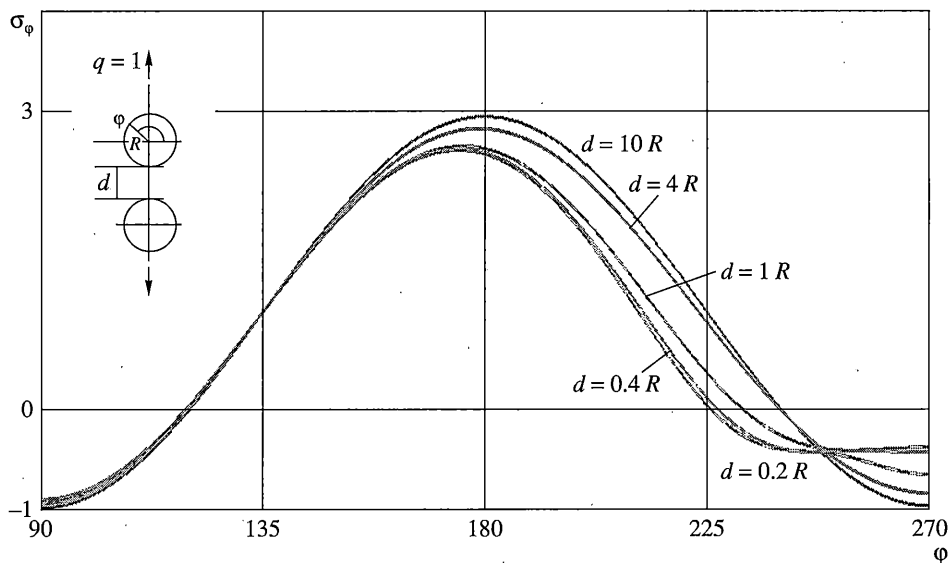
Фиг. 2

6. Модельная задача. Для проверки работоспособности модели была выбрана задача о вертикальном растяжении плоскости с парой одинаковых отверстий, контуры которых свободны от нагрузки. Эта задача хорошо исследована в большом количестве работ. В частности, в [15] тщательно изучено поведение тангенциального напряжения на контурах отверстий.

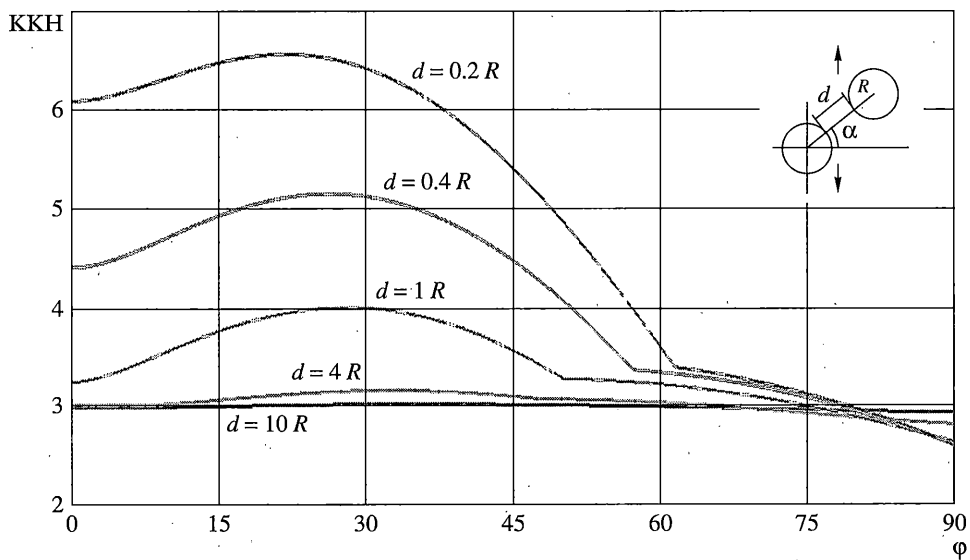
Была построена программа, которая рассчитывала напряженно-деформированное состояние в плоскости используя метод мультипольного разложения. Для различных расстояний между отверстиями были получены: распределение σ_φ вдоль контура, для горизонтального расположения отверстий (фиг. 2); распределение σ_φ вдоль контура, для вертикального расположения отверстий (фиг. 3); зависимость коэффициента концентрации напряжений на отверстиях (ККН) от α (фиг. 4). Результаты расчетов полностью совпали с результатами [15].

7. Пример расчета. Рассмотрим одноосное нагружение, а именно, вертикальное сжатие $p = 0$; $q = -1$. Ширина промежутка между отверстиями $d = l - 2R$ лежит в диапазоне от $0.2R$ до $10R$. Исследуются поля напряжений для различных α . В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

На фиг. 5 представлены зависимости концентрации тангенциального напряжения σ_φ от угла α . На фиг. 6 показана координата φ (в полярных координатах, связанных с контуром) вероятного места зарождения трещины разрыва. Аналогично, на фиг. 7 и 8 представлены зависимости для максимального напряжения сдвига τ_{\max} и для координаты зарождения трещины сдвига.

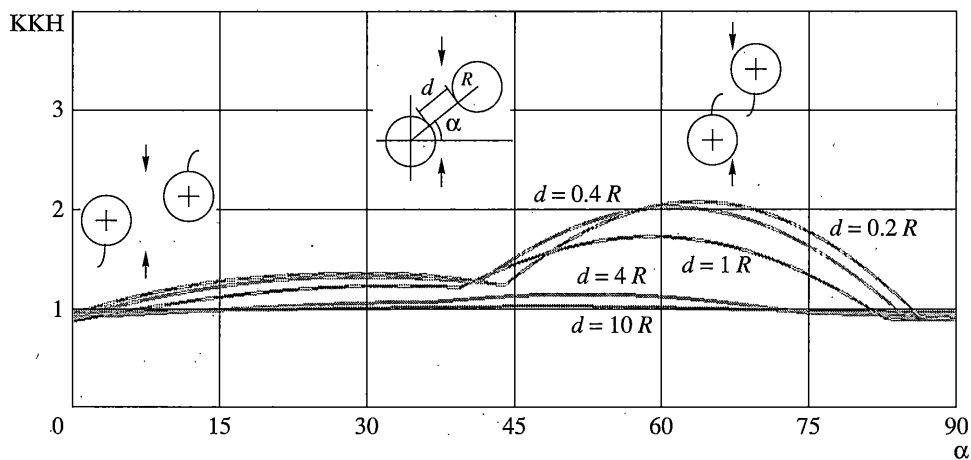


Фиг. 3

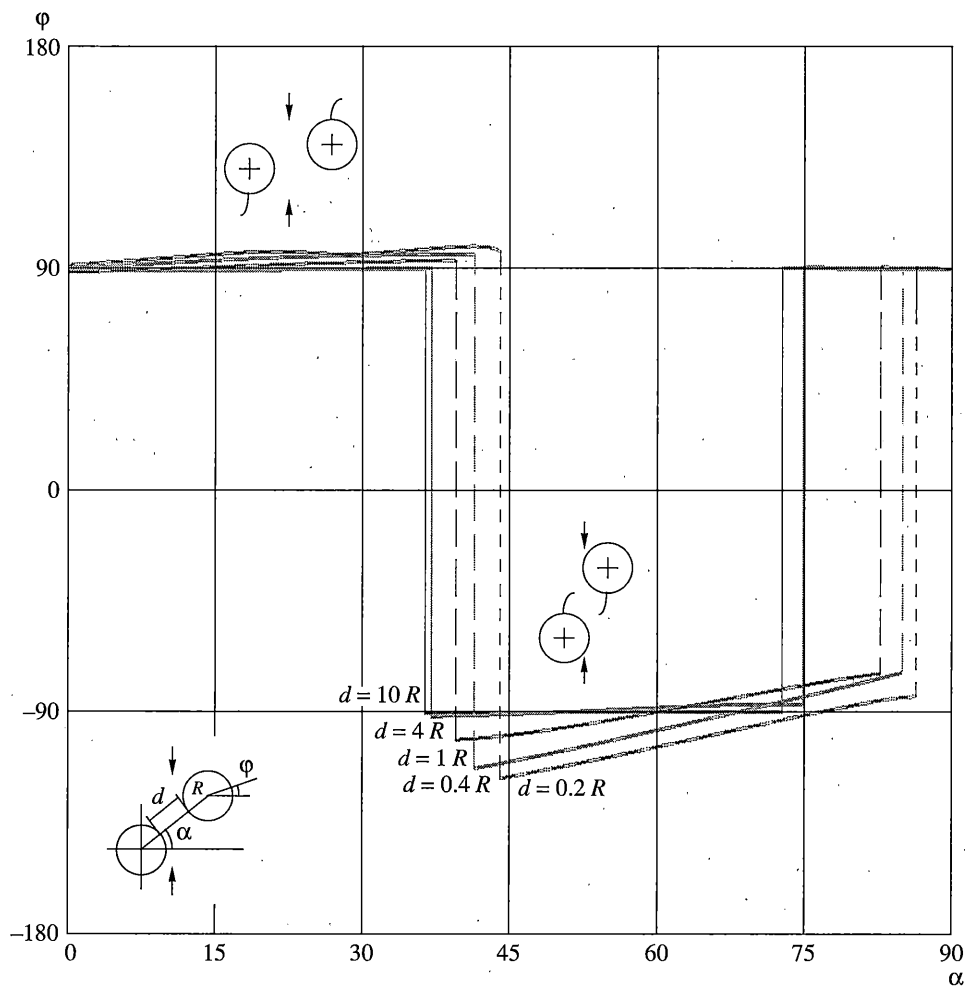


Фиг. 4

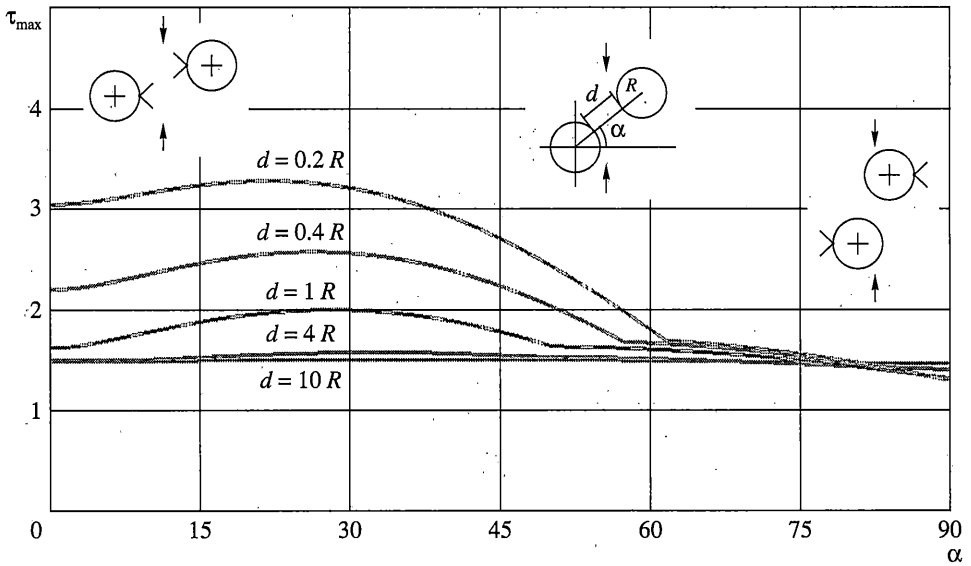
Так, из фиг. 5 видно, что минимальная концентрация σ_ϕ достигается при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$, т.е. когда отверстия располагаются горизонтально или вертикально. Это значит, что такие расположения отверстий наиболее безопасные: для достижения критического значения σ_ϕ здесь придется приложить большую нагрузку, чем, например, при $\alpha = 58^\circ - 59^\circ$ для $d = R$, когда на контуре достигается почти вдвое большее напряжение. Заметим также, что для $d = R$ при $39^\circ < \alpha < 83^\circ$ трещина начнет расти между отверстиями, а при $0^\circ < \alpha < 39^\circ$ и при $83^\circ < \alpha < 90^\circ$ — вне отверстий. Такое же явление наблюда-



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

ется при других взаиморасположениях отверстий. Причина в том, что на контуре образуются две зоны концентрации напряжений и в зависимости от α критическое напряжение может достигаться в одной из зон раньше, чем в другой.

Аналогичное поведение наблюдается и для сдвиговых трещин. Для $d = R$ при $0^\circ < \alpha < 50^\circ$ трещина зарождается в левой части контура L (между отверстиями). При $50^\circ < \alpha < 90^\circ$ точка зарождения перемещается в правую часть контура – трещины будут расти в направлении от отверстий.

Интерес представляет также расчет максимума напряжений (как касательных, так и нормальных) не только на контурах отверстий, но и в окружающем их материале. В системе координат $O s_1 s_2$, повернутой относительно $O x y$ на угол θ , тензор напряжений выразится через σ , σ_s , τ_{xy} :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma - \sigma_s \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{22} &= \sigma + \sigma_s \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{12} &= \sigma_s \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (7.1)$$

Угол θ_{\max} , при котором $\sigma_{12} = \tau_{\max}$, найдем из уравнения

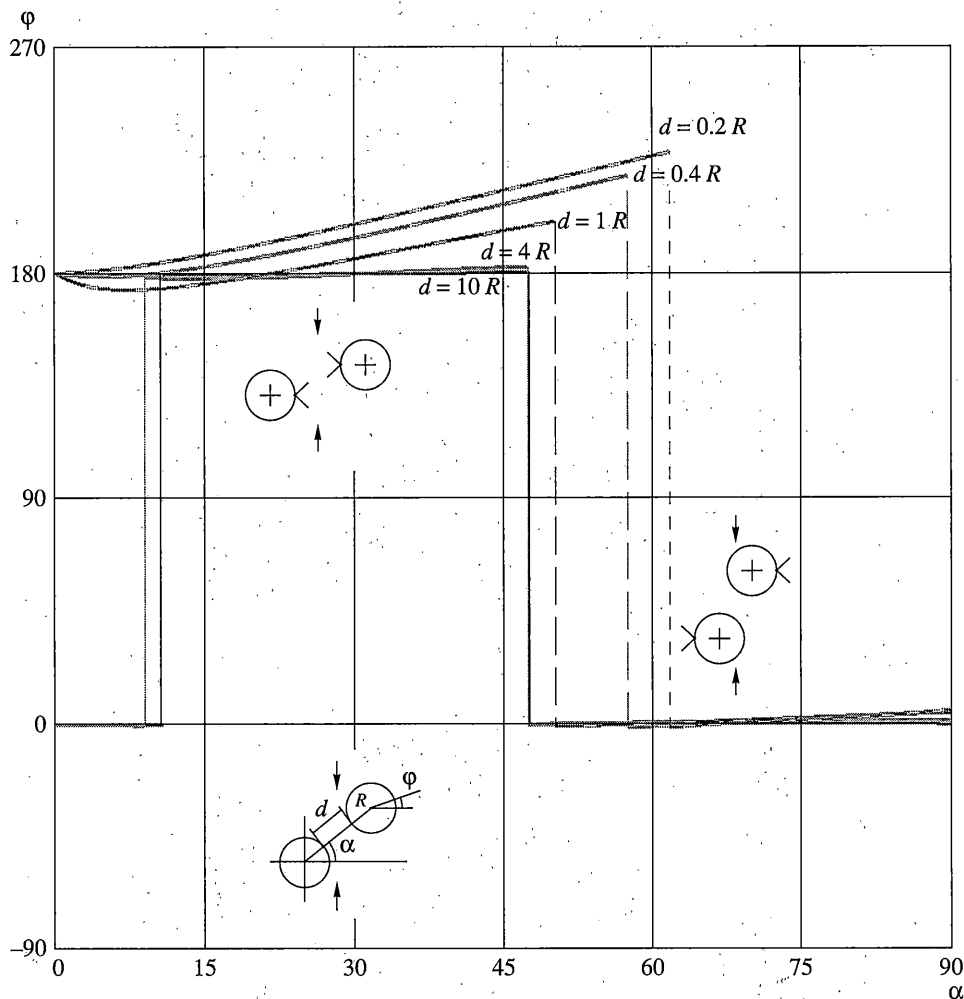
$$\partial \sigma_{12} / \partial \theta = 0 \quad (7.2)$$

решение которого имеет вид

$$\theta_{\max} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_s}{\tau_{xy}} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Таким образом, имеются две различные линии максимального сдвига

$$\theta_{\max 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_s}{\tau_{xy}}, \quad \theta_{\max 2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_s}{\tau_{xy}} + \frac{\pi}{2} \quad (7.3)$$



Фиг. 8

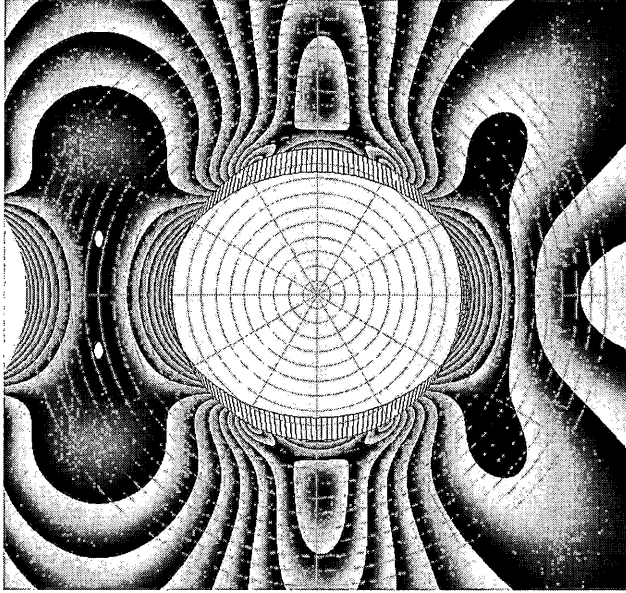
Подставив (7.3) в (7.1), получим

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma, \quad \sigma_{12} = \tau_{\max} = \sqrt{\sigma_s^2 + \tau_{xy}^2} \quad (7.4)$$

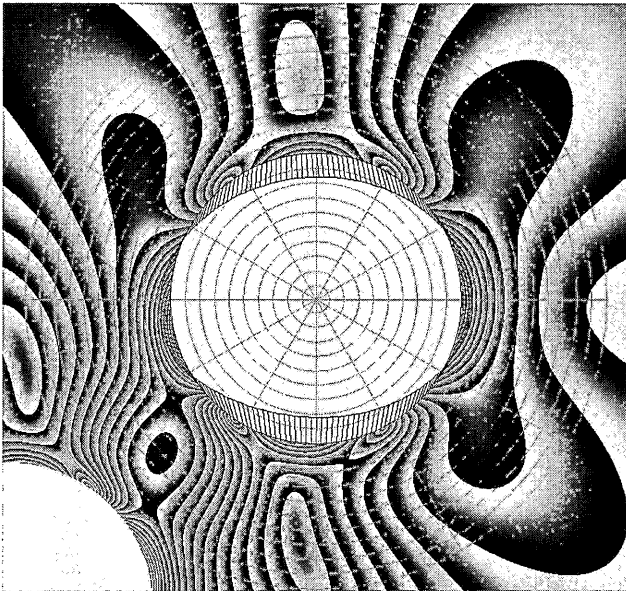
Аналогичным образом найдем, что при $\theta = \theta_{\max1} + \pi/4$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 = \sigma + \tau_{\max} = \sigma + \sqrt{\sigma_s^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{22} &= \sigma_2 = \sigma - \tau_{\max} = \sigma - \sqrt{\sigma_s^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

При этом σ_1 – максимальное в данной точке нормальное напряжение.

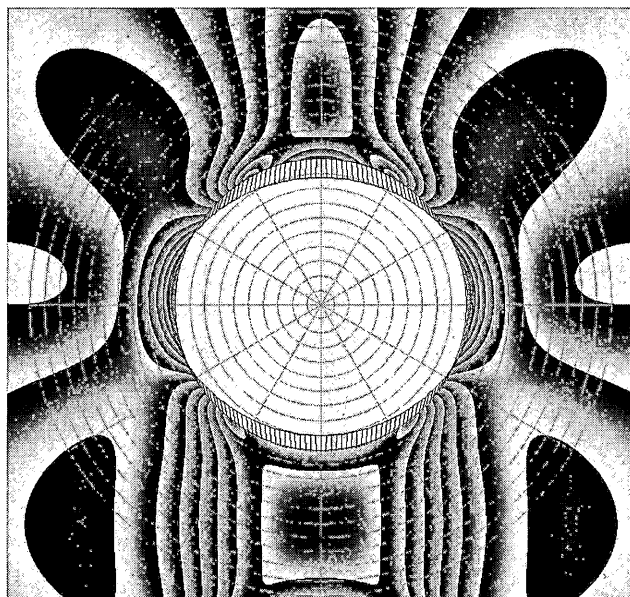


Фиг. 9

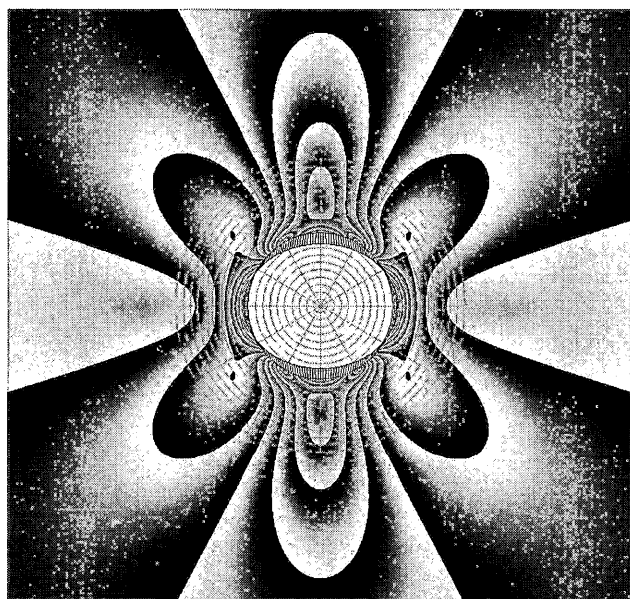


Фиг. 10

В качестве примера на фиг. 9–11 изображены поля напряжений τ_{\max} в окрестности правого верхнего отверстия для $\alpha = 0^\circ, 45^\circ$ и 90° соответственно. Полосы – изолинии равных напряжений, разница между значениями соседних полос равна 0.1 величины приложенной нагрузки. Градиент от черного к белому внутри полосы соответствует



Фиг. 11



Фиг. 12

возрастанию значения функции. Диаграммы внутри отверстий – деформация контура, в условном масштабе.

На фигурах хорошо видна структура полей, области концентрации напряжений. Для сравнения на фиг. 12 приведено распределение τ_{\max} для одиночного отверстия. Отметим, что распределение полностью соответствует экспериментально полученной

картине интерференционных полос для отверстия в плоскости, приведенной в [13] на с. 851.

Построенные поля напряжений могут использоваться для анализа локальных процессов зарождения и развития разрушения в окрестностях отверстий (пор) в условиях сложного напряженного состояния. В связи с этим укажем ряд работ [22–31], где рассматривались различные механизмы разрушения в пористой среде. В частности, в [22, 23] рассмотрены процессы формирования упорядоченных систем трещин, инициируемых в зонах концентрации напряжений отрыва на контурах пор в условиях двухосного сжатия.

Автор выражает благодарность Р.В. Гольдштейну за помощь в проведении работы и предоставленные материалы.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН П-09 “Исследование вещества в экстремальных условиях” подпрограмма “Физика и механика сильно сжатого вещества и проблема внутреннего строения Земли и планет” и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (НШ-4472.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
4. *Андреев А.В.* Расчет предельного равновесия краевых криволинейных трещин в упругой полуплоскости с учетом асимптотики напряжений // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 82–96.
5. *Андреев А.В.* Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 126–146.
6. *Линьков А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.
7. *Tamuzs V., Romalis N., Petrova V.* Fracture of Solids with Microdefects. N. Y.: Nova Science Publ., 2000. 238 p.
8. *Григолоук Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
9. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
10. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 232 с.
11. *Устинов Ю.А.* Концентрация напряжений в полуплоскости и плоскости с круговыми отверстиями при растяжении // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 145–148.
12. *Савин Г.Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.-Л.: Гостехиздат, 1951. 496 с.
13. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
14. *Helsing J., Jonsson A.* Complex variable boundary integral equations for perforated infinite planes // Eng. Anal. Bound. Elem. 2001. V. 25. № 3. P. 191–202.
15. *Ting K., Chen K. T., Yang W. S.* Applied alternating method to analyze the stress concentration around interacting multiple circular holes in an infinite do-main // Intern. J. Solids Struct. 1999. V. 36. № 4. P. 533–56.
16. *Akaiwa N., Thornton K., Voorhees P.W.* Large-scale simulations of microstructural evolution in elastically stressed solids // J. Comp. Phys. 2001. V. № 1. 173. P. 61–86.
17. *Wang Zh., Ghoniem N., LeSar R.* Multipole representation of the elastic field of dislocation ensembles // Phys. Rev. B. 2004. V. 69. № 17. 174102–174107.
18. *Liu Y.* A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems // Intern. J. Numer. Meth. Engng. 2006. V. 65. P. 863–881.
19. *Секе Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
20. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

21. Никифоров А.Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
22. Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Структуры в процессах разрушения // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 49–71.
23. Гольдштейн Р. В. Разрушение при сжатии // Успехи механики. 2003. Т. 2. № 2. С. 3–20.
24. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
25. Каминский А.А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев: Наук. думка, 1982. 158 с.
26. Костров Б.В., Фридман В.Н. Механика хрупкого разрушения при сжимающих нагрузках // Физика очага землетрясения. М.: Наука, 1975. С. 30–44.
27. Никитин Л.В., Одинцев В. Н. Распространение трещин отрыва в сжатых горных породах // Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Наука, 1988. С. 157–165.
28. Dyskin A. V., Germanovich L. N., Ustinov K. B. Asymptotic solution for long cracks emanated from a pore in compression // Intern. J. Fract. 1993. V. 62. № 4. P. 307–324.
29. Ustinov K. B. Asymptotic solution for long cracks emanated from a hole in bi-axial loading // Intern. J. Fract. 1994. V. 68. № 3. P. R73–R77.
30. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
31. Черепанов Г.П. О развитии трещин в сжатых телах // Изв. РАН. ПММ. 1966. Т. 30. № 1. С. 82–93.

Химки

Поступила в редакцию
28.09.2006